ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXX

1882-83

SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME XV.

ROMA

COI TIPI DEL SALVIUCCI

1883

La teoria delle sviluppoidi e le superficie che hanno un sistema di linee di curvatura circolari.

Memoria del prof. MICHELE GREMIGNI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 25 giugno 1882.

INTRODUZIONE

È noto come a Monge sia dovuta la teoria delle sviluppate d'una linea qualsivoglia, piana o a doppia curvatura, delle linee cioè le cui tangenti incontrano una curva data ad angolo retto.

Pel primo Lancret si propose la risoluzione d'una questione più generale di quella risoluta da Monge; egli studiò infatti le linee le cui tangenti sono segate da una curva data sotto un angolo costante qualunque, e ciò fece in una Memoria inserita nel tomo II (Anno 1811) dell'ultima serie delle memorie presentate all'Istituto di Parigi. Le linee studiate da Lancret si chiamarono *sviluppoidi*; per cui le sviluppate di Monge non sono altro che un caso particolare delle sviluppoidi.

Molto tempo dopo, e precisamente nell'anno 1853, l'illustre professor Brioschi ritornava sull'argomento delle sviluppoidi, e in una Nota inserita negli Annali di scienze matematiche e fisiche di Tortolini dimostrava alcune proprietà generali di queste linee, ritrovando ancora le formole di Minich, di Molins e di Fuss; i quali avevan fatto precedenti studi sulle sviluppate delle linee piane, sferiche e a doppia curvatura.

Il valentissimo professor Beltrami ebbe l'idea di dare alle sviluppoidi un significato più generale di quello attribuito loro da Lancret; egli chiamò infatti sviluppoidi d'una linea data (trajettoria) quelle curve le cui tangenti sono segate da questa secondo un angolo, funzione qualsivoglia delle coordinate del punto d'intersezione. Nella sua Memoria pubblicata nel giornale di Tortolini del 1862, la quale porta per titolo *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti*, egli, ammettendo che per una stessa funzione dell'angolo d'intersezione suddetto si abbiano infinite sviluppoidi esistenti in una medesima superficie continua, dimostra dapprima il teorema generale che, su questa superficie, esse sviluppoidi costituiscono sempre un sistema di geodetiche. Rende quindi noti altri importanti teoremi, e intorno alla ricerca effettiva delle sviluppoidi d'una linea data qualsivoglia osserva ch'essa dipende in ogni

caso dall' integrazione d'un' equazione alle derivate ordinarie del primo ordine fra due variabili. Mostra dipoi il processo che si può in ogni caso tenere per giungere a quest' equazione, e l' applica al caso in cui la linea che sega le tangenti alle sviluppoidi sia una curva piana. Si occupa infine del problema inverso, cioè della ricerca delle linee le quali tagliano sotto un angolo variabile con legge data, le tangenti d'un'altra linea data, e di esso problema dà la soluzione analitica completa.

Questi sono i principali punti storici sull' argomento che ho preso a soggetto del mio lavoro.

Io riprendo lo studio delle sviluppoidi secondo il concetto più generale dato dal prof. Beltrami, e fondandomi sulla proprietà che se sopra una sfera di raggio uno si costruiscono le indicatrici sferiche (secondo la denominazione di P. Serret) d'una stessa famiglia di sviluppoidi, esse indicatrici formano un doppio sistema di linee ortogonali con un sistema di circonferenze minori della sfera, stabilisco immediatamente l'equazione differenziale da cui dipende la ricerca effettiva delle sviluppoidi d'una linea data qualsivoglia.

Trovo poi l' elemento lineare della sfera riferito al doppio sistema di linee ortogonali sopra citato, e quello della superficie luogo geometrico d'una stessa famiglia di sviluppoidi riferito a queste medesime linee e alle curve di contatto de' coni retti che inviluppano la superficie stessa, ed intanto stabilisco la formola generale che dà il raggio delle sviluppoidi in un punto qualunque delle medesime. Inoltre dimostro una proprietà delle trajettorie ortogonali delle sviluppoidi, e trovo ancora diverse formole tra cui quelle che danno gli elementi della sviluppoide in funzione delle quantità spettanti alla trajettoria data.

Dopo di ciò mi rivolgo allo studio delle superficie che hanno per normali le tangenti ad una stessa famiglia di sviluppoidi, e dimostro che esse sono l'inviluppo d'una sfera moventesi col centro nella trajettoria data ed avente il raggio legato all'angolo che le tangenti alle sviluppoidi fanno colla traiettoria da una relazione semplicissima; di maniera che le sviluppoidi d'una linea qualsivoglia sono anche l'evolute delle linee di curvatura non circolari delle superficie ora definite. E reciprocamente, considerando le superficie inviluppo di sfere mobili col centro in una linea data e col raggio variabile secondo una data legge, trovo ch'esse hanno per evoluta la superficie inviluppo de' coni retti aventi il vertice sulla linea data e gli assi diretti secondo le tangenti di questa. In cotal guisa lo studio delle sviluppoidi viene ad essere collegato con quello delle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura circolari; la qual cosa mi permette di dimostrare alcune nuove proprietà di queste e di quelle. Tutto ciò forma la prima parte del mio lavoro, e comprende le proprietà generali delle sviluppoidi.

Venendo alla seconda parte, dirò che in essa mi occupo di alcune ricerche particolari, e ritrovo dapprima le equazioni e le proprietà delle sviluppate d' una linea a doppia curvatura; e allo stesso tempo dò pure l'equazioni e una forma dell'elemento lineare delle superficie canali, e ne dimostro le loro proprietà. Passo poi allo studio delle sviluppoidi d'una linea piana, ed ottengo per via assai facile le stesse equazioni date dal prof. Beltrami; di più però aggiungo le equazioni in termini finiti delle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura circolari

coi centri in una linea piana, dalle quali si scorge che la ricerca di queste superficie dipende da una sola quadratura. Osservo poi, fondandomi ancora sui risultati del prof. Beltrami, che tra queste superficie quelle che sono inviluppo d'una sfera mobile col centro in una conica data, e di cui il raggio è una determinata funzione degli elementi di questa, godono della proprietà di avere per evolute delle superficie di second' ordine, di cui la conica data è una delle coniche focali; di ciò porgo un esempio trovando le equazioni della superficie, la di cui evoluta è un iperboloide di rotazione.

Ricerco quindi le superficie che hanno didonie o a curvatura geodetica costante, oltre le linee del sistema circolare, anche le linee di curvatura dell'altro sistema, e trovo che ad esse, tra le altre, appartiene la superficie inviluppo d'una sfera mobile col centro in una spirale logaritmica, e avente in ogni posizione il raggio eguale al raggio vettore della spirale stessa. Di questa curva piana dò poi le equazioni delle sviluppoidi ordinarie, e ne dimostro diverse proprietà.

In seguito passo alla ricerca delle sviluppoidi d'una linea a doppia curvatura qualsivoglia, supponendo però che l'angolo secondo cui questa sega le tangenti di quelle sia eguale all'angolo che le rette *rettificanti* della trajettoria fanno respettivamente colle tangenti della medesima, oppure il primo angolo sia maggiore o minore del secondo, colla condizione però che le loro tangenti trigonometriche siano sempre proporzionali tra loro; e trovo che nel primo caso le coordinate delle sviluppoidi dipendono dalle funzioni algebriche, nel secondo dalle funzioni iperboliche e nel terzo dalle funzioni circolari. Da ciò poi deduco come caso particolare le equazioni delle sviluppoidi ordinarie d'un'elica, e dimostro, tra le altre, questa notevole proprietà, che la superficie delle sviluppoidi ordinarie d'un' elica circolare è sempre applicabile sopra una superficie di rivoluzione.

Dò quindi l'integrale generale in funzione d' un integrale particolare dell'equazione trovata in principio, e da cui dipende, come ho detto, la ricerca delle sviluppoidi di una linea a doppia curvatura qualsivoglia, e quella delle superficie che hanno un sistema di linee di curvature circolari; e così riduco la risoluzione de' due problemi alla ricerca di questo integrale particolare.

Infine nella terza ed ultima parte, onde mostrare vieppiù l' importanza delle formole stabilite in principio, risolvo il problema inverso delle sviluppoidi, vale a dire determino le linee che segano le tangenti d'una linea data secondo un angolo variabile con legge data. Di queste stesse linee ritrovo le proprietà già note, e ne aggiungo delle nuove.

Questo è in breve ciò che io ho fatto; avrei potuto dare un maggiore sviluppo al mio lavoro, ma mi duole il confessare che me n'è mancato il tempo ed i mezzi. E di ciò si comprende subito la cagione, quando si pensi che debbo attendere al duplice insegnamento liceale e ginnasiale, e che disgraziatamente mi trovo in una città dove c'è mancanza assoluta di opere e di giornali di matematica vuoi antichi vuoi moderni. Nutro però fiducia che i resultati a cui son pervenuto non saranno trovati privi d'interesse.

I.

1. Chiamo col chiarissimo prof. Beltrami, come ho già detto nell'introduzione, *sviluppoide* d'una linea (trajettoria), un'altra linea di cui le tangenti segano la prima secondo un angolo, funzione qualsivoglia delle coordinate del punto d'intersezione; *punti corrispondenti,* il punto di contatto d'una tangente alla sviluppoide e il punto d'intersezione di essa colla trajettoria, e *raggio della sviluppoide* la porzione di tangente che unisce una coppia di punti corrispondenti. Dipoi ammetto col sullodato professore che ad una medesima trajettoria, per una stessa funzione dell'angolo sotto cui essa è tagliata dalla tangente la sviluppoide, corrispondano infinite di queste linee giacenti sopra una superficie continua, che chiamo superficie luogo delle sviluppoidi, o, più brevemente, *superficie delle sviluppoidi.*

Ciò premesso, indico con a, b, c le coordinate rettangole d'un punto qualunque della trajettoria, e con σ l'arco di essa, compreso fra un punto determinato e quello di coordinate a, b, c; α, β, γ; ξ, η, ζ; λ, μ, ν gli angoli che la tangente, la normale principale e la binormale relative al punto (a, b, c) formano respettivamente cogli assi. Denoto inoltre con X, Y, Z i coseni degli angoli fatti coi medesimi assi dalla tangente la sviluppoide nel punto corrispondente a quello di coordinate a, b, c e chiamo infine ω l'angolo che la medesima tangente fa colla trajettoria.

Voglio dapprima trovare le espressioni de'coseni X, Y, Z in funzione dell'angolo ω e di altre quantità dipendenti dalla trajettoria data.

Se si proietta la tangente alla sviluppoide sul piano normale della trajettoria passante pel punto (a, b, c), e si chiama ε l'angolo che la proiezione fa colla normale principale contenuta nell'istesso piano, i coseni degli angoli formati da questa proiezione cogli assi sono dati dalle espressioni

$$\cos\xi\cos\varepsilon + \cos\lambda\,\text{sen}\,\varepsilon\,,$$
$$\cos\eta\cos\varepsilon + \cos\mu\,\text{sen}\,\varepsilon\,,$$
$$\cos\zeta\cos\varepsilon + \cos\nu\,\text{sen}\,\varepsilon\,;$$

e quindi i coseni richiesti sono evidentemente i seguenti:

$$1)\quad \begin{cases} X = \cos\alpha\cos\omega + (\cos\xi\cos\varepsilon + \cos\lambda\,\text{sen}\,\varepsilon)\,\text{sen}\,\omega \\ Y = \cos\beta\cos\omega + (\cos\eta\cos\varepsilon + \cos\mu\,\text{sen}\,\varepsilon)\,\text{sen}\,\omega \\ Z = \cos\gamma\cos\omega + (\cos\zeta\cos\varepsilon + \cos\nu\,\text{sen}\,\varepsilon)\,\text{sen}\,\omega \end{cases}$$

ove però rimane a determinare l'angolo ε; ciò che faremo tra breve.

2. Osserviamo intanto che se dal centro d'una sfera di raggio uno, la quale si può supporre situata col centro nell'origine degli assi, si tirano i raggi paralleli alle tangenti delle sviluppoidi, o, in altri termini, si costruiscono le indicatrici sferiche delle infinite sviluppoidi esistenti sopra la medesima superficie, è facile vedere, come ho già notato in un altro mio lavoro (V. Cronaca del Liceo Ginnasiale Galluppi di Catanzaro, anno scolastico 1878-79) che le indicatrici stesse formano un doppio sistema di linee ortogonali colle circonferenze minori, le quali hanno il centro nell'indicatrice sferica della trajettoria, e per raggio sferico l'arco eguale all'angolo ω.

Le X, X, Z, date dalle 1), rappresenteranno allora anche le coordinate rettangole de' punti della sfera di raggio uno, dove la superficie delle sviluppoidi viene col metodo sopra indicato rappresentata, di maniera che quando sulla sfera si prendano per linee coordinate le indicatrici delle sviluppoidi e il sistema di cerchi ad esse ortogonali, le 1) stesse ci forniranno il modo non solo di stabilire l'equazione differenziale che determina l'angolo ε, ma altresì di trovare l'elemento lineare della sfera riferito al doppio sistema di linee ortogonali assunte come linee coordinate, ed in seguito l'elemento lineare della superficie delle sviluppoidi riferito al sistema delle sviluppoidi medesime e all'altro sistema di linee, che su questa superficie corrispondono alle circonferenze minori della sfera.

3. A tale scopo, denoti u il parametro delle indicazioni sferiche e v il parametro delle circonferenze minori. Le X, Y, Z ed ε saranno funzioni di u e v, invece le coordinate a, b, c e l'arco σ della trajettoria, come pure gli angoli α, β, γ; ζ, η, ξ; λ, μ, ν ed ω dovranno riguardarsi come funzioni della sola v.

Si chiami ds' l'elemento lineare della sfera, e si ponga:

$$ds'^2 = \mathrm{E}' du^2 + \mathrm{G}' dv^2 \tag{2}$$

essendo:

$$\mathrm{E}' = \Sigma\left(\frac{d\mathrm{X}}{du}\right)^2, \quad \mathrm{G}' = \Sigma\left(\frac{d\mathrm{X}}{dv}\right)^2.$$

Dalle 1), derivando parzialmente rispetto ad u, abbiamo:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{X}}{du} &= \operatorname{sen}\omega\,\frac{d\varepsilon}{du}\left(-\cos\xi\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\lambda\cos\varepsilon\right)\\
\frac{d\mathrm{Y}}{du} &= \operatorname{sen}\omega\,\frac{d\varepsilon}{du}\left(-\cos\eta\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\mu\cos\varepsilon\right)\\
\frac{d\mathrm{Z}}{du} &= \operatorname{sen}\omega\,\frac{d\varepsilon}{du}\left(-\cos\zeta\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\nu\cos\varepsilon\right)
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

e derivando rispetto a v:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{X}}{dv} = {} & \cos\omega\frac{d\cos\alpha}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dv} - \cos\alpha\operatorname{sen}\omega\frac{d\omega}{dv} + \cos\omega\frac{d\omega}{dv}(\cos\xi\cos\varepsilon + \cos\lambda\operatorname{sen}\varepsilon) + \\
& + \operatorname{sen}\omega\left\{\frac{d\cos\xi}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dv}\cos\varepsilon - \cos\xi\operatorname{sen}\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dv} + \frac{d\cos\lambda}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dv}\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\lambda\cos\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dv}\right\}.
\end{aligned}$$

Ma per le formule del Serret sussistono le seguenti relazioni:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\cos\alpha}{d\sigma} &= \frac{\cos\xi}{\rho}\\
\frac{d\cos\xi}{d\sigma} &= -\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\lambda}{r}\right)\\
\frac{d\cos\lambda}{d\sigma} &= \frac{\cos\xi}{r}
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

ed altre sei analoghe, ove ρ ed r indicano il raggio di curvatura e il raggio di torsione della curva che si considera, e per noi i corrispondenti raggi della trajettoria.

Sostituendo questi valori nella precedente avremo:

$$5)\begin{cases}\dfrac{dX}{du}=-\operatorname{sen}\omega\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\alpha+\left(\dfrac{\cos\omega}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}+\cos\varepsilon\cos\omega\dfrac{d\omega}{dv}-\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\omega\dfrac{d\varepsilon}{dv}+\dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon}{r}\operatorname{sen}\omega\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\xi+\\ \qquad+\left(\cos\omega\operatorname{sen}\varepsilon\dfrac{d\omega}{dv}-\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{r}\cos\varepsilon\dfrac{d\sigma}{dv}+\cos\varepsilon\operatorname{sen}\omega\dfrac{d\varepsilon}{dv}\right)\cos\lambda.\\ \text{e analogamente:}\\ \dfrac{dY}{dv}=-\operatorname{sen}\omega\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\beta+\left(\dfrac{\cos\omega}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}+\cos\varepsilon\cos\omega\dfrac{d\omega}{dv}-\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\omega\dfrac{d\varepsilon}{dv}+\dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon}{r}\operatorname{sen}\omega\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\eta+\\ \qquad+\left(\cos\omega\operatorname{sen}\varepsilon\dfrac{d\omega}{dv}-\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{r}\cos\varepsilon\dfrac{d\sigma}{dv}+\cos\varepsilon\operatorname{sen}\omega\dfrac{d\varepsilon}{dv}\right)\cos\mu.\\ \dfrac{dZ}{dv}=-\operatorname{sen}\omega\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\gamma+\left(\dfrac{\cos\omega}{\rho}\dfrac{d\rho}{dv}+\cos\varepsilon\cos\omega\dfrac{d\omega}{dv}-\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\omega\dfrac{d\varepsilon}{dv}+\dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon}{r}\operatorname{sen}\omega\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\zeta+\\ \qquad+\left(\cos\omega\operatorname{sen}\varepsilon\dfrac{d\omega}{dv}-\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{r}\cos\varepsilon\dfrac{d\sigma}{dv}+\cos\varepsilon\operatorname{sen}\omega\dfrac{d\varepsilon}{dv}\right)\cos\nu.\end{cases}$$

Si moltiplichino ora membro per membro l' equazioni 3) e 5), e, sommando, si ponga la condizione:

$$\frac{dX}{du}\frac{dX}{dv}+\frac{dY}{du}\frac{dY}{dv}+\frac{dZ}{du}\frac{dZ}{dv}=0,$$

la quale dev' essere soddisfatta necessariamente subito che le u e v sulla sfera sono ortogonali tra loro. Operando, dopo facili riduzioni, troviamo:

$$6)\qquad \operatorname{sen}\omega\frac{d\varepsilon}{dv}=\left(\frac{\cos\omega\operatorname{sen}\varepsilon}{\rho}+\frac{\operatorname{sen}\omega}{r}\right)\frac{d\sigma}{dv};$$

e questa è appunto l' equazione che determina l'angolo ε, e dalla cui integrazione dipende, come vedremo, la ricerca delle sviluppoidi.

Per mezzo di essa le 5) possono ridursi più semplici, ed invero si ha:

$$7)\begin{cases}\dfrac{dX}{dv}=-\operatorname{sen}\omega\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\alpha+\cos\omega\cos\varepsilon\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\xi+\cos\omega\operatorname{sen}\varepsilon\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\lambda.\\ \dfrac{dY}{dv}=-\operatorname{sen}\omega\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\beta+\cos\omega\cos\varepsilon\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\eta+\cos\omega\operatorname{sen}\varepsilon\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\mu.\\ \dfrac{dZ}{dv}=-\operatorname{sen}\omega\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\gamma+\cos\omega\cos\varepsilon\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\zeta+\cos\omega\operatorname{sen}\omega\left(\dfrac{d\omega}{dv}+\dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dv}\right)\cos\nu.\end{cases}$$

Quadrando ora e sommando dapprima le 3) e poi le 7), si ottiene:

$$8)\qquad E'=\left(\operatorname{sen}\omega\frac{d\varepsilon}{du}\right)^2;\quad G'=\left(\frac{d\omega}{dv}+\frac{\cos\varepsilon}{\rho}\frac{d\sigma}{dv}\right)^2;$$

e quindi, sostituendo nella 2), l' elemento cercato della sfera è della forma che segue:

$$9)\qquad ds'^2=\left(\operatorname{sen}\omega\frac{d\varepsilon}{du}\right)^2du^2+\left(\frac{d\omega}{dv}+\frac{\cos\varepsilon}{\rho}\frac{d\sigma}{dv}\right)^2dv^2$$

dove ε vien dato, come abbiamo già detto, dall' equazione 6).

Se pigliamo in luogo della variabile v l' arco σ della trajettoria, la precedente si trasforma in quest' altra:

$$10)\qquad ds'^2=\left(\operatorname{sen}\omega\frac{d\varepsilon}{du}\right)^2du^2+\left(\frac{d\omega}{d\sigma}+\frac{\cos\varepsilon}{\rho}\right)^2d\sigma^2$$

e la 6) nella seguente molto più semplice:

$$11)\qquad \frac{d\varepsilon}{d\sigma}=\frac{\cot\omega}{\rho}\operatorname{sen}\varepsilon+\frac{1}{r}.$$

Si può dare a quest' ultima equazione anche un' altra forma. Moltiplicando in essa ciascun membro per r, si ha:

$$\frac{\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}{r} = \frac{r\cot\omega}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon + 1$$

e ponendo $\int\frac{d\sigma}{r} = k$, cioè chiamando k il complesso degli angoli di torsione della trajettoria, avremo:

$$12)\qquad \frac{d\varepsilon}{dk} = \frac{r\cot\omega}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon + 1\,;$$

nella quale r, ρ, ω, devono intendersi espressi per k; e corrispondentemente l'elemento lineare della sfera assumerà quest' altra forma:

$$13)\qquad ds'^2 = \left(\mathrm{sen}\,\omega\frac{d\varepsilon}{du}\right)^2 du^2 + \left(\frac{d\omega}{dk} + \frac{r\cos\varepsilon}{\rho}\right)^2 dk^2\,.$$

Osserverò ora che l' elemento lineare della sfera riferito ad un sistema di circonferenze minori e alle loro trajettorie ortogonali è stato dato anche dal prof. Dini nelle sue *Ricerche sopra la teorica delle superficie* (V. Vol. dell'Accademia de' XL, serie 3ª, tomo II, parte I), ma le quantità che in quello compariscono hanno significato geometrico diverso da quelle della formola 10).

Di più notiamo che le formule 10) e 11) valgono qualunque sia la trajettoria, piana o a doppia curvatura, e qualunque sia l'angolo ω.

4. Trovato in tal guisa l' elemento della sfera e determinato l' angolo ε, passiamo alla ricerca dell' elemento lineare della superficie delle sviluppoidi, prendendo in essa per linee coordinate le corrispondenti alle u e σ della sfera, vale a dire il sistema delle sviluppoidi e il sistema delle linee secondo le quali i coni retti formati dalle tangenti le sviluppoidi, che partono da un medesimo punto della trajettoria, toccano la superficie medesima.

Indichiamo con x, y, z le coordinate rettangole del punto (u, σ), e con t il raggio della sviluppoide che partendo da quel punto termina al corrispondente (a, b, c) della trajettoria; sarà:

$$14)\qquad x = a + t\mathrm{X}\,,\quad y = b + t\mathrm{Y}\,,\quad z = c + t\mathrm{Z}\,.$$

Chiamiamo ds l' elemento che si cerca, e poniamo:

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,d\sigma + \mathrm{G}\,d\sigma^2$$

essendo:

$$\mathrm{E} = \Sigma\left(\frac{dx}{du}\right)^2,\quad \mathrm{F} = \Sigma\frac{dx}{du}\frac{dx}{d\sigma},\quad \mathrm{G} = \Sigma\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2.$$

Derivando parzialmente le 14) prima rispetto ad u e poi rispetto a σ, si ottiene:

$$15)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = \mathrm{X}\dfrac{dt}{du} + t\dfrac{d\mathrm{X}}{du}\,, \\ \dfrac{dy}{du} = \mathrm{Y}\dfrac{dt}{du} + t\dfrac{d\mathrm{Y}}{du}\,, \\ \dfrac{d\mathrm{Z}}{du} = \mathrm{Z}\dfrac{dt}{du} + t\dfrac{d\mathrm{Z}}{du}\,: \end{cases}$$

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\sigma}=\dfrac{da}{d\sigma}+X\dfrac{dt}{d\sigma}+t\dfrac{dX}{d\sigma}, \\ \dfrac{dy}{d\sigma}=\dfrac{db}{d\sigma}+Y\dfrac{dt}{d\sigma}+t\dfrac{dY}{d\sigma}, \\ \dfrac{dz}{d\sigma}=\dfrac{dc}{d\sigma}+Z\dfrac{dt}{d\sigma}+t\dfrac{dZ}{d\sigma}. \end{cases}$$

Dalle 15), quadrando e sommando, ed avendo riguardo alle 8), si ha:

$$17)\qquad \Sigma\left(\frac{dx}{du}\right)^2=E=\left(\frac{dt}{du}\right)^2+t^2\operatorname{sen}^2\omega\left(\frac{d\varepsilon}{du}\right)^2.$$

Moltiplicando invece membro per membro le 15) e le 16), otteniamo:

$$F=\Sigma\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}=\frac{dt}{du}\Sigma X\frac{da}{d\sigma}+\frac{dt}{du}\frac{dt}{d\sigma}\Sigma X^2+t\Sigma\frac{da}{d\sigma}\frac{dX}{du}$$

ed, in forza delle 1) e delle 3), avendosi:

$$\Sigma X\frac{da}{d\sigma}=\Sigma X\cos\alpha=\cos\omega$$

$$\Sigma\frac{da}{d\sigma}\frac{dX}{du}=\Sigma\frac{dX}{du}\cos\alpha=0$$

sarà:

$$18)\qquad F=\frac{dt}{du}\left(\frac{dt}{d\sigma}+\cos\omega\right).$$

Infine, quadrando e sommando le 16), ne viene:

$$G=\Sigma\left(\frac{da}{d\sigma}\right)^2+\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2\Sigma X^2+t^2\Sigma\left(\frac{dX}{d\sigma}\right)^2+2\frac{dt}{d\sigma}\Sigma X\frac{da}{d\sigma}+2t\Sigma\frac{da}{d\sigma}\frac{dX}{d\sigma}$$

e questa, coll'aiuto specialmente della seconda delle 8) e delle 7), ci dà:

$$G=\left(\frac{dt}{d\sigma}+\cos\omega\right)^2+\left\{\operatorname{sen}\omega-t\left(\frac{d\omega}{d\sigma}+\frac{\cos\varepsilon}{\rho}\right)\right\}^2.$$

Ma, secondo le notazioni adottate in principio, deve aversi identicamente:

$$X=\frac{dx}{ds_u},\quad Y=\frac{dy}{ds_u},\quad Z=\frac{dz}{ds_u}$$

essendo $ds_u=\sqrt{G}\,d\sigma$ l'arco della sviluppoide u; perciò sarà:

$$\Sigma X\frac{ds_u}{dx}=1$$

e quindi:

$$\Sigma X\frac{dx}{d\sigma}=\sqrt{G}.$$

Ora, moltiplicando le 16) rispettivamente per Y, Y, Z, ricavasi:

$$\Sigma X\frac{dx}{d\sigma}=\frac{dt}{d\sigma}+\cos\omega,$$

talchè, in virtù della precedente, sarà:

$$19)\qquad G=\left(\frac{dt}{d\sigma}+\cos\omega\right)^2.$$

Vediamo da ciò che per il coefficiente G si hanno due espressioni, le quali affinchè coincidano fa d'uopo che si abbia:

$$\operatorname{sen}\omega - t\left(\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\cos\varepsilon}{\rho}\right) = 0\,,$$

donde si ricava:

$$t = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\dfrac{d\omega}{d\sigma} + \dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}} \tag{20)}$$

la quale ci dà il raggio della sviluppoide.

Questa formola abbastanza semplice è la conseguenza d'una proprietà geometrica che nel mio lavoro già citato (Cronaca del Liceo ecc. pag. 6) ho richiamato per dedurre l'espressione dell'arco della trajettoria in funzione degli elementi spettanti alla sviluppoide. Nel caso particolare di ω costante, essa trasformasi in quest'altra:

$$t = \frac{\rho \operatorname{sen}\omega}{\cos\varepsilon} \tag{20*)}$$

la quale è stata data dal prof. Brioschi nelle sue *Ricerche intorno le sviluppoidi e le sviluppate* (V. Annali di scienze fisiche e matematiche, anno 1853).

Raccogliendo ora le espressioni di E, F e G date dalle 17), 18), e 19) siamo in grado di scrivere l'elemento lineare della superficie delle sviluppoidi sotto la seguente forma:

$$ds^2 = \left\{\left(\frac{dt}{du}\right)^2 + \left(t \operatorname{sen}\omega \frac{d\varepsilon}{du}\right)^2\right\} du^2 + 2\frac{dt}{du}\left(\frac{dt}{d\sigma} + \cos\omega\right) du\, d\sigma + \left(\frac{dt}{d\sigma} + \cos\omega\right)^2 d\sigma^2 \tag{21)}$$

ove t è dato dalla 20) ed ε dalla 11).

Da ciò vediamo che le linee v e σ, cioè le sviluppoidi e le linee di contatto de' coni retti che ne inviluppano la superficie non sono ortogonali tra loro, se non nel caso particolare che la t sia funzione della sola σ; lo che potrebbe darsi, come si vede dalla 20), quando fosse $\dfrac{1}{\rho} = 0$, cioè nel caso che la trajettoria si riducesse ad una linea retta.

Si può però trovare facilmente il sistema delle trajettorie ortogonali alle sviluppoidi, cioè alle $u = \text{cost.}$

Poniamo infatti:

$$\frac{dt_1}{d\sigma} = \cos\omega\,, \tag{22)}$$

t_1 essendo funzione della sola σ, e facciamo:

$$t + t_1 = t_2\,; \tag{23)}$$

prendendo allora per parametro variabile t_2 in luogo di σ, troviamo che la 21) si trasforma subito in quest'altra:

$$ds^2 = \left(t \operatorname{sen}\omega \frac{d\varepsilon}{du}\right)^2 du^2 + dt_2^2 \tag{24)}$$

la quale ci offre una conferma del teorema dimostrato dal Beltrami, che qui trascrivo:

Qualunque sia la legge con cui varia da un punto all'altro l'angolo sotto cui le tangenti d'una sviluppoide sono segate dalla trajettoria, ciascuna sviluppoide è una linea geodetica della superficie luogo geometrico di tutte le sviluppoidi generate colla medesima legge.

5. Poniamo:

$$K = t \operatorname{sen} \omega \frac{d\varepsilon}{du}$$

e cerchiamo la curvatura geodetica delle linee t_2. Applicando i logaritmi e derivando rispetto a t_2, coll'aiuto della 23), si ottiene:

$$\frac{d\log K}{dt_2} = \frac{1}{t} - \left\{ \frac{1}{t} \frac{dt_1}{d\sigma} - \cot \omega \frac{d\omega}{d\sigma} - \frac{\frac{d^2\varepsilon}{du\,d\sigma}}{\frac{d\varepsilon}{du}} \right\} \frac{d\sigma}{dt_2};$$

ma in virtù della 11) si ha altresì:

$$\frac{d^2\varepsilon}{du\,d\sigma} = \frac{\cot \omega}{\rho} \cos \varepsilon \frac{d\varepsilon}{du};$$

per la quale la precedente, avuto anche riguardo alla 20), si trasforma facilmente in quest'altra:

$$\frac{d\log K}{dt_2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \frac{d\sigma}{dt_2} \left(\frac{dt_1}{d\sigma} - \cos \omega \right),$$

che, per la 22), si riduce alla seguente molto semplice:

$$25) \qquad \frac{d\log K}{dt_2} = \frac{1}{t}.$$

Si può dunque dire che: *nella superficie delle sviluppoidi, la curvatura geodetica delle trajettorie ortogonali alle sviluppoidi medesime è, in ogni punto, eguale all' inversa del raggio della sviluppoide corrispondente al punto che si considera.*

6. Moltiplicando le 14) rispettivamente per $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; poi per $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, e infine per $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ e ogni volta sommando, si ricavano, coll'aver riguardo alle 1), le seguenti equazioni:

$$26) \quad \begin{cases} (x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma = t\cos\omega \\ (x-a)\cos\xi + (y-b)\cos\eta + (z-c)\cos\zeta = t\cos\varepsilon \operatorname{sen}\omega \\ (x-a)\cos\lambda + (y-b)\cos\mu + (z-c)\cos\nu = t\operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}\omega . \end{cases}$$

Di esse, la seconda, nel caso di ω costante, si trasforma, in virtù della 20), in quest' altra:

$$27) \qquad (x-a)\cos\xi + (y-b)\cos\eta + (z-c)\cos\zeta = \rho \operatorname{sen}^2\omega;$$

la quale rappresenta l'equazione d'un piano ortogonale alla normale principale della trajettoria, e perciò parallelo alla tangente di questa, vale a dire all'asse del cono retto che inviluppa la superficie delle sviluppoidi.

Segue da ciò la proprietà che su questa superficie le linee σ, nel caso contemplato di ω costante, sono iperbole situate in piani paralleli a' piani *rettificanti* della trajettoria.

È facile però a vedersi che le linee σ sono piane anche quando ω è qualunque. Si moltiplichino infatti la prima e la seconda delle 26) respettivamente per sen V e cos V, essendo V un angolo da determinarsi, e si sommino membro con membro le equazioni risultanti, avremo:

$$(x-a)(\cos\alpha \operatorname{sen} V + \cos\xi \cos V) + (y-b)(\cos\beta \operatorname{sen} V + \cos\eta \cos V) +$$
$$+ (z-c)(\cos\gamma \operatorname{sen} V + \cos\zeta \cos V) = t\cos\omega \operatorname{sen} V + t\cos\varepsilon \operatorname{sen}\omega \cos V .$$

Ma dalla 20) si ha

$$t\cos\varepsilon = \rho \operatorname{sen}\omega - t\rho \frac{d\omega}{d\sigma};$$

per la quale eliminando ε dalla precedente, ne consegue

$$(x-a)(\cos\alpha \operatorname{sen} V + \cos\xi \cos V) + (y-b)(\cos\beta \operatorname{sen} V + \cos\eta \cos V) +$$
$$+ (z-c)(\cos\gamma \operatorname{sen} V + \cos\zeta \cos V) = \rho \operatorname{sen}^2\omega \cos V + t\left(\cos\omega \operatorname{sen} V - \rho \operatorname{sen}\omega \frac{d\omega}{d\sigma} \cos V\right).$$

Ora determinando V in modo che sparisca il termine contenente il raggio t, troviamo

$$\text{28)} \qquad \operatorname{tang} V = \rho \operatorname{tang}\omega \frac{d\omega}{d\sigma},$$

e la precedente assumerà quest'altra forma:

$$\text{29)} \quad (x-a)\left(\cos\alpha\rho \operatorname{tang}\omega \frac{d\omega}{d\sigma} + \cos\xi\right) + (y-b)\left(\cos\beta\rho \operatorname{tang}\omega \frac{d\omega}{d\sigma} + \cos\eta\right) +$$
$$+ (z-c)\left(\cos\gamma\rho \operatorname{tang}\omega \frac{d\omega}{d\sigma} + \cos\zeta\right) = \rho \operatorname{sen}^2\omega$$

la quale ci dice che lungo le linee σ le coordinate x, y, z soddisfano l'equazione d'un piano; le linee stesse son dunque piane: di più appartenendo ad un cono di rivoluzione sono curve di secondo grado.

Questo risultato è stato ottenuto dal Beltrami nel lavoro citato, e pel caso di ω costante anche dal Brioschi. La 27) si ottiene come caso particolare dalla 29).

L'angolo V è quello che la normale al piano 29), fa colla normale principale della trajettoria.

Indicando con A_1, A_2 A_3 gli angoli fatti cogli assi dalla stessa normale, i loro coseni son dati dalle seguenti espressioni:

$$\text{30)} \quad \begin{cases} \cos A_1 = \dfrac{\rho \operatorname{tang}\omega \frac{d\omega}{d\sigma} \cos\alpha + \cos\xi}{\sqrt{1 + \left(\rho \operatorname{tang}\omega \frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2}} \\[2ex] \cos A_2 = \dfrac{\rho \operatorname{tang}\omega \frac{d\omega}{d\sigma} \cos\beta + \cos\eta}{\sqrt{1 + \left(\rho \operatorname{tang}\omega \frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2}} \\[2ex] \cos A_3 = \dfrac{\rho \operatorname{tang}\omega \frac{d\omega}{d\sigma} \cos\gamma + \cos\zeta}{\sqrt{1 + \left(\rho \operatorname{tang}\omega \frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2}}. \end{cases}$$

7. Procediamo ora alla ricerca della curvatura e della torsione in un punto qualunque d'una sviluppoide. Consideriamo sempre su questa il punto (u, σ) corrispondente al punto (a, b, c) della trajettoria, indichiamone respettivamente con $\frac{1}{\rho_u}$ e $\frac{1}{r_u}$ la curvatura e la torsione, e denotiamo con $\alpha_u, \beta_u, \gamma_u$; ξ_u, η_u, ζ_u; λ_u, μ_u, ν_u

gli angoli fatti cogli assi dalla tangente, dalla normale e dalla binormale della sviluppoide nel punto stesso.

Supponendo nella 21) e nella 10), u costante, si ha per l'arco della sviluppoide l'espressione che segue:

$$31)\qquad ds_u = \left(\frac{dt}{d\sigma} + \cos\omega\right) d\sigma\,;$$

e per l'angolo di contingenza:

$$32)\qquad ds'_u = \left(\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\cos\varepsilon}{\rho}\right) d\sigma\,;$$

dividendo ora membro per membro, ne segue:

$$33)\qquad \frac{1}{\rho_u} = \frac{ds'_u}{ds_u} = \frac{\dfrac{d\omega}{d\sigma} + \dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}}{\dfrac{dt}{d\sigma} + \cos\omega}$$

che ci dà l'espressione della curvatura della sviluppoide, come si voleva.

Si ottiene la stessa formola anche calcolando direttamente l'espressione $\Sigma\left(\frac{d^2x}{ds_u^2}\right)^2$; ma vi abbisogna un calcolo molto lungo e laborioso.

Quanto alla torsione, la si può ricavare moltiplicando la curvatura geodetica delle linee u sulla sfera di raggio uno, per la curvatura 33) già determinata. Indicando con ds''_u l'angolo di contingenza geodetico delle u sulla sfera, che è poi anche l'angolo di torsione della sviluppoide, si ha infatti

$$34)\qquad \frac{ds''_u}{ds'_u} = -\frac{1}{\sqrt{E'G'}}\frac{d\sqrt{G'}}{du} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\rho\operatorname{sen}\omega}}{\dfrac{d\omega}{d\sigma} + \dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}},$$

la quale moltiplicata membro per membro colla 33), ci dà

$$35)\qquad \frac{1}{r_u} = \frac{ds''_u}{ds_u} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\rho\operatorname{sen}\omega}}{\dfrac{dt}{d\sigma} + \cos\omega}.$$

Queste formole le avevo già determinate per altra via nell' altro mio lavoro citato.

Mi piace ora di dare le espressioni degli angoli che la tangente, la normale principale e la binormale d'una sviluppoide fanno cogli assi.

I coseni degli angoli formati dalla tangente cogli assi ci sono dati dalle 1) stesse; talchè abbiamo

$$36)\qquad \begin{cases} \cos\alpha_u = \cos\omega\cos\alpha + \operatorname{sen}\omega\cos\varepsilon\cos\xi + \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varepsilon\cos\lambda \\ \cos\beta_u = \cos\omega\cos\beta + \operatorname{sen}\omega\cos\varepsilon\cos\eta + \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varepsilon\cos\mu \\ \cos\gamma_u = \cos\omega\cos\gamma + \operatorname{sen}\omega\cos\varepsilon\cos\zeta + \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varepsilon\cos\nu \end{cases}$$

I coseni della normale principale si ricavano dalle note formole di Serret, 4), per le quali si ha:

$$\frac{d\cos\alpha_u}{ds_u} = \frac{\cos\xi_u}{\rho_u};\quad \frac{d\cos\beta_u}{ds_u} = \frac{\cos\eta_u}{\rho_u};\quad \frac{d\cos\gamma_u}{ds_u} = \frac{\cos\zeta_u}{\rho_u}$$

da cui, in virtù delle 31), 33), 36), ricavasi

$$\cos\xi_u = \frac{\frac{dX}{d\sigma}}{\frac{d\omega}{d\sigma}+\frac{\cos\varepsilon}{\rho}}, \quad \cos\eta_u = \frac{\frac{dY}{d\sigma}}{\frac{d\omega}{d\sigma}+\frac{\cos\varepsilon}{\rho}}, \quad \cos\zeta_u = \frac{\frac{dZ}{d\sigma}}{\frac{d\omega}{d\sigma}+\frac{\cos\varepsilon}{\rho}};$$

epperò, ricordando le 7), avremo

$$37) \begin{cases} \cos\xi_u = -\operatorname{sen}\omega\cos\alpha + \cos\omega\cos\varepsilon\cos\xi + \cos\omega\operatorname{sen}\varepsilon\cos\lambda \\ \cos\eta_u = -\operatorname{sen}\omega\cos\beta + \cos\omega\cos\varepsilon\cos\eta + \cos\omega\operatorname{sen}\varepsilon\cos\mu \\ \cos\zeta_u = -\operatorname{sen}\omega\cos\gamma + \cos\omega\cos\varepsilon\cos\zeta + \cos\omega\operatorname{sen}\varepsilon\cos\nu. \end{cases}$$

Restano ora da calcolarsi gli angoli della binormale. In virtù delle stesse formole di Serret, abbiamo:

$$\frac{d\cos\xi_u}{ds_u} = -\frac{\cos\alpha_u}{\rho_u} - \frac{\cos\lambda_u}{r_u}$$
$$\frac{d\cos\eta_u}{ds_u} = -\frac{\cos\beta_u}{\rho_u} - \frac{\cos\mu_u}{r_u}$$
$$\frac{d\cos\zeta_u}{ds_u} = -\frac{\cos\gamma_u}{r_u} - \frac{\cos\nu_u}{r_u}$$

d'onde si ottiene

$$\cos\lambda_u = -\frac{r_u}{\rho_u}\cos\alpha_u - r_u\frac{d\cos\xi_u}{ds_u};$$
$$\cos\mu_u = -\frac{r_u}{\rho_u}\cos\beta_u - r_u\frac{d\cos\eta_u}{ds_u};$$
$$\cos\nu_u = -\frac{r_u}{\rho_u}\cos\gamma_u - r_u\frac{d\cos\zeta_u}{ds_u};$$

le quali, per mezzo de'valori già trovati 21) e 37), si trasformano come segue:

$$38) \begin{cases} \cos\lambda_u = \operatorname{sen}\varepsilon\cos\xi - \cos\varepsilon\cos\lambda \\ \cos\mu_u = \operatorname{sen}\varepsilon\cos\eta - \cos\varepsilon\cos\mu \\ \cos\nu_u = \operatorname{sen}\varepsilon\cos\zeta - \cos\varepsilon\cos\nu. \end{cases}$$

Si moltiplichino ora le 36), 37), 38) per $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; poi per $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, e infine per $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$; ne seguirà

$$39) \begin{array}{lll} \Sigma\cos\alpha\cos\alpha_u = \cos\omega; & \Sigma\cos\alpha\cos\xi_u = -\operatorname{sen}\omega; & \Sigma\cos\alpha\cos\lambda_u = 0 \\ \Sigma\cos\xi\cos\alpha_u = \operatorname{sen}\omega\cos\varepsilon; & \Sigma\cos\xi\cos\xi_u = \cos\omega\cos\varepsilon; & \Sigma\cos\xi\cos\lambda_u = \operatorname{sen}\varepsilon \\ \Sigma\cos\lambda\cos\alpha_u = \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varepsilon; & \Sigma\cos\lambda\cos\xi_u = \cos\omega\operatorname{sen}\varepsilon; & \Sigma\cos\lambda\cos\lambda_u = -\cos\varepsilon \end{array}$$

Dall'ultima di queste equazioni si vede che l'angolo ε è il supplementare di quello che i piani osculatori della trajettoria e della sviluppoide fanno tra loro ne'punti corrispondenti; le altre stabiliscono delle relazioni tra gli angoli che le sei rette: tangente, normale principale e binormale della trajettoria, e: tangente, normale principale e binormale della sviluppoide fanno, due a due, tra loro.

8. Le 37) rappresentano altresì i coseni che le normali alla superficie delle sviluppoidi fanno cogli assi.

Esse offrono il mezzo di trovare l'angolo che i piani delle linee σ, fanno colla superficie. Infatti, moltiplicate che siano colla 30) membro per membro, si ha

$$40)\qquad \Sigma \cos A_1 \cos \xi_u = \frac{-\rho \operatorname{sen}^2 \omega \frac{d\omega}{d\sigma} + \cos^2 \omega \cos \varepsilon}{\cos \sqrt{1+\left(\rho \operatorname{tang} \omega \frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2}} .$$

9. Se si indica con Ω l' angolo che le linee σ fanno colle linee u, abbiamo, come' è noto:

$$\cos \Omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\frac{dt}{d\omega}}{\sqrt{\left(\frac{dt}{du}\right)^2 + \left(t \operatorname{sen} \omega \frac{d\varepsilon}{d\omega}\right)^2}}$$

oppure

$$\operatorname{cotang} \Omega = \frac{\frac{dt}{d\omega}}{t \operatorname{sen} \omega \frac{d\varepsilon}{du}} ;$$

e, per la 20), ne segue:

$$\cot \Omega = \frac{\frac{\rho \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \varepsilon}}{\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\cos \varepsilon}{\rho}} ;$$

da cui si vede che l'angolo Ω coincide con quello che la retta rettificante della sviluppoide fa colla corrispondente tangente, o in altri termini che i piani tangenti la superficie delle sviluppoidi lungo i punti di ciascuna di esse s'intersecano successivamente secondo le tangenti alle linee σ; vale a dire le linee σ e le sviluppoidi sono linee a tangenti coniugate.

10. In ciò che precede sono esposte le proprietà generali della superficie luogo delle sviluppoidi. Ora mi piace di dimostrare alcune proprietà d' un' altra superficie, di quella cioè che ha per normali le tangenti ad una medesima famiglia di sviluppoidi.

Indicando con x_1, y_1, z_1, le coordinate dei punti di questa nuova superficie, che chiamerò S, le sue equazioni saranno:

$$x_1 = x - (t+R)X ; \quad y_1 = y - (t+R)Y ; \quad z_1 = z - (t+R)Z$$

dove t rappresenta sempre il raggio delle sviluppoidi, ed R è una quantità da determinarsi.

Osservando intanto che per le 14) abbiamo

$$x - tX = a , \quad y - tY = b , \quad z - tZ = c ,$$

le precedenti si cambiano nelle altre:

$$42)\qquad x_1 = a - RX , \quad y_1 = b - RY , \quad z_1 = c - RZ .$$

Da queste, derivando prima rispetto ad u poi rispetto a σ, ricavasi:

$$43)\qquad \begin{cases} \frac{dx_1}{du} = -R \frac{dX}{du} - X \frac{dR}{du} \\ \frac{dy_1}{du} = -R \frac{dY}{du} - Y \frac{dR}{du} \\ \frac{dz_1}{d\sigma} = -R \frac{dZ}{du} - Z \frac{dR}{du} ; \end{cases}$$

$$44)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\sigma}=\dfrac{da}{d\sigma}-\mathrm{R}\dfrac{d\mathrm{X}}{d\sigma}-\mathrm{X}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\sigma} \\ \dfrac{dy_1}{d\sigma}=\dfrac{db}{d\sigma}-\mathrm{R}\dfrac{d\mathrm{Y}}{d\sigma}-\mathrm{Y}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\sigma} \\ \dfrac{dz_1}{d\sigma}=\dfrac{dc}{d\sigma}-\mathrm{R}\dfrac{d\mathrm{Z}}{d\sigma}-\mathrm{Z}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\sigma} \end{cases}$$

delle quali le prime tre moltiplicate respettivamente per X, Y, Z danno:

$$\Sigma\mathrm{X}\frac{dx_1}{du}=-\frac{d\mathrm{R}}{du};$$

e le altre, egualmente moltiplicate per X, Y Z, danno pure:

$$\Sigma\mathrm{X}\frac{dx_1}{d\sigma}=\cos\omega-\frac{d\mathrm{R}}{d\sigma}.$$

Ma se le x_1, y_1, z_1, devon essere le coordinate de'punti della superficie ortogonale alle tangenti le sviluppoidi, vuol dire che deve aversi

$$\Sigma\mathrm{X}\frac{dx_1}{du}=0\,;\quad \Sigma\mathrm{X}\frac{dx_1}{d\sigma}=0$$

e quindi le precedenti si cangeranno in quest'altre

$$45)\qquad \frac{d\mathrm{R}}{du}=0$$

$$46)\qquad \frac{d\mathrm{R}}{d\sigma}-\cos\omega=0\,;$$

la prima delle quali ci dice che la quantità R è funzione soltanto di σ, e la seconda serve, all'infuori d'una costante, a determinarla.

Confrontando la 46) colla 22), si vede che la R non differisce dalla quantità che in quest'ultima formola abbiamo indicato con t_1.

Le 42) danno poi facilmente la seguente equazione:

$$47)\qquad (x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2=\mathrm{R}^2$$

che appartiene ad una sfera di raggio R.

Si vede da ciò che le coordinate de'punti della superficie S in discorso soddisfano lungo le linee σ all'equazione della sfera 47). Essa può dunque riguardarsi come l'inviluppo della stessa sfera moventesi col centro sulla trajettoria ed avente il raggio determinato dall'equazione 46). Le linee σ sono per conseguenza de'cerchi situati in piani perpendicolari alle tangenti della trajettoria, come si rileva dall'equazione seguente:

$$48)\qquad (x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\gamma=\mathrm{R}\cos\omega$$

la quale deriva dalle 42), moltiplicando queste per $\cos\alpha$; $\cos\beta$, $\cos\gamma$ e sommando.

Si può vedere di più che sulla superficie S le linee u e σ che corrispondono alle sviluppoidi e alle linee di contatto de'coni retti che hanno il vertice sulla trajettoria, sono ortogonali tra loro. Difatti le linee σ sono le intersezioni prodotte nella superficie dagli stessi coni, e le u son quelle prodotte dalle superficie sviluppabili aventi per spigoli di regresso le sviluppoidi. Ora queste due serie di superficie sviluppabili hanno le generatrici comuni (le normali della superficie S) e si tagliano lungo le medesime ortogonalmente tra loro. Se ne conclude che sulla S le linee u e σ, non solo sono ortogonali, ma ne costituiscono altresì i due sistemi di linee di

curvatura. Si deve inoltre notare che i circoli σ tagliano la superficie secondo l'angolo ω.

11. Reciprocamente, si supponga una superficie che abbia un sistema di linee di curvatura circolari: essa, com'è noto, può riguardarsi come l'inviluppo d'una sfera mobile col centro sopra una determinata linea. Se si considerano le normali di questa superficie nei punti delle linee di curvatura circolari vediamo ch'esse formano de'coni retti, i quali inviluppano la superficie evoluta, luogo geometrico de'centri di curvatura principale relativi all'altro sistema di linee di curvatura.

Ebbene io dico che gli assi di questi coni sono le tangenti della linea luogo dei loro vertici, che è pure il luogo de'centri delle sfere inviluppanti la superficie data.

Invero, quando v è il parametro d'un sistema di linee di curvatura sopra una superficie qualsivoglia, ed r_2 è il raggio principale corrispondente, l'elemento lineare della superficie evoluta allorchè in essa si prendono per linee coordinate le corrispondenti delle linee di curvatura della superficie evolvente, è

$$d\sigma^2 = \left(\frac{dr_2}{du}\right)^2 du^2 + 2\,\frac{dr_2}{du}\,\frac{dr_2}{dv}\,du\,dv + \left\{ G'(r_1 - r_2)^2 + \left(\frac{dr_2}{dv}\right)^2 \right\} dv^2,$$

come già trovai nella mia tesi, presentata alla Scuola Normale Superiore di Pisa per l'esame d'abilitazione all'insegnamento (V. Annali della r. Scuola Normale Superiore di Pisa, anno 1878); nella qual formola u rappresenta il parametro del secondo sistema di linee di curvatura, G' è il coefficiente del dv^2 nell'elemento lineare della sfera sulla quale si fa la rappresentazione della superficie evolvente col metodo di Gauss, ed r_1 infine è l'altro raggio di curvatura principale.

Supponiamo ora che r_2 sia funzione della sola v, cioè che la superficie che si considera sia l'inviluppo d'una sfera mobile, e poniamo $r_2 = R$, allora la formola soprascritta si cambierà come segue

$$d\sigma^2 = \left\{ G'(R - r_1)^2 + \left(\frac{dR}{dv}\right)^2 \right\} dv^2,$$

la quale rappresenta l'arco elementare della linea luogo de'centri delle sfere inviluppanti la superficie considerata. Se poi per parametro v pigliamo l'arco stesso di questa linea, si avrà

$$\sqrt{1 - (G'R - r_1)^2} = \frac{dR}{d\sigma}.$$

Ora sia ω l'angolo secondo cui i piani σ tagliano la superficie, la curvatura geodetica de'cerchi σ sulla sfera sarà eguale a $\cot\omega$ (V. il mio lavoro negli Annali della r. Scuola Normale Superiore di Pisa, sopra citato); e per le formole del Dini (V. Memoria, *Sopra alcuni punti della Teoria delle superficie*, pag. 39, inserita negli Atti dell'Accademia de'XL, serie 3ª, tomo I, parte II) avremo

$$\cot\omega = \frac{d\log\sqrt{E'}}{\sqrt{G'}\,d\sigma} = \frac{\dfrac{dR}{d\sigma}}{\sqrt{G'}(r_1 - R)},$$

da questa e dalla precedente, si ricava

$$\frac{dR}{d\sigma} = \cos\omega$$

la quale stabilisce una relazione necessaria tra il raggio R della sfera mobile, l'arco σ della linea su cui la sfera stessa si muove, e l'angolo ω che i piani de' cerchi σ fanno colla superficie.

Dalle 14) abbiamo (¹)

$$a = x_1 + \mathrm{RX}\,, \quad b = y_1 + \mathrm{RY}\,, \quad c = z_1 + \mathrm{RZ}$$

epperò, derivando rispetto a σ,

$$\frac{da}{d\sigma} = \frac{dx_1}{d\sigma} + \mathrm{R}\frac{d\mathrm{X}}{d\sigma} + \mathrm{X}\frac{d\mathrm{R}}{d\sigma}$$

$$\frac{db}{d\sigma} = \frac{dy_1}{d\sigma} + \mathrm{R}\frac{d\mathrm{Y}}{d\sigma} + \mathrm{Y}\frac{d\mathrm{R}}{d\sigma}$$

$$\frac{dc}{d\sigma} = \frac{dz_1}{d\sigma} + \mathrm{R}\frac{d\mathrm{Z}}{d\sigma} + \mathrm{Z}\frac{d\mathrm{R}}{d\sigma};$$

le quali moltiplicate respettivamente per x, y, z e sommate, ci danno

$$\Sigma \mathrm{X}\frac{da}{d\sigma} = \frac{d\mathrm{R}}{d\sigma} = \cos\omega$$

e questa dimostra appunto la verità di ciò che abbiamo asserito in principio.

Si può ora enunciare il teorema:

Le sviluppoidi d'una linea data qualsivoglia sono l'evolute delle linee di curvatura non circolari nella superficie inviluppo di una sfera mobile col centro nella linea data ed avente il raggio determinato dalla 46), *e reciprocamente.*

12. Troviamo adesso l'elemento lineare della superficie evolvente di quella delle sviluppoidi. In essa, secondo ciò che nel numero precedente abbiamo dimostrato, i parametri u e σ individuando le linee di curvatura, l'elemento lineare dS riferito a queste linee mancherà del rettangolo delle variabili; e perciò avremo:

$$d\mathrm{S}^2 = \mathrm{E}_1\, du^2 + \mathrm{G}_1\, d\sigma^2$$

essendo

$$\mathrm{E}_1 = \Sigma\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2; \quad \mathrm{G}_1 = \Sigma\left(\frac{dx_1}{d\sigma}\right)^2.$$

Le 43) e 44), se si tien conto delle 45) e 46), si trasformano in quest'altre:

$$\frac{dx_1}{du} = -\mathrm{R}\frac{d\mathrm{X}}{du},$$

$$\frac{dy_1}{du} = -\mathrm{R}\frac{d\mathrm{Y}}{du},$$

$$\frac{dz_1}{du} = -\mathrm{R}\frac{d\mathrm{Z}}{du};$$

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = \frac{da}{d\sigma} - \mathrm{R}\frac{d\mathrm{X}}{d\sigma} - \mathrm{X}\cos\omega,$$

$$\frac{dy_1}{d\sigma} = \frac{db}{d\sigma} - \mathrm{R}\frac{d\mathrm{Y}}{d\sigma} - \mathrm{Y}\cos\omega,$$

$$\frac{dz_1}{d\sigma} = \frac{dc}{d\sigma} - \mathrm{R}\frac{d\mathrm{Z}}{d\sigma} - \mathrm{Z}\cos\omega;$$

(¹) Si noti qui che le lettere a, b, v, x, y, z, ecc. hanno lo stesso significato attribuito loro nella dimostrazione della proposizione diretta.

e da esse, quadrando e sommando le prime tre e poi le altre, si ottiene

$$49)\quad \begin{cases} E_1 = \left(R \operatorname{sen}\omega \dfrac{d\varepsilon}{du}\right)^2 \\ G_1 = \left\{\operatorname{sen}\omega + R\left(\dfrac{d\omega}{d\sigma} + \dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}\right)\right\}^2; \end{cases}$$

per le quali l'elemento lineare cercato ha la seguente forma:

$$50)\qquad dS^2 = \left(R \operatorname{sen}\omega \frac{d\varepsilon}{du}\right)^2 du^2 + \left\{\operatorname{sen}\omega + R\left(\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\cos\varepsilon}{\rho}\right)\right\} d\sigma^2$$

Confrontando quest'elemento con quello della sfera di raggio uno, 10), ove i punti della superficie evolvente vi sono rappresentati col metodo di Gauss, troviamo:

$$\frac{E_1}{E'} = R^2; \quad \frac{G_1}{G'} = \left(R + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\dfrac{d\omega}{d\sigma} + \dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}}\right)^2 = (R + t)^2$$

donde si vede che questi rapporti coincidono colle quantità, da noi indicate al n. 4 con t_1 e t_2. Se ricordiamo poi che gli stessi rapporti non sono altro che i quadrati de' raggi di curvatura principale (Dini, Mem. *Sopra alcuni punti* ecc., pag. 24), le quantità t_1 e t_2 rappresenteranno per noi i raggi di curvatura principali della superficie evolvente; e si avrà:

$$51)\qquad t_1 = R = \int \cos\omega \, d\sigma$$

$$52)\qquad t_2 = R + t = R + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\dfrac{d\omega}{d\sigma} + \dfrac{\cos\varepsilon}{\rho}}.$$

Così, non appena sia conosciuto ε per mezzo dell'equazione 11), le coordinate della superficie evolvente ci saranno note, e ci saranno noti pure i coseni delle sue normali cogli assi e i raggi di curvatura principali.

II.

13. Volgiamo ora la nostra attenzione allo studio dell' equazione 11), che integreremo in alcuni casi speciali, e di cui poi daremo l'integrale generale in funzione d'uno particolare.

Si supponga dapprima $\omega = \frac{\pi}{2}$; allora le sviluppoidi si cangiano nelle ordinarie sviluppate, e la superficie luogo delle medesime non è altro che la sviluppabile polare della trajettoria. Dalla 46) si rileva $\frac{dR}{d\sigma} = 0$; e perciò $R = m$, essendo m una costante.

Dalla 12) invece abbiamo:

$$\frac{d\varepsilon}{dk} = 1$$

donde

$$\varepsilon = k + u;$$

epperò

$$\cos\varepsilon = \cos(k + u), \quad \operatorname{sen}\varepsilon = \operatorname{sen}(k + u), \quad \frac{d\varepsilon}{du} = 1.$$

Questi valori sostituiti nelle 1) e 20), danno

$$53)\quad \begin{cases} X = \cos(k+u)\cos\xi + \text{sen}\,(k+u)\cos\lambda \\ Y = \cos(k+u)\cos\eta + \text{sen}\,(k+u)\cos\mu \\ Z = \cos(k+u)\cos\zeta + \text{sen}\,(k+u)\cos\nu \end{cases}$$

$$54)\qquad t = \frac{\rho}{\cos(k+u)},$$

e per mezzo di queste, sostituite alla lor volta nelle 14) e 24) abbiamo:

$$55)\quad \begin{cases} x = a + \rho\left(\cos\xi + \text{tang}\,(k+u)\cos\lambda\right) \\ y = b + \rho\left(\cos\eta + \text{tang}\,(k+u)\cos\mu\right) \\ z = c + \rho\left(\cos\zeta + \text{tang}\,(k+u)\cos\nu\right) \end{cases}$$

$$56)\qquad ds^2 = (t_2 - m)^2 du^2 + dt_2^2.$$

E si ha così nella 54) la nota formola di Molins, nella 55) le coordinate de' punti della superficie sviluppabile polare della trajettoria, e quando vi si consideri u costante quelle de' punti delle sviluppate, ed infine nella 56) l'elemento della superficie polare medesima, dove le linee t_2, cioè le trajettorie ortagonali delle sviluppate sono linee a curvatura geodetica costante, come si deduce dalla 25).

Abbiamo già osservato che l'ipotesi di $\omega = \frac{\pi}{2}$ porta con sè che R sia costante; ciò ne viene che la superficie evolvente, di cui abbiamo tenuto parola nel precedente numero, è in questo caso una superficie canale. Di essa possiamo subito scrivere le equazioni, ponendo nelle 42) m in luogo di R, e in luogo di X, Y, Z i valori trovati 53); avremo:

$$57)\quad \begin{cases} x = a - m\left\{\cos(k+u)\cos\xi + \text{sen}\,(k+u)\cos\lambda\right\} \\ y = b - m\left\{\cos(k+u)\cos\eta + \text{sen}\,(k+u)\cos\mu\right\} \\ z = c - m\left\{\cos(k+u)\cos\zeta + \text{sen}\,(k+u)\cos\nu\right\} \end{cases}$$

Se ne vogliamo anche l'elemento lineare, basterà sostituire nella 50) per R, $\frac{d\varepsilon}{du}$ e $\cos\varepsilon$ i valori sopra trovati; sarà allora

$$58)\qquad dS^2 = m^2 du^2 + \left\{1 + \frac{m}{\rho}\cos(k+u)\right\}^2 r^2 dk^2.$$

Pei raggi di curvatura principale poi avremo le due formole che seguono:

$$59)\quad \begin{cases} t_1 = m \\ t_2 = m + \dfrac{\rho}{\cos(k+u)}. \end{cases}$$

Dalla 58) si vede che quando ρ ed r sono costanti, vale a dire la trajettoria è un' elica circolare, *la superficie canale corrispondente è applicabile sopra una superficie di rivoluzione.* Questa proprietà è stata indicata ancora dall'egregio mio amico prof. Luigi Bianchi in un estratto della sua dissertazione di Laurea (Pisa, tipografia Nistri, 1878).

Dalla seconda delle 59) si deduce inoltre che, nello stesso caso che la trajettoria sia un'elica circolare, lungo le linee $k+u=\cos t.$, è costante pure l'altro raggio di curvatura principale, e perciò è costante anco la curvatura della superficie.

14. Veniamo ora ad esaminare il caso che la trajettoria sia una linea piana. Esprimendo allora nella 11) che la torsione della trajettoria è nulla, si avrà l'equazione

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma}=\frac{\cot\omega}{\rho}\operatorname{sen}\varepsilon, \tag{62}$$

nella quale è facile separare le variabili. Abbiamo infatti

$$\frac{d\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon}=\frac{\cot\omega}{\rho}\,d\sigma:$$

ed integrando

$$\log\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}-\log U=\int\frac{\cot\omega}{\rho}\,d\sigma,$$

ove U è una funzione della sola u.

Di qui segue

$$\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}=Ue^{\int\frac{\cot\omega}{\rho}d\sigma}, \tag{63}$$

che è appunto l'equazione integrale della 62).

Pongasi per brevità

$$\int\frac{\cot\omega}{\rho}\,d\sigma=q \tag{64}$$

allora dalla 63) ricaveremo:

$$\left\{\begin{aligned}\cos\varepsilon&=\frac{1-U^2e^{2q}}{1+U^2e^{2q}}\\ \operatorname{sen}\varepsilon&=\frac{2Ue^q}{1+U^2e^{2q}}\\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial u}&=\frac{2U'e^q}{1+U^2e^{2q}}\,.\end{aligned}\right. \tag{65}$$

Supponiamo ora che gli assi coordinati siano scelti in modo che l'asse delle z sia perpendicolare al piano della trajettoria; si avrà allora

$$\cos\lambda=\cos\mu=\cos\gamma=\cos\zeta=0$$
$$\cos\nu=1,\ \cos\beta=\operatorname{sen}\alpha,\ \cos\xi=-\operatorname{sen}\alpha,\ \cos\eta=\cos\alpha.$$

Per questi valori e per quelli dati dalle 65), sostituiti nelle 1), otterremo:

$$\left\{\begin{aligned}X&=\frac{(U^2e^{2q}+1)\cos\omega\cos\alpha+(U^2e^{2q}-1)\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha}{U^2e^{2q}+1}\\ Y&=\frac{(U^2e^{2q}+1)\cos\omega\operatorname{sen}\alpha-(U^2e^{2q}-1)\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha}{U^2e^{2q}+1}\\ Z&=\frac{2Ue^q\operatorname{sen}\omega}{U^2e^{2q}+1}\,.\end{aligned}\right. \tag{66}$$

Son queste le coordinate rettangole de' punti della sfera di raggio uno, quando in essa le coordinate curvilinee sono ortogonali ed un sistema è formato dalle circonferenze minori che hanno il centro sopra una circonferenza massima e per raggio sferico ω.

Si ha inoltre, dalla 20), per il raggio delle sviluppoidi

$$67)\qquad t=\frac{(U^2e^{2q}+1)\operatorname{sen}\omega}{(U^2e^{2q}+1)\frac{d\omega}{d\sigma}-(U^2e^{2q}-1)\frac{1}{\rho}}.$$

I valori 66) e 67) ora trovati si sostituiscano nella 14); ed avremo subito, pel caso che consideriamo, le equazioni della superficie delle sviluppoidi date nella forma seguente:

$$68)\quad\left\{\begin{aligned}
x&=a+\operatorname{sen}\omega\,\frac{(U^2e^{2q}+1)\cos\omega\cos\alpha+(U^2e^{2q}-1)\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha}{(U^2e^{2q}+1)\frac{d\omega}{d\sigma}-(U^2e^{2q}-1)\frac{1}{\rho}}\\
y&=b+\operatorname{sen}\omega\,\frac{(U^2e^{2q}+1)\cos\omega\operatorname{sen}\alpha-(U^2e^{2q}-1)\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha}{(U^2e^{2q}+1)\frac{d\omega}{d\sigma}-(U^2e^{2q}-1)\frac{1}{\rho}}\\
z&=\frac{2U^2e^{q}\operatorname{sen}^2\omega}{(U^2e^{2q}+1)\frac{d\omega}{d\sigma}-(U^2e^{2q}-1)\frac{1}{\rho}}.
\end{aligned}\right.$$

Nella stessa guisa, sostituendo i valori 66) nelle 42) si avranno le equazioni della superficie evolvente, cioè:

$$69)\quad\left\{\begin{aligned}
x_1&=a-R\,\frac{(U^2e^{2q}+1)\cos\omega\cos\alpha+(U^2e^{2q}-1)\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha}{U^1e^{2q}+1}\\
y_1&=b-R\,\frac{(U^2e^{2q}+1)\cos\omega\operatorname{sen}\alpha-(U^2e^{2q}-1)\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha}{U^2e^{2q}+1}\\
z_1&=-R\,\frac{2Ue^{q}\operatorname{sen}\omega}{U^2e^{2q}+1}.
\end{aligned}\right.$$

Le 68) non differiscono in sostanza da quelle date dal prof. Beltrami nella Memoria citata. Dalle medesime si vede come il problema della ricerca delle sviluppoidi d'una curva piana dipende da una sola quadratura: la quantità q infatti ci vien data dall'integrale 64), ove ω e ρ sono funzioni soltanto di σ.

Nel medesimo modo le superficie inviluppo di sfere mobili col centro in una linea piana e il cui raggio è funzione d'una sola variabile dipendono da una sola quadratura. Esse son date dalle 69), ed hanno i raggi di curvatura principali così espressi

$$70)\quad\left\{\begin{aligned}
t_2&=R=\int\cos\omega\,d\sigma\\
t_2&=\int\cos\omega+\frac{(U^2e^{2q}+1)\operatorname{sen}\omega}{(U^2e^{2q}+1)\frac{d\omega}{d\sigma}(U^2e^{2q}-1)\frac{1}{\rho}}
\end{aligned}\right.$$

ove ω è l'angolo che i piani de' cerchi σ fanno colla superficie.

15. Per studiare le superficie 69), e poi anche le 68), si potrebbe, dato il raggio della sfera in funzione dell'arco della trajettoria, determinare ω; oppure, dato ω, determinare R per mezzo della prima dell'equazioni 70). Così se la trajettoria fosse una curva piana del secondo ordine data dall'equazione

$$\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}=1,$$

scegliendo ω per modo che si avesse

$$\cos\omega = \frac{\sqrt{m^2+n^2 \pm p^2 - a^2 - b^2}}{\sqrt{m^2+n^2-a^2-b^2}},$$

dopo ciò che è stato dimostrato dal prof. Beltrami (Mem. cit.), si potrebbero subito trovare le superficie inviluppo di sfere mobili col centro nella conica data, ed aventi per superficie evoluta la superficie di 2° ordine espressa dall'equazione

$$\frac{x^2}{m^2 \pm p^2} + \frac{y^2}{n^2 \pm p^2} \pm \frac{z^2}{p^2} = 1.$$

Per dare un esempio di ciò, cercherò quelle tra queste superficie che sono l'inviluppo d'una sfera moventesi col centro in una circonferenza, e nelle quali i piani del sistema di cerchi fanno un angolo costante colla superficie medesima. Vedremo dopo che queste superficie hanno per evoluta un iperboloide di rotazione.

Sia: $$a^2+b^2=\rho^2$$
l'equazione della circonferenza, su cui si muove la sfera. Si ponga

$$a = \rho\cos v, \qquad b = \rho \operatorname{sen} v;$$

poichè ω è costante, sarà

$$q = \cot\omega \frac{\sigma}{\rho} = v\cot\omega;$$

e così pure avremo:

$$R = \rho v \cos\omega, \quad \cos\alpha = -\operatorname{sen} v, \quad \operatorname{sen}\alpha = \cos v.$$

Sostituendo questi valori nelle 66) e 67), e facendovi $U = \cot U_1$; esse possono scriversi come segue:

$$X = \frac{\left(\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} - \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-v\cot\omega}\right)\operatorname{sen}\omega\cos v - \left(\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} + \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-v\cot\omega}\right)\cos\omega\operatorname{sen} v}{\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} + \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-v\cot\omega}}$$

$$Y = \frac{\left(\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} - \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-v\cot\omega}\right)\operatorname{sen}\omega\cos v + \left(\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} + \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-v\cot\omega}\right)\cos\omega\cos v}{\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} + \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-v\cot\omega}}$$

$$Z = \frac{\operatorname{sen} 2U_1 \operatorname{sen}\omega}{\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} + \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-v\cot\omega}}$$

$$t = -\rho\operatorname{sen}\omega \frac{\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} + \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-a\cot\omega}}{\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} - \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-v\cot\omega}}.$$

Per le quali le equazioni delle superficie cercate sono:

$$x_1 = \rho\left(\cos v - v\cos\omega \frac{\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega}\operatorname{sen}(\omega - v) - \operatorname{sen}^2 U_1 \operatorname{sen}(\omega+v) e^{-v\cot\omega}}{\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} + \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-v\cot\omega}}\right)$$

$$y_1 = \rho\left(\operatorname{sen} v - v\cos\omega \frac{\cos^2 U_1 \cos(\omega - v) e^{v\cot\omega} + \operatorname{sen}^2 U_1 \cos(\omega+v) e^{-v\cot\omega}}{\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} + \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-v\cot\omega}}\right)$$

$$z_1 = -\rho \frac{v\operatorname{sen} 2U_1 \operatorname{sen}\omega\cos\omega}{\cos^2 U_1 e^{v\cot\omega} + \operatorname{sen}^2 U_1 e^{-v\cot\omega}}.$$

Si trova pure per la superficie evoluta le equazioni che seguono:

$$x = \rho\left(\cos v - \operatorname{sen}\omega\frac{\cos^2 U_1 \operatorname{sen}(\omega - v)\, e^{v\cot\omega} - \operatorname{sen}^2 U_1 \operatorname{sen}(\omega + v)\, e^{-v\cot\omega}}{\cos^2 U_1\, e^{v\cot\omega} - \operatorname{sen}^2 U_1\, e^{-v\cot\omega}}\right)$$

$$y = \rho\left(\operatorname{sen} v - \operatorname{sen}\omega\frac{\cos^2 U_1 \cos(\omega - v)\, e^{v\cot\omega} + \operatorname{sen}^2 U_1 \cos(\omega + v)\, e^{-v\cot\omega}}{\cos^2 U_1\, e^{v\cot\omega} - \operatorname{sen}^2 U_1\, e^{-v\cot\omega}}\right)$$

$$z = -\rho\frac{\operatorname{sen}^2 2U_1 \operatorname{sen}^2\omega}{\cos^2 U_1\, e^{v\cot\omega} - \operatorname{sen}^2 U_1\, e^{-v\cot\omega}}$$

da cui eliminando U_1 e v, si ottiene

$$\frac{x^2 + y^2}{(\rho\cos\omega)^2} - \frac{z^2}{(\rho\operatorname{sen}\omega)^2} = 1$$

che è appunto l'equazione d'un iperboloide di rotazione.

Si può dunque dire che: *se una sfera si muove col centro sopra una circonferenza ed il suo raggio varia proporzionalmente all'arco di questa, inviluppa una superficie nella quale i piani del sistema di linee di curvatura circolari tagliano la superficie tutti sotto lo stesso angolo, e i centri di curvatura principale relativi all'altro sistema di linee di curvatura sono in un iperboloide di rotazione, nel quale al sistema di cerchi corrisponde un sistema di iperbole, e all'altre linee di curvatura un sistema di geodètiche, che sono le sviluppoidi ordinarie della circonferenza direttrice.*

16. Le superficie 69) hanno, come abbiamo veduto un sistema di linee di curvatura circolari. Ora una linea di curvatura circolare ha sempre la curvatura geodetica costante; ne segue che le superficie sopra menzionate hanno un sistema di linee di curvatura a curvatura geodetica costante, o, secondo la denominazione di Hamilton, didonie. Cerchiamo fra le medesime quelle nelle quali anche il secondo sistema di linee di curvatura è formato di linee didonie.

La curvatura geodetica delle linee u, nelle superficie 69, ha la seguente espressione

$$\frac{1}{g_u} = -\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}\omega\left\{\rho\left(R\frac{d\omega}{d\sigma} + \operatorname{sen}\omega\right) + R\cos\varepsilon\right\}} =$$

$$= -\frac{2U e^q}{\operatorname{sen}\omega\left\{\rho\left(R\frac{d\omega}{d\sigma} + \operatorname{sea}\omega\right)(1 + U^2 e^{2q}) + R(1 - U^2 e^{2q})\right\}}.$$

Se vi poniamo la condizione che essa sia costante lungo le stesse u, o, in altri termini essa sia funzione della sola u, vuol dire che la sua derivata rispetto all'altro parametro σ dovrà annullarsi, e perciò dovremo avere

$$2U e^q \frac{dq}{d\sigma}\left[\rho\operatorname{sen}\omega\left(R\frac{d\omega}{d\sigma} + \operatorname{sen}\omega\right) + R\operatorname{sen}\omega + U^2 e^{2q}\left\{\rho\operatorname{sen}\omega\left(R\frac{d\omega}{d\sigma} + \operatorname{sen}\omega\right) - R\operatorname{sen}\omega\right\}\right] -$$

$$-2U e^q\left[\left\{\rho\operatorname{sen}\omega\left(R\frac{d\omega}{d\sigma} + \operatorname{sen}\omega\right) + R\operatorname{sen}\omega\right\}' + 2U^2 e^q\frac{dq}{d\sigma}\left\{\rho\operatorname{sen}\omega\left(R\frac{d\omega}{d\sigma} + \operatorname{sen}\omega\right) - R\operatorname{sen}\omega\right\} +\right.$$

$$\left. + U^2 e^{2q}\left\{\rho\operatorname{sen}\omega\left(R\frac{d\omega}{d\sigma} + \operatorname{sen}\omega\right) - R\operatorname{sen}\omega\right\}'\right] = 0$$

la quale sarà verificata tutte le volte che lo sia la seguente:

$$\cos\omega\left(R\frac{d\omega}{d\sigma}+\operatorname{sen}\omega\right)+\frac{R\cos\omega}{\rho}=\left\{R\operatorname{sen}\omega\left(\rho\frac{d\omega}{d\sigma}+1\right)+\rho\operatorname{sen}^2\omega\right\}'$$

dalla quale ne segue

$$R=\frac{3\rho\operatorname{sen}\omega\cos\omega\frac{d\omega}{d\sigma}+\operatorname{sen}^2\omega\frac{d\rho}{d\sigma}}{\frac{\cos\omega}{\rho}-\left(\rho\operatorname{sen}\omega\frac{d\omega}{d\sigma}\right)'}$$

ed infine, derivando ed eliminando R per mezzo della 46), avremo

$$\cos\omega=\left\{\frac{3\rho\operatorname{sen}\omega\cos\omega\frac{d\omega}{d\sigma}+\operatorname{sen}^2\omega\frac{d\rho}{d\sigma}}{\frac{\cos\omega}{\rho}-\left(\rho\operatorname{sen}\omega\frac{d\omega}{d\sigma}\right)'}\right\}'.$$

Questa è la relazione che deve sussistere tra l'angolo ω e il raggio di curvatura della trajettoria, affinchè le superficie 69) abbiano le linee di curvatura de' due sistemi didonie. Ponendovi ω costante, la stessa relazione si cangia così

$$\left(\rho\frac{d\rho}{d\sigma}\right)'=\cot^2\omega$$

la quale evidentemente è soddisfatta prendendo ad esempio,

$$\frac{d\rho}{d\sigma}=\cot\omega.$$

Ora quest'equazione definisce la spirale logaritmica, nella quale i raggi vettori fanno l'angolo costante ω colle corrispondenti tangenti alla curva (V. Serret, *Calc. diff.* pag. 363 e 364). Ponendo $\cot\omega=m$, si ha:

$$dR=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}d\sigma\,;$$

e questa relazione è la medesima di quella che lega l'arco della spirale al suo raggio vettore. Indicando questo con φ, si avrà dunque

$$R=\varphi+\cot.$$

Si può perciò enunciare il seguente teorema:

Se una sfera si muove col centro sopra una spirale logaritmica, e in ogni posizione il suo raggio è eguale al raggio vettore corrispondente della curva o ne differisce d'una costante, la superficie inviluppo avrà le linee di curvatura didonie, e i piani del sistema circolare taglieranno tutti la superficie sotto lo stesso angolo costante, secondo cui i raggi vettori tagliano la spirale medesima.

La ricerca delle superficie per le quali le linee di curvatura formano un doppio sistema di linee didonie fu fatta dapprima dal Bonnet, e poi con metodo più semplice dal Dini (v. Memoria, *Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche*). Questi dimostrò che tali superficie sono l'inviluppo d'una sfera variabile il cui centro percorre una curva piana e passa costantemente per due punti fissi reali o immaginarii (distinti o coincidenti) situati simmetricamente rispetto a questo piano.

Tra le superficie indicate nel teorema sopra dimostrato si ha l'esempio d'una nella quale le sfere inviluppanti passano costantemente per un punto fisso, che è il polo della spirale logaritmica.

17. Ritornando alle sviluppoidi, esse ci son date, come abbiamo veduto, dalle 68), quando vi si supponga però U costante. Tra tutte le sviluppoidi, nel caso che consideriamo, ve n'è una che giace nel piano della trajettoria. Per essa dovendo aversi $z = o$, ciò avverrà quando la costante U assume il valore particolare zero. Le sue coordinate saranno dunque:

$$x = a + \operatorname{sen} \omega \frac{\cos(\omega + \alpha)}{\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{1}{\rho}}$$

$$y = b + \operatorname{sen} \omega \frac{\operatorname{sen}(\omega + \alpha)}{\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{1}{\rho}};$$

alle qnali corrisponde per il raggio della sviluppoide quest'espressione:

$$t = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{1}{\rho}};$$

e per la sua curvatura, 33),

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{1}{\rho}}{\frac{dt}{d\sigma} + \cos \omega}.$$

Quando ω fosse costante si trattasse cioè della sviluppoide piana ordinaria, si avrebbe

$$t = \rho \operatorname{sen} \omega;$$

dalla quale si deduce che questa particolare sviluppoide si può costruire per punti abbassando da' centri di curvatura della trajettoria le perpendicolari sopra le rette che fanno l'angolo costante ω colla trajettoria stessa.

Si ha pure in questo caso di ω costante per il raggio di curvatura

$$\rho_u = \rho \left(\operatorname{sen} \omega \frac{d\rho}{d\sigma} + \cos \omega \right)$$

e per l'arco elementare della curva, 31),

$$ds_u = \left(\operatorname{sen} \omega \frac{d\rho}{d\sigma} + \cos \omega \right) d\sigma;$$

donde si deduce che se $\frac{d\rho}{d\sigma}$ è costante, anco $\frac{d\rho_u}{ds_u}$ è costante, vale a dire se la trajettoria è una spirale logaritmica anche la sviluppoide piana ordinaria è una spirale logaritmica. Questa proprietà contiene in sè quella della sviluppata.

Per avere le altre sviluppoidi ordinarie della spirale logaritmica si può procedere nel modo seguente. Sia:

$$\varphi = a_1 e^{m\theta}$$

l'equazione della spirale logaritmica in coordinate polari; si avrà:

$$a = \varphi \cos \theta \quad \text{e} \quad b = \varphi \operatorname{sen} \theta;$$

e quindi:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(m\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(m\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$$

$$e^q = c e^{\theta\cot\omega}$$

ove

$$c = (\sqrt{a_1})^{\frac{m}{-}\cot\omega},$$

ed

$$R = \cos\omega\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\varphi.$$

Sostituendo nelle 66) e 67), abbiamo:

$$X = \frac{Uce^{\theta\cot\omega}\{m\cos(\theta-\omega)-\operatorname{sen}(\theta-\omega)\} + U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}\{m\cos(\theta+\omega)-\operatorname{sen}(\theta+\omega)\}}{\sqrt{1+m^2}\{Uce^{\theta\cot\omega}+U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}\}}$$

$$Y = \frac{Uce^{\theta\cot\omega}\{m\operatorname{sen}(\theta-\omega)+\cos(\theta-\omega)\} + U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}\{m\operatorname{sen}(\theta+\omega)-\cos(\theta+\omega)\}}{\sqrt{1+m^2}\{Uce^{\theta\cot\omega}+U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}\}}$$

$$Z = \frac{2\operatorname{sen}\omega}{Uce^{\theta\cot\omega}+U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}}$$

$$t = -\varphi\frac{\sqrt{1+m^2}\{Uce^{\theta\cot\omega}+U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}\}\operatorname{sen}\omega}{Uce^{\theta\cot\omega}-U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}};$$

sicchè le equazioni della superficie luogo delle sviluppoidi, per la sostituzione nella 14) de' valori sopra trovati, diventeranno:

$$x = \varphi\left\{\cos\theta - \operatorname{sen}\omega\frac{Uce^{\theta\cot\omega}\{m\cos(\theta-\omega)-\operatorname{sen}(\theta-\omega)\}+U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}\{m\cos(\theta+\omega)-\operatorname{sen}(\theta+\omega)\}}{Uce^{\theta\cot\omega}-U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}}\right\}$$

$$y = \varphi\left\{\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\omega\frac{Uce^{\theta\cot\omega}\{m\cos(\theta-\omega)+\cos(\theta-\omega)\}+U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}\{m\operatorname{sen}(\theta+\omega)+\cos(\theta+\omega)\}}{Uce^{\theta\cot\omega}-U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}}\right\}$$

$$z = -\varphi\frac{2\operatorname{sen}^2\omega}{Uce^{\theta\cot\omega}-U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}};$$

e quelle della superficie evolvente saranno invece:

$$x_1 = \varphi\left\{\cos\theta + \frac{\cos\omega}{m}\frac{Uce^{\theta\cot\omega}\{m\cos(\theta-\omega)-\operatorname{sen}(\theta-\omega)\}+U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}\{m\cos(\theta+\omega)-\operatorname{sen}(\theta+\omega)\}}{Uce^{\theta\cot\omega}+U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}}\right\}$$

$$y_1 = \varphi\left\{\operatorname{sen}\theta + \frac{\cos\omega}{m}\frac{Uce^{\theta\cot\omega}\{m\operatorname{sen}(\theta-\omega)+\cos(\theta-\omega)\}+U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}\{m\operatorname{sen}(\theta+\omega)+\cos(\theta+\omega)\}}{Uce^{\theta\cot\omega}+U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}}\right\}$$

$$z_1 = \varphi\frac{\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\operatorname{sen}2\omega}{Uce^{\theta\cot\omega}+U^{-1}c^{-1}e^{-\theta\cot\omega}}$$

dalle quali, ponendovi $m = \cot\omega$, si potrebbero dedurre quelle della superficie particolare e delle sue parallele per le quali sussiste la proprietà dimostrata nel teorema del n. 16.

18. Passiamo ora all'esame d'un altro caso notevole, a quello cioè in cui la trajettoria è una curva a doppia curvatura qualsivoglia, e l'angolo ω è legato a' raggi di curvatura e di torsione di essa dalla relazione:

$$\frac{r}{\rho}\cot\omega = m \tag{71}$$

essendo m costante.

Distinguiamo tre casi secondo che la costante m è eguale, maggiore o minore dell'unità, e cominciamo dall'esaminare il primo, cioè quando $m = 1$.

Allora la relazione precedente si trasforma così:

$$\cot\omega = \frac{\rho}{r};$$

e se si rammenta che questa è appunto la relazione che lega i raggi di curvatura e di torsione d'una curva all'angolo che le generatrici della sviluppabile rettificante fanno colle corrispondenti tangenti alla curva, si vede che il caso che ora andiamo ad esaminare ci darà quella particolare famiglia di sviluppoidi, le cui tangenti sono segate dalla traiettoria sotto lo stesso angolo, secondo cui la trajettoria stessa è incontrata dalle tangenti dello spigolo di regresso della superficie sviluppabile rettificante, cioè di quella superficie che è inviluppata dai piani passanti per le tangenti e per le binormali corrispondenti della trajettoria.

In questo caso l'equazione differenziale 11) piglia la seguente forma:

$$\frac{d\varepsilon}{dk} = \operatorname{sen}\varepsilon + 1,$$

da cui si ricava:

$$\frac{d\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon + 1} = dk$$

epperò

$$\int\frac{d\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon + 1} = k + u,$$

avendo posto il parametro u in luogo della funzione arbitraria proveniente dall'integrazione.

Ora:

$$\int\frac{d\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon + 1} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon - 1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon + 1}$$

ne viene adunque, sostituendo nella precedente:

$$k + u = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon - 1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon + 1}$$

dalla quale deriva l'altra:

$$73)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\,\varepsilon=\frac{1+(k+u)}{1+(k+u)}$$

che è l'integrale della 72).

Da essa si ricavano i seguenti valori:

$$74)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\varepsilon=\dfrac{1-(k+u)^2}{1+(k+u)^2} \\ \cos\varepsilon=\dfrac{-2(k+u)}{1+(k+u)^2} \\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial u}=\dfrac{2}{1+(h+u)^2} \end{cases}$$

i quali sostituiti nelle 1) e 20), danno:

$$75)\quad \begin{cases} \left[1+(k+u)^2\right]X=\cos\omega\left[1+(k+u)^2\right]\cos\alpha+\operatorname{sen}\omega\left\{-2(k+u)\cos\xi+\left[1-(k+u)^2\right]\cos\lambda\right\} \\ \left[1+(k+u)^2\right]Y=\cos\omega\left[1+(k+u)^2\right]\cos\beta+\operatorname{sen}\omega\left\{-2(k+u)\cos\eta+\left[1-(k+u)^2\right]\cos\mu\right\} \\ \left[1+(k+u)^2\right]Z=\cos\omega\left[1+(k+u)^2\right]\cos\gamma+\operatorname{sen}\omega\left\{-2(k+u)\mathrm{dos}\zeta+\left[1-(k+u)^2\right]\cos\nu\right\} \end{cases}$$

$$76)\qquad t=\frac{\operatorname{sen}\omega\left[1+(k+u)^2\right]}{\left[1+(k+u)^2\right]\dfrac{d\omega}{rdk}-2(k+u)\dfrac{1}{\rho}};$$

e in virtù di esse le equazioni delle sviluppoidi pel caso che consideriamo saranno le seguenti:

$$77)\quad \begin{cases} \left\{\left[1+(k+u)^2\right]\dfrac{d\omega}{rdk}-2(k+u)\dfrac{1}{\rho}\right\}(x-a)=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left[1+(k+u)^2\right]\cos\alpha \\ \qquad\qquad +\operatorname{sen}^2\omega\left\{-2(k+u)\cos\xi+\left[1-(k+u)^2\right]\cos\lambda\right\} \\ \left\{\left[1+(k+u)^2\right]\dfrac{d\omega}{rdk}-2(k+u)\dfrac{1}{\rho}\right\}(y-b)=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left[1+(k+u)^2\right]\cos\beta \\ \qquad\qquad +\operatorname{sen}^2\omega\left\{-2(k+u)\cos\eta+\left[1-(k+u)^2\right]\cos\mu\right\} \\ \left\{\left[1+(k+u)^2\right]\dfrac{d\omega}{rdk}-2(k+u)\dfrac{1}{\rho}\right\}(z-c)=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left[1+(k+u)^2\right]\cos\gamma \\ \qquad\qquad +\operatorname{sen}^2\omega\left\{-2(k+u)\cos\zeta+\left[1-(k+u)^2\right]\cos\nu\right\} \end{cases}$$

Corrispondentemente a queste si hanno poi le equazioni della superficie evolvente, che sono:

$$78)\ \begin{cases} \left[1+(k+u)^2\right](x_1-a)=-\mathrm{R}\cos\omega\left[1+(k+u)^2\right]\cos\alpha- \\ \qquad -\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega\left\{-2(k+u)\cos\xi+\left[1-(k+u)^2\right]\cos\lambda\right\} \\ \left[1+(k+u)^2\right](y_1-b)=-\mathrm{R}\cos\omega\left[1+(k+u)^2\right]\cos\beta- \\ \qquad -\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega\left\{-2(k+u)\cos\eta+\left[1-(k+u)^2\right]\cos\mu\right\} \\ \left[1+(k+u)^2\right](z_1-c)=-\mathrm{R}\cos\omega\left[1+(k+u)^2\right]\cos\gamma- \\ \qquad -\mathrm{R}\cos\omega\left\{-2(k+u)\cos\zeta+\left[1-(k+u)^2\right]\cos\nu\right\} \end{cases}$$

ove R è legato ad ω della relazione $d\mathrm{R}=\cos\omega d\omega$; dalla quale si deduce che $d\mathrm{R}$ coincide colla più corta distanza della normale principale della trajettoria relativa al punto (a,b,c) e della normale principale infinitamente vicina. Ne segue dunque che: *Se una sfera si muove col centro in una curva a doppia curvatura qualsivoglia e nel passare da una posizione a quella infinitamente vicina il suo raggio s'aumenta della più corta distanza tra le due normali infinitamente vicine corrispondenti a' punti delle due posizioni successive della sfera mobile, le equazioni della superficie inviluppo sono le* 78); *ed in queste superficie i piani de' cerchi σ fanno colla superficie lo stesso angolo che le più corte distanze di ciascuna normale principale e della sua infinitamente vicina fanno co' corrispondenti piani osculatori.*

Passiamo ad esaminare l'altro caso in cui è $m<1$.

L'integrale della 12) è allora così espresso:

$$k+u=\frac{2}{\sqrt{1-m^2}}\ \mathrm{arc\,tang}\left\{\frac{\sqrt{1-m^2}}{1+m}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)\right\};$$

donde si trae:

$$\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}\,\mathrm{tang}\left\{\frac{\sqrt{1-m^2}}{2}(k+u)\right\},$$

epperò:

$$79)\quad \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon=\frac{\sqrt{1-m}\cos\left\{\frac{\sqrt{1-m^2}}{2}(k+u)\right\}+\sqrt{1+m}\,\mathrm{sen}\left\{\frac{\sqrt{1-m^2}}{2}(k+u)\right\}}{\sqrt{1-m}\cos\left\{\frac{\sqrt{1-m^2}}{2}(k+u)\right\}-\sqrt{1+m}\,\mathrm{sen}\left\{\frac{\sqrt{1-m^2}}{2}(k+u)\right\}}.$$

Di qui abbiamo:

$$80)\ \begin{cases} \mathrm{sen}\,\varepsilon=\dfrac{\cos\left\{\sqrt{1-m^2}(k+u)\right\}-m}{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}(k+u)\right\}} \\ \cos\varepsilon=\dfrac{-\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}(k+u)\right\}}{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}(k+u)\right\}} \\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial u}=\dfrac{1-m^2}{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}(k+u)\right\}} \end{cases}$$

le quali sostituite nelle 1) e 20), offrono:

$$81)\left\{\begin{aligned}
&\left[1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right]X=\cos\omega\left[1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right]\cos\alpha+\\
&\quad+\operatorname{sen}\omega\left[-\sqrt{1-m^2}\operatorname{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\cos\xi+\left(\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}-m\right)\cos\lambda\right]\\
&\left[1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right]Y=\cos\omega\left[1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right]\cos\beta+\\
&\quad+\operatorname{sen}\omega\left[-\sqrt{1-m^2}\operatorname{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\cos\eta+\left(\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}-m\right)\cos\mu\right]\\
&\left[1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right]Z=\cos\omega\left[1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right]\cos\gamma+\\
&\quad+\operatorname{sen}\omega\left[-\sqrt{1-m^2}\operatorname{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\cos\zeta+\left(\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}-m\right)\cos\nu\right]
\end{aligned}\right.$$

$$82)\quad t=\frac{\operatorname{sen}\omega\left[1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right]}{\left[1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right]\dfrac{d\omega}{rdk}-\sqrt{1-m^2}\operatorname{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\Big]\dfrac{1}{\rho}},$$

per le quali le equazioni delle sviluppoidi corrispondenti a questo caso sono:

$$83)\left\{\begin{aligned}
&\left[\left\{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{d\omega}{rdk}-\left\{\sqrt{1-m^2}\operatorname{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{1}{\rho}\right](x-a)=\\
&\quad=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left\{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\alpha+\\
&\quad+\operatorname{sen}^2\omega\left[-\sqrt{1-m^2}\operatorname{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\cos\xi+\left\{\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\lambda\right]\\
&\left[\left\{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{d\omega}{rdk}-\left\{\sqrt{1-m^2}\operatorname{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{1}{\rho}\right](y-b)=\\
&\quad=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left\{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\beta+\\
&\quad+\operatorname{sen}^2\omega\left[-\sqrt{1-m^2}\operatorname{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\cos\eta+\left\{\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\mu\right]\\
&\left[\left\{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{d\omega}{rdk}-\left\{\sqrt{1-m^2}\operatorname{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{1}{\rho}\right](z-c)=\\
&\quad=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left\{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\gamma+\\
&\quad+\operatorname{sen}^2\omega\left[-\sqrt{1-m^2}\operatorname{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\cos\zeta+\left\{\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\nu\right]
\end{aligned}\right.$$

e quelle della superficie evolvente sono invece:

$$84)\begin{cases} \left[1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right](x_1-a)=-\mathrm{R}\cos\omega\left\{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\alpha \\ \quad -\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega\left[-\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\cos\xi+\left\{\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\lambda\right] \\ \left[1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right](y_1-b)=-\mathrm{R}\cos\omega\left\{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\beta \\ \quad -\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega\left[-\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\cos\eta+\left\{\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\mu\right] \\ \left[1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right](z_1-c)=-\mathrm{R}\cos\omega\left\{1-m\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\gamma \\ \quad -\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega\left[-\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sen}\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}\cos\zeta+\left\{\cos\left\{\sqrt{1-m^2}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\nu\right] \end{cases}$$

ove $\mathrm{R}=\int\cos\omega\, r\, dk$, ed ω soddisfa alla relazione:

$$\cot\omega<\frac{\rho}{r}.$$

Esaminiamo infine il caso di $m>1$. In questo caso l' integrale della 12) è questo:

$$k+u=\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}\log\left\{\frac{1+m+\sqrt{m^2-1}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)}{1+m-\sqrt{m^2-1}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}$$

da cui si trae:

$$\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{m+1}{m-1}}\,\mathrm{tang}\,h\left\{\frac{\sqrt{m^2-1}}{2}(k+u)\right\}$$

epperò:

$$85)\quad \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{m-1}\cos h\left\{\frac{\sqrt{m^2-1}}{2}(k+u)\right\}+\sqrt{m+1}\,\mathrm{sen}\,h\left\{\frac{\sqrt{m^2-1}}{2}(k+u)\right\}}{\sqrt{m-1}\cos h\left\{\frac{\sqrt{m^2-1}}{2}(k+u)\right\}-\sqrt{m+1}\,\mathrm{sen}\,h\left\{\frac{\sqrt{m^2-1}}{2}(k+u)\right\}}$$

donde ne viene:

$$86)\begin{cases} \mathrm{sen}\,\varepsilon=\dfrac{\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}-m}{1-m\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}} \\ \cos\varepsilon=\dfrac{-\sqrt{m^2-1}\,\mathrm{sen}\,h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}}{1-m\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}} \\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial u}=\dfrac{m^2-1}{1-m\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}}; \end{cases}$$

e questi valori, analogamente a ciò che abbiamo fatto ne' casi precedenti, sostituiti nelle 1) e 20), danno:

87)
$$\left[1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right]X=\cos\omega\left\{1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\alpha$$
$$+\operatorname{sen}\omega\left[-\sqrt{m^2-1}\operatorname{sen}h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\cos\xi+\left\{\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\lambda\right]$$
$$\left[1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right]Y=\cos\omega\left\{1-m\cos k\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\beta$$
$$+\operatorname{sen}\omega\left[-\sqrt{m^2-1}\operatorname{sen}h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\cos\eta+\left\{\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\mu\right]$$
$$\left[1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right]Z=\cos\omega\left\{1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\gamma$$
$$+\operatorname{sen}\omega\left[-\sqrt{m^2-1}\operatorname{sen}h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\cos\zeta+\left\{\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\nu\right]$$

e:

88)
$$t=\frac{\operatorname{sen}\omega\left[1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right]}{\left[1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right]\frac{d\omega}{rdk}-\left[\sqrt{m^2-1}\operatorname{sen}h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right]\frac{1}{\rho}}$$

Epperò le equazioni delle sviluppoidi sono:

89)
$$\left[\left\{1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{d\omega}{rdk}-\left\{\sqrt{m^2-1}\operatorname{sen}h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{1}{\rho}\right](x-a)=$$
$$=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left\{1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\alpha+$$
$$+\operatorname{sen}^2\omega\left[-\sqrt{m^2-1}\operatorname{sen}h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\cos\xi+\left\{\cosh\left\{\sqrt{m^2-h}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\lambda\right]$$
$$\left[\left\{1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{d\omega}{rdk}-\left\{\sqrt{m^2-1}\operatorname{sen}h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{1}{\rho}\right](y-b)=$$
$$=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left\{1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\beta+$$
$$+\operatorname{sen}^2\omega\left[-\sqrt{m^2-1}\operatorname{sen}h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\cos\eta+\left\{\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\mu\right]$$
$$\left[\left\{1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{d\omega}{rdk}-\left\{\sqrt{m^2-1}\operatorname{sen}h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\frac{1}{\rho}\right](z-c)=$$
$$=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left\{1-m\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\gamma+$$
$$+\operatorname{sen}^2\omega\left[-\sqrt{m^2-1}\operatorname{sen}h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\cos\zeta+\left\{\cosh\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\nu\right]$$

e quelle della superficie evolvente sono invece:

$$90)\left\{\begin{aligned}&\left[1-m\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right](x_1-a)=-\mathrm{R}\cos\omega\left\{1-m\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\alpha\\&\quad-\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega\left[-\sqrt{m^2-1}\,\mathrm{sen}\,h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\cos\xi+\left\{\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\lambda\right]\\&\left[1-m\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right](y_1-b)=-\mathrm{R}\cos\omega\left\{1-m\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\beta\\&\quad-\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega\left[-\sqrt{m^2-1}\,\mathrm{sen}\,h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\cos\eta+\left\{\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\mu\right]\\&\left[1-m\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right](z_1-c)=-\mathrm{R}\cos\omega\left\{1-m\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\right\}\cos\gamma\\&\quad-\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega\left[-\sqrt{m^2-1}\,\mathrm{sen}\,h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}\cos\zeta+\left\{\cos h\left\{\sqrt{m^2-1}\,(k+u)\right\}-m\right\}\cos\nu\right]\end{aligned}\right.$$

nelle quali $\mathrm{R}=\int\cos\omega r dk$, ed ω soddisfa alla relazione:

$$\cot\omega>\frac{\rho}{r}.$$

Riassumendo ora i risultati precedenti si può dire che le sviluppoidi d'una linea a doppia curvatura qualsivoglia dipendono dalle funzioni circolari, quando l'angolo sotto il quale le loro tangenti sono segate dalla trajettoria, essendo minore di quello che le rette rettificanti fanno colla trajettoria stessa, è tale però che la sua tangente trigonometrica è proporzionale alla tangente trigonometrica di questo; dipendono invece dalle funzioni iperboliche, quando, conservandosi sempre la proporzionalità fra le tangenti trigonometriche de' due angoli, il primo è maggiore del secondo; e quando in ultimo i due angoli sono eguali, le sviluppoidi sono date dalle funzioni algebriche.

Lo stesso dicasi delle superficie evolventi.

19. Se nella relazione 71) supponiamo ω costante, vediamo che diviene pure costante il rapporto della curvatura alla torsione della trajettoria, la quale è perciò un' elica cilindrica.

Segue da ciò che le formole 77), 83), 89) contengono in sè l'equazioni delle sviluppoidi ordinarie d'un' elica cilindrica, le quali si ottengono da quelle facendovi ω costante.

Se ora s'immagina che la trajettoria sia un' elica circolare ed ω sia sempre costante, allora, osservando che tanto il raggio t quanto la derivata $\frac{d\varepsilon}{du}$ sono in tutti e tre i casi sopra considerati funzioni della somma $k+u$ de' parametri e che pure le derivate parziali di t si mantengono funzioni di questa medesima somma, l'elemento lineare 21) della superficie delle sviluppoidi espresso per mezzo de' parametri k ed u avrà la seguente forma:

$$ds^2=\mathrm{E}\,(k+u)\,du^2+2\mathrm{F}\,(k+u)\,dudk+\mathrm{G}\,(k+u)\,dk$$

la quale appartiene per un teorema dimostrato dal Bianchi nel suo lavoro citato, alle superficie di rivoluzione.

Si può perciò enunciare il teorema: *La superficie delle sviluppoidi ordinarie d'un'elica circolare è sempre applicabile sopra una superficie di rivoluzione, e le linee* $k+u=\cos t$ *sono le trasformate de' paralleli.*

La stessa proprietà non sussiste per le superficie evolventi che ad essa corrispondono, per cui richiamando ciò che abbiamo detto al n. 13, si può ritenere che tra le superficie inviluppo di sfere moventisi col centro sopra una linea a doppia curvatura, solamente le superficie canali che hanno per direttrice un'elica circolare sono applicabili sopra una superficie di rivoluzione.

Osserviamo inoltre che nella superficie del teorema sopra enunciato, le linee $k+u=\cos t$ non solo godono della proprietà di essere le trasformate de' paralleli, come abbiam detto, ma lungo le medesime avviene altresì che il raggio delle sviluppoidi, la loro curvatura e torsione rimangono sempre costanti; di più i piani delle iperbole k sono egualmente inclinati sulla superficie, e le iperbole stesse fanno colle sviluppoidi dapertutto il medesimo angolo.

20. Cerchiamo ora l'integrale generale della 12) espresso per un integrale particolare.

Nella 12) stessa si ponga per brevità:

$$\frac{r\cot\omega}{\rho}=m$$

e vi si faccia:

$$\varepsilon=\varepsilon_1+z$$

essendo ε_1 una funzione della sola k che verifica l'equazione 12; si ha cioè):

$$\frac{d\varepsilon_1}{dk}=m\,\text{sen}\,\varepsilon_1+1\,.$$

Allora la 12) si trasformerà così:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dk}+\frac{dz}{dk}=m\,\text{sen}\,(\varepsilon_1+z)+1$$

donde si trae:

$$\frac{dz}{dk}=m\,\text{sen}\,\varepsilon_1\,(\cos z-1)+m\cos\varepsilon_1\,\text{sen}\,z\,.$$

Poniamo:

$$\text{tang}\,\frac{z}{2}=t\,,$$

sarà allora:

$$\cos z=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \text{sen}\,z=\frac{2t}{1+t^2},\quad dz=\frac{2dt}{1+t^2}$$

e perciò la precedente si cangerà in quest' altra:

$$\frac{dt}{dk}-m\cos\varepsilon_1\,t=-m\,\text{sen}\,\varepsilon_1\,t^2\,.$$

Integrando abbiamo;

$$t^{-1}=-e^{-\int m\cos\varepsilon_1 dk}\left\{\int -m\,\text{sen}\,\varepsilon_1\,e^{-\int m\cos\varepsilon_1 dk}\,dk+\text{U}\right\}$$

e ponendo per brevità

$$q = \int m \cos \varepsilon_1 \, dk ; \quad K = \int m \operatorname{sen} \varepsilon_1 e^q \, dk$$

sarà:

$$t^{-1} = e^q (K - U)$$

ove q e K sono funzioni della sola k, e U è una funzione arbitraria di u. Di qui si ha:

$$t = \frac{e^q}{K - U}.$$

Ora, per le posizioni fatte sopra, abbiamo pure:

$$t = \operatorname{tang} \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2} = \frac{\operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1}{2}}{1 + \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1}{2}}$$

sicchè si avrà:

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1}{2}}{1 + \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1}{2}} = \frac{e^q}{K - U}$$

donde ricaveremo:

$$\operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{(K-U) \operatorname{sen} \frac{\varepsilon_1}{2} + e^q \cos \frac{\varepsilon_1}{2}}{(K-U) \cos \frac{\varepsilon_1}{2} - e^q \operatorname{sen} \frac{\varepsilon_1}{2}}$$

che è l'integrale generale richiesto.

Da esso si ottiene:

$$\operatorname{sen} \varepsilon = \frac{\{(K-U)^2 - e^{2q}\} \operatorname{sen} \varepsilon_1 + 2e^q (K-U) \cos \varepsilon_1}{(K-U)^2 + e^{2q}}$$

$$\cos \varepsilon = \frac{\{(K-U)^2 - e^{2q}\} \cos \varepsilon_1 - 2e^q (K-U) \operatorname{sen} \varepsilon_1}{(K-U)^2 + e^{2q}}$$

$$\frac{d\varepsilon}{du} = \frac{2U' e^q}{(K-U)^2 + e^{2q}}$$

per cui le 66) e 67) si trasformano come segue:

$$\{(K-U)^2 + e^{2q}\} X = \cos \omega \{(K-U)^2 + e^{2q}\} \cos \alpha + \operatorname{sen} \omega \left[\{(K-U)^2 - e^{2q}\} \cos \varepsilon_1 + 2e^q (K-U) \operatorname{sen} \varepsilon_1 \right] \cos \xi$$
$$+ \operatorname{sen} \omega \left[\{(K-U)^2 - e^{2q}\} \operatorname{sen} \varepsilon_1 + 2e^q (K-U) \cos \varepsilon_1 \right] \cos \lambda$$

$$\{(K-U)^2 + e^{2q}\} Y = \cos \omega \{(K-U)^2 + e^{2q}\} \cos \beta + \operatorname{sen} \omega \left[\{(K-U)^2 - e^{2q}\} \cos \varepsilon_1 + 2e^q (K-U) \operatorname{sen} \varepsilon_1 \right] \cos \eta$$
$$+ \operatorname{sen} \omega \left[\{(K-U)^2 - e^{2q}\} \operatorname{sen} \varepsilon_1 + 2e^q (K-U) \cos \varepsilon_1 \right] \cos \mu$$

$$\{(K-U)^2 + e^{2q}\} Z = \cos \omega \{(K-U)^2 + e^{2q}\} \cos \gamma + \operatorname{sen} \omega \left[\{(K-U)^2 - e^{2q}\} \cos \varepsilon_1 + 2e^q (K-U) \operatorname{sen} \varepsilon_1 \right] \cos \zeta$$
$$+ \operatorname{sen} \omega \left[\{(K-U)^2 - e^{2q}\} \operatorname{sen} \varepsilon_1 + 2e^q (K-U) \cos \varepsilon_1 \right] \cos \nu$$

e

$$t=\frac{\operatorname{sen}\omega\left\{(K-U)^2+e^{2q}\right\}}{\left\{(K-U)^2+e^{2q}\right\}\frac{d\omega}{rdk}+\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\cos\varepsilon_1-2e^q(K-U)\operatorname{sen}\varepsilon_1\right]\frac{1}{\rho}}.$$

Quindi l'equazioni delle sviluppoidi saranno:

$$\left[\left((K-U)^2+e^{2q}\right)\frac{d\omega}{rdk}+\left\{\left((K-U)^2-e^{2q}\right)\cos\varepsilon_1-2e^q(K-U)\operatorname{sen}\varepsilon_1\right\}\frac{1}{\rho}\right](x-\alpha)=$$

$$=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left\{(K-U)^2+e^{2q}\right\}\cos\alpha+\operatorname{sen}^2\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\cos\varepsilon_1-2e^q(K-U)\operatorname{sen}\varepsilon_1\right]\cos\xi+$$

$$+\operatorname{sen}^2\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\operatorname{sen}\varepsilon_1+2e^q(K-U)\cos\varepsilon_1\right]\cos\lambda$$

$$\left[\left((K-U)^2+e^{2q}\right)\frac{d\omega}{rdk}+\left\{\left((K-U)^2-e^{2q}\right)\cos\varepsilon_1-2e^q(K-U)\operatorname{sen}\varepsilon_1\right\}\frac{1}{\rho}\right](y-b)=$$

$$=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left\{(K-U)^2+e^{2q}\right\}\cos\beta+\operatorname{sen}^2\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\cos\varepsilon_1-2e^q(K-U)\operatorname{sen}\varepsilon_1\right]\cos\eta+$$

$$+\operatorname{sen}^2\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\operatorname{sen}\varepsilon_1+2e^q(K-U)\cos\varepsilon_1\right]\cos\mu$$

$$\left[\left((K-U)^2+e^{2q}\right)\frac{d\omega}{rdk}+\left\{\left((K-U)^2-e^{2q}\right)\cos\varepsilon_1-2e^q(K-U)\operatorname{sen}\varepsilon_1\right\}\frac{1}{\rho}\right](z-c)=$$

$$=\operatorname{sen}\omega\cos\omega\left\{(K-U)^2+e^{2q}\right\}\cos\gamma+\operatorname{sen}^2\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\cos\varepsilon_1-2e^q(K-U)\operatorname{sen}\varepsilon_1\right]\cos\zeta+$$

$$+\operatorname{sen}^2\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\operatorname{sen}\varepsilon_1+2e^q(K-U)\cos\varepsilon_1\right]\cos\nu$$

e quelle della superficie evolvente saranno invece:

$$\left[(K-U)^2+e^{2q}\right](x_1-a)=-R\cos\omega\left\{(K-U)^2+e^{2q}\right\}\cos\alpha-R\operatorname{sen}\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\cos\varepsilon_1-\right.$$

$$\left.-2e^q(K-U)\operatorname{sen}\varepsilon_1\right]\cos\xi-R\operatorname{sen}\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\operatorname{sen}\varepsilon_1+2e^q(K-U)\cos\varepsilon_1\right]\cos\lambda$$

$$\left[(K-U)^2+e^{2q}\right](y_1-b)=-R\cos\omega\left\{(K-U)^2+e^{2q}\right\}\cos\beta-R\operatorname{sen}\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\cos\varepsilon_1-\right.$$

$$\left.-2e^q(K-U)\operatorname{sen}\varepsilon_1\right]\cos\eta-R\operatorname{sen}\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\operatorname{sen}\varepsilon_1+2e^q(K-U)\cos\varepsilon_1\right]\cos\mu$$

$$\left[(K-U)^2+e^{2q}\right](z_1-c)=-R\cos\omega\left\{(K-U)^2+e^{2q}\right\}\cos\gamma-R\operatorname{sen}\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\cos\varepsilon_1-\right.$$

$$\left.-2e^q(K-U)\operatorname{sen}\varepsilon_1\right]\cos\zeta-R\operatorname{sen}\omega\left[\left\{(K-U)^2-e^{2q}\right\}\operatorname{sen}\varepsilon_1+2e^q(K-U)\cos\varepsilon_1\right]\cos\nu.$$

Da ciò si conclude che la ricerca delle sviluppoidi d'una linea data qualsivoglia, e quella delle superficie che hanno un sistema di linee di curvature circolari è così ridotta a trovare l'integrale particolare ε_1 che verifica l'equazione 12).

Per mezzo delle formole sopra stabilite potrebbero farsi delle ricerche particolari, ma il tempo troppo breve che mi rimane per la presentazione di questo lavoro, non me lo permette.

III.

21. Le formole stabilite in principio di questo lavoro permettono ancora di risolvere completamente il problema inverso, vale a dire la determinazione della trajettoria data che sia la sviluppoide, o, più precisamente, la determinazione delle linee che segano la tangente d'una curva data secondo un angolo variabile con legge data.

Per non introdurre notazioni e simboli nuovi lasceremo quelli usati sin quì, supponendo però note tutte le quantità spettanti alla sviluppoide, e cercando invece di esprimere quelle relative alla trajettoria in funzione di queste.

Le equazioni 14) danno:

$$91)\qquad a=x-t\mathrm{X}\,,\quad b=y-t\mathrm{Y}\,,\quad c=z-t\mathrm{Z}$$

dalle quali si vede che una volta conosciuto t in funzione degli elementi spettanti alla sviluppoide, le equazioni della trajettoria saranno subito determinate.

A questo proposito, dalla 31) si ha:

$$92)\qquad ds_u=dt+\cos\omega\, d\sigma$$

e dalle 20) e 32:

$$93)\qquad t\,ds'_u=\operatorname{sen}\omega\, d\sigma\,.$$

Eliminando il $d\sigma$ si ottiene l'equazione differenziale che serve a determinare t; si ha infatti:

$$94)\qquad \frac{dt}{ds_u}+\frac{\cot\omega}{\rho_u}\,t=1$$

ed integrando:

$$95)\qquad t=e^{-\int\frac{\cot\omega}{\rho_u}ds_u}\int e^{\int\frac{\cot\omega}{\rho_u}ds_u}ds_u$$

in virtù del quale le 91) diventano:

$$96)\quad \left\{\begin{aligned} a&=x-\frac{dx}{ds_u}\,e^{-\int\frac{\cot\omega}{\rho_u}ds_u}\int e^{\int\frac{\cot\omega}{\rho_u}ds_u}ds_u\\ b&=y-\frac{dy}{ds_u}\,e^{-\int\frac{\cot\omega}{\rho_u}ds_u}\int e^{\int\frac{\cot\omega}{\rho_u}ds_u}ds_u\\ c&=z-\frac{dz}{ds_u}\,e^{-\int\frac{\cot\omega}{\rho_u}ds_u}\int e^{\int\frac{\cot\omega}{\rho_u}ds_u}ds_u \end{aligned}\right.$$

che sono appunto le equazioni cercate della trajettoria. Esse sono state trovate pure dal Beltrami nel lavoro più volte citato.

Rispetto all'arco elementare della trajettoria, dalla 92) si ha:

$$d\sigma=\left(1-\frac{dt}{ds_u}\right)\frac{ds_u}{\cos\omega}$$

e per la 94) ne viene:

$$d\sigma = \frac{t}{\rho_u \operatorname{sen} \omega} ds_u. \tag{97}$$

Si può anche determinare l'angolo che i piani osculatori delle due curve, ne'punti corrispondenti fanno tra loro. Si ha infatti dalle 33) e 35), coll'aver riguardo anche alla 31):

$$\frac{ds'_u}{d\sigma} = \frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\cos \varepsilon}{\rho}$$

$$\frac{ds''_u}{d\sigma} = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\rho \operatorname{sen} \omega}$$

da cui si deduce:

$$\frac{ds'_u}{d\sigma} - \frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{\cos \varepsilon}{\rho} \tag{98}$$

$$\frac{ds''_u}{d\sigma} \operatorname{sen} \omega = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\rho}, \tag{99}$$

le quali divise membro per membro danno:

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\frac{\operatorname{sen} \omega}{r_u}}{\frac{1}{\rho_u} - \frac{d\omega}{ds_u}} \tag{100}$$

e questo è ciò che si voleva.

Rammentando ora che la curvatura geodetica d'una linea tracciata sopra una superficie è il prodotto della sua prima curvatura pel coseno dell'angolo che il piano osculatore fa col piano tangente alla superficie nel punto che si considera, le 98) e 97) ci daranno subito il modo di determinare anco la curvatura geodetica della trajettoria sulla superficie sviluppabile formata dalle tangenti alla sviluppoide. Indicando H questa curvatura geodetica, avremo:

$$\mathrm{H} = \frac{\cos \varepsilon}{\rho} = \frac{\operatorname{sen} \omega \rho_u}{t} \left(\frac{1}{\rho_u} - \frac{d\omega}{ds_u} \right). \tag{101}$$

Finalmente si possono pure determinare i coseni che la tangente, la normale principale e la binormale della trajettoria fanno cogli assi, come pure la sua curvatura e la torsione.

Moltiplicando le prime tre delle 39) respettivamente per $\cos \alpha_u$, $\cos \xi_u$, $\cos \lambda_u$, si ottiene:

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \omega \cos \alpha_u - \operatorname{sen} \omega \cos \xi_u \\ \cos \beta &= \cos \omega \cos \beta_u - \operatorname{sen} \omega \cos \eta_u \\ \cos \gamma &= \cos \omega \cos \gamma_u - \operatorname{sen} \omega \cos \zeta_u \end{aligned} \right. \tag{102}$$

e questi sono i coseni della tangente, la quale essendo situata nel piano osculatore corrispondente della sviluppoide, è evidentemente perpendicolare alla binormale di essa. Moltiplicando nell'istesso modo le altre tre, si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \xi &= \operatorname{sen} \omega \cos \varepsilon \cos \alpha_u + \cos \omega \cos \varepsilon \cos \xi_u + \operatorname{sen} \varepsilon \cos \lambda_u \\ \cos \eta &= \operatorname{sen} \omega \cos \varepsilon \cos \beta_u + \cos \omega \cos \varepsilon \cos \eta_u + \operatorname{sen} \varepsilon \cos \mu_u \\ \cos \zeta &= \operatorname{sen} \omega \cos \varepsilon \cos \gamma_u + \cos \omega \cos \varepsilon \cos \zeta_u + \operatorname{sen} \varepsilon \cos \nu_u \end{aligned} \right. \tag{103}$$

cioè i coseni della normale principale. Ed infine moltiplicando le ultime tre, ne ricaviamo:

$$104)\begin{cases}\cos\lambda = \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\varepsilon \cos\alpha_u + \cos\omega \operatorname{sen}\varepsilon \cos\xi_u - \cos\varepsilon \cos\lambda_u \\ \cos\mu = \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\varepsilon \cos\beta_u + \cos\omega \operatorname{sen}\varepsilon \cos\eta_u - \cos\varepsilon \cos\mu_u \\ \cos\gamma = \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\varepsilon \cos\gamma_u + \cos\omega \operatorname{sen}\varepsilon \cos\zeta_u - \cos\varepsilon \cos\nu_u\end{cases}$$

Per mezzo di queste formole potrebbero ora trovarsi la curvatura e la torsione, ma è più breve procedere nel modo che segue. Dalla 99), indicando con $d\sigma'$ l'angolo di contingenza della trajettoria, si ha:

$$105) \qquad d\sigma' = \frac{d\sigma}{\rho} = \frac{\operatorname{sen}\omega \, ds''_u}{\operatorname{sen}\varepsilon};$$

e dividendo questa membro per membro colla 97), trovasi:

$$106) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\rho_u \operatorname{sen}^2\omega}{r_u t \operatorname{sen}\varepsilon},$$

oppure, quadrando e sommando le 98) e 99), se ne deduce:

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{\rho_u \operatorname{sen}\omega}{t}\right)^2 \left\{\left(\frac{1}{\rho_u} - \frac{d\omega}{ds_u}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{r_u}\right)^2\right\}.$$

Rispetto poi alla torsione, denotando con $d\sigma''$ l'angolo di torsione, in virtù della 9) abbiamo:

$$d\sigma'' = d\varepsilon - \cot\omega \operatorname{sen}\varepsilon \, d\sigma',$$

ma per la 105) è

$$\operatorname{sen}\varepsilon \, d\sigma' = \operatorname{sen}\omega \, ds'_u$$

dunque:

$$107) \qquad d\sigma'' = d\varepsilon - \cos\omega \, ds''_u;$$

e dividendo per $d\sigma$ da una parte, e pel suo valore 97) dall'altra, si ha:

$$108) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\rho_u \operatorname{sen}\omega}{t}\left(\frac{d\varepsilon}{ds_u} - \frac{\cos\omega}{r}\right)$$

che è la torsione richiesta.

22. Facciamo ora delle ricerche speciali.

Poniamo dapprima ω costante; in questo caso le equazioni della trajettoria sono:

$$a = x - \frac{dx}{ds_u} e^{-\cot\omega \int \frac{ds_u}{\rho_u}} \int e^{\cot\omega \int \frac{ds_u}{\rho_u}} ds_u$$

$$b = y - \frac{dy}{ds_u} e^{-\cot\omega \int \frac{ds_u}{\rho_u}} \int e^{\cot\omega \int \frac{ds_u}{\rho_u}} ds_u$$

$$c = z - \frac{dz}{ds_u} e^{-\cot\omega \int \frac{ds_u}{\rho_u}} \int e^{\cot\omega \int \frac{ds_u}{\rho_u}} ds_u$$

e se:
$$\omega = \frac{\pi}{2}$$
$$a = x - \frac{dx}{ds_n}(s_u + \text{cost})$$
$$b = y - \frac{dy}{ds_u}(s_u + \text{cost})$$
$$c = z - \frac{dz}{ds_u}(s_u + \text{cost})$$

Per t poi si avranno corrispondentemente alle due ipotesi di ω costante qualunque e di $\omega = \frac{\pi}{2}$, le due espressioni:
$$t = e^{-\cot\omega \int \frac{ds_u}{\rho_u}} \int e^{\cot\omega \int \frac{ds_u}{\rho_u}} ds_u,$$
$$t = s_u + \text{cost}.$$

Avremo inoltre considerando le 100) e 101) e facendovi ω costante:
$$\text{H} = \frac{\text{sen}\,\omega}{t},$$
$$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{\rho_u}{r_u}\,\text{sen}\,\omega,$$
dalla prima delle quali si deduce che la curvatura geodetica, in un punto, d' una trajettoria ordinaria è proporzionale alla distanza di esso punto dal corrispondente della sviluppoide; e dall' altra, che la tangente dell' angolo fatto dai piani osculatori delle due curve è proporzionale al rapporto del raggio di curvatura al raggio di torsione della sviluppoide.

Se questo rapporto fosse costante, vale a dire la sviluppoide fosse un' elica, anche ε sarebbe costante, e reciprocamente. In questo caso, per la curvatura e per la torsione della trajettoria si ha:
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\text{sen}\,\omega}{t}\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_u}{r_u}\,\text{sen}\,\omega\right)^2}$$
$$\frac{1}{r} = -\frac{\text{sen}\,\omega\cos\omega}{t}\,\frac{\rho_u}{r_u}$$
donde si vede che tanto il raggio di curvatura quanto il raggio di torsione sono proporzionali alla distanza del punto cui si riferiscono, dal punto corrispondente della sviluppoide; e quindi per quello che sopra abbiamo detto, sono proporzionali anche al raggio di curvatura geodetica.

Il loro rapporto poi essendo indipendente da t è costante, e perciò la trajettoria è in questo caso anch' essa un' elica.

Per dimostrare che queste eliche sono in cilindri paralleli, supponiamo di prendere l'asse delle z parallelo alle generatrici del cilindro su cui è tracciata la sviluppoide; allora ponendo:
$$\frac{r_u}{\rho_u} = \text{tang}\,\theta,$$

cioè chiamando θ l'inclinazione dell'elica sulle generatrici, si avrà:

$$\cos\gamma_u = \cos\theta\,, \quad \cos\zeta_u = 0\,,$$

e perciò dalla 102) ricaveremo:

$$\cos\gamma = \cos\omega\cos\theta\,;$$

e questa ci dice appunto che le tangenti alla trajettoria fanno un angolo costante coll'asse delle z. Si ritrova così il noto teorema:

Le trajettorie ordinarie d'un' elica sono eliche situate in cilindri paralleli a quello ov' è tracciata l'elica data, e i loro piani osculatori fanno coi corrispondenti piani osculatori di questa un angolo costante.

Consideriamo ora il caso che sia ε costante, cioè, studiamo le trajettorie i cui piani osculatori fanno un angolo costante co' corrispondenti piani osculatori della sviluppoide. Ponendo allora:

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{1}{m}$$

essendo m costante, dalla 100) si ha:

$$\frac{1}{\rho_u} - \frac{d\omega}{ds_u} = m\frac{\operatorname{sen}\omega}{r_u}\,,$$

per la quale la 106) diviene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\rho_u \operatorname{sen}^2\omega}{r_u t}\sqrt{m^2+1}$$

e la 108):

$$\frac{1}{r} = -\frac{\rho_u \operatorname{sen}\omega\cos\omega}{r_u t}\,.$$

Dividendo membro per membro, abbiamo:

$$\frac{r}{\rho} = \operatorname{tang}\omega\sqrt{m^2+1}$$

da cui si vede che il rapporto delle due curvature, per le trajettorie sopra considerate, è proporzionale alla tangente dell'angolo ω.

Quando $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, cioè se la trajettoria è geodetica sulla superficie sviluppabile che ha per generatrici le tangenti alla sviluppoide, allora, in virtù della 101), abbiamo:

$$\frac{1}{\rho_u} - \frac{d\omega}{ds_u} = 0$$

donde ne segue:

$$\int\frac{ds_u}{\rho_u} - \omega = \text{cost.}$$

cioè per le geodetiche suddette la differenza fra il complesso degli angoli di contingenza ed ω è costante.

Sopra due classi di forme binarie.

Nota del dott. GIOVANNI MAISANO

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 18 marzo 1883.

Nella presente Nota vogliamo caratterizzare analiticamente e geometricamente due classi di forme binarie, di ordine dispari l'una e di ordine pari l'altra, riducibili per trasformazione lineare alla forma binomia. Appartiene alla 1ª classe la binaria cubica generale, alla seconda la binaria biquadratica armonica.

§ 1. *Forme di ordine dispari.*

Indicando simbolicamente con:

$$f = a_x^{2n+1} = b_x^{2n+1} = \dots.$$

una forma binaria di ordine dispari, e con:

$$\Delta = \Delta_x^2 = (ab)^{2n} a_x b_x$$

la $2n^{ma}$ sovrapposizione [1] della forma f sopra sè stessa, le forme della 1ª classe sono distinte col porre identicamente uguale a zero il covariante:

$$(a\Delta)^2 a_x^{2n-1} \equiv 0 ,$$

2ª sovrapposizione della forma fondamentale f sopra il covariante Δ. Nella teoria della binaria cubica generale si dimostra che il covariante $(a\Delta)^2 a_x$ è per sè identicamente nullo [2].

Faremo vedere in questo §, che le forme della 1ª classe dividono colla binaria cubica generale tutte le proprietà analitiche e geometriche.

Ricordando che tutte l'espressioni simboliche, aventi a fattore $(a\Delta)^2$, provengono per sovrapposizioni del covariante $(a\Delta)^2 a_x^{2n-1}$ sopra altre forme del sistema di f, possiamo enunciare il teorema:

I. Un prodotto simbolico qualunque contenente il fattore $(a\Delta)^2$ è identicamente nullo.

Da questo teorema, per le forme il cui ordine è superiore al terzo, segue facilmente l'altro:

II. Ogni espressione, che contiene i fattori simbolici $(ab)^4.\Delta_x^2.\Delta'^2_x$, si può trasformare in un'altra contenente il fattore effettivo $(\Delta\Delta')^2 = R$, discriminante della quadratica Δ_x^2.

(1) Traduciamo così la *Ueberschiebung* del sig. Gordan.

(2) Vedi Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen* pag. 115.

In virtù di note identità si ha infatti:

$$(ab)^4\,\Delta_x^2\Delta_x'^2 = \left\{(a\Delta)b_x - (b\Delta)a_x\right\}^2 . \left\{(a\Delta')b_x - (b\Delta')a_x\right\}^2 = 4\,(a\Delta)\,(a\Delta')\,(b\Delta)\,(b\Delta')a_x^2 b_x^2 =$$

$$= 2a_x^2 b_x^2 \left\{(a\Delta)^2\,(b\Delta')^2 + (a\Delta')^2\,(b\Delta)^2 - (ab)^2\,(\Delta\Delta')^2\right\} = -2\mathrm{R}\,.\,(ab)^2\,a_x^2\,b_x^2. \quad (1)$$

Mercè questa identità possiamo ora facilmente dimostrare che tutti i covarianti di 2° grado nei coefficienti di f sono potenze del covariante quadratico Δ. Si ha infatti per l'identità (1):

$$(ab)^2\,a_x^{2n-1}\,b_x^{2n-1}.\,\mathrm{R}^{n-1} = -\frac{1}{2}\,\Delta^2.\,(ab)^4\,a_x^{2n-3}\,b_x^{2n-3}.\,\mathrm{R}^{n-2},$$

$$(ab)^4\,a_x^{2n-3}\,b_x^{2n-3}.\,\mathrm{R}^{n-2} = -\frac{1}{2}\,\Delta^2.\,(ab)^6\,a_x^{2n-5}\,b_x^{2n-5}.\,\mathrm{R}^{n-3},$$

. . . .

$$(ab)^{2n-2}\,a_x^3\,b_x^3.\,\mathrm{R} = -\frac{1}{2}\,\Delta^2.\,(ab)^{2n}\,a_x\,b_x\,;$$

epperò:

$$(ab)^{2k}\,a_x^{2n-2k+1}\,b_x^{2n-2k+1} = \left(-\frac{1}{2\mathrm{R}}\right)^{n-k}.\,\Delta^{2n-2k+1}, \quad (2)$$

e in particolare per l'essiano:

$$\mathrm{H} = (ab)^2\,a_x^{2n-1}\,b_x^{2n-1} = \left(-\frac{1}{2\mathrm{R}}\right)^{n-1}.\,\Delta^{2n-1}\,. \quad (3)$$

Il covariante: $\mathrm{Q} = (a\Delta)\,a_x^{2n}\,\Delta_x$.

Sovrapponendo la forma fondamentale f sul covariante quadratico Δ, si ottiene una forma dello stesso ordine di f, che vogliamo indicare con:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_x^{2n+1} = (a\Delta)\,a_x^{2n}\,\Delta_x\,.$$

In virtù del teorema I la prima polare di questa forma rispetto ad un punto $y\,(y_1\;y_2)$ è:

$$\mathrm{Q}_x^{2n}\,\mathrm{Q}_y = \frac{2n}{2n+1}(a\Delta)\,a_x^{2n-1}\,a_y\,\Delta_x + \frac{1}{2n+1}\,(a\Delta)\,a_x^{2n}\,\Delta_y =$$

$$= (a\Delta)\,a_x^{2n}\,\Delta_y + \frac{2n}{2n+1}\,(a\Delta)\,a_x^{2n-1}\left\{a_y\,\Delta_x - a_x\,\Delta_y\right\} = (a\Delta)a_x^{2n}\Delta_y,$$

e le polari successive:

$$\mathrm{Q}_x^{2n-1}\,\mathrm{Q}_y^2 = (a\Delta)\,a_x^{2n-1}\,a_y\,\Delta_y\,,$$

. . . .

$$\mathrm{Q}_x^{2n-k}\,\mathrm{Q}_y^{k+1} = (a\Delta)\,a_x^{2n-k}\,a_y^k\,\Delta_y\,, \quad (4)$$

. . . .

$$\mathrm{Q}_y^{2n+1} = (a\Delta)\,a_y^{2n}\,\Delta_y\,.$$

Ponendo in queste formule $y_1 = b_2$ e $y_2 = -b_1$, si ottiene:

$$(Qa)Q_x^{2n} a_x^{2n} = (a\Delta)(\Delta b) a_x^{2n} b_x^{2n} = -\frac{1}{2} a_x^{2n-1} b_x^{2n-1} \left\{ (a\Delta)^2 b_x^2 + (b\Delta)^2 a_x^2 - (ab)^2 \Delta_x^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{H}.\Delta = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\mathrm{R}}\right)^{n-1}.\Delta^{2n},$$

$$(Qa)^2 Q_x^{2n-1} a_x^{2n-1} = (a\Delta)(ab)(\Delta b) a_x^{2n-1} b_x^{2n-1} = 0\,, \tag{5}$$

. . . .

$$(Qa)^{k+1} Q_x^{2n-k} a_x^{2n-k} = (a\Delta)(ab)^k(\Delta b) a_x^{2n-k} b_x^{2n-k} = -\frac{1}{2}(ab)^k a_x^{2n-k-1} b_x^{2n-k-1} \left\{ (a\Delta)^2 b_x^2 + \right.$$

$$\left. + (b\Delta)^2 a_x^2 - (ab)^2 \Delta_x^2 \right\} = \frac{1}{2}(ab)^{k+2} a_x^{2n-k-1} b_x^{2n-k-1}.\Delta.$$

Il 1° fattore è nullo se k è dispari, se invece è pari ed uguale a $2(m-1)$, esso è uguale, giusta la formula (2), a $\left(-\frac{1}{2\mathrm{R}}\right)^{n-m}.\Delta^{2n-2m+1}$, epperò:

$$(Qa)^{k+1} Q_x^{2n-k} a_x^{2n-k} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\mathrm{R}}\right)^{n-1-\frac{k}{2}}.\Delta^{2n-k}, \tag{6}$$

. . . .

$$(Qa)^{2n+1} = (a\Delta)(ab)^{2n}(\Delta b) = -(\Delta\Delta')^2 = -\mathrm{R}. \tag{7}$$

Un' altra proprietà della forma Q è che il suo quadrato si esprime razionalmente in funzione di f, Δ, ed R. Si ha infatti:

$$Q^2 = (a\Delta) a_x^{2n} \Delta_x . (b\Delta') b_x^{2n} \Delta'_x = (b\Delta') a_x^{2n} b_x^{2n} \Delta_x \left\{ (a\Delta')\Delta_x - (\Delta\Delta') a_x \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta . a_x^{2n-1} b_x^{2n-1} \left\{ (a\Delta')^2 b_x^2 + (b\Delta'^2 a_x^2 - (ab)^2 \Delta'^2_x \right\} -$$

$$-\frac{1}{2}(\Delta\Delta').f.b_x^{2n}\left\{ (b\Delta')\Delta_x - (b\Delta)\Delta'_x \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{H}.\Delta^2 - \frac{1}{2}\mathrm{R}f^2,$$

e per la formula (3):

$$Q^2 = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{R}f^2 + \left(-\frac{1}{2\mathrm{R}}\right)^{n-1}\Delta^{2n+1}\right]. \tag{8}$$

Da questa formula ricavasi:

$$-\Delta^{2n+1} = 2(-2\mathrm{R})^{n-1}\left\{Q^2 + \frac{\mathrm{R}}{2}f^2\right\} = 2(-2\mathrm{R})^{n-1}\left\{Q + \sqrt{-\frac{\mathrm{R}}{2}}.f\right\}\left\{Q - \sqrt{-\frac{\mathrm{R}}{2}}.f\right\}, \tag{8'}$$

e ponendo:

$$Q + \sqrt{-\frac{\mathrm{R}}{2}}.f = \frac{2^n}{(-2\mathrm{R})^{\frac{n-1}{2}}}\xi^{2n+1}, \quad Q - \sqrt{-\frac{\mathrm{R}}{2}}.f = \frac{2^n}{(-2\mathrm{R})^{\frac{n-1}{2}}}\eta^{2n+1},$$

si hanno le seguenti formule:

$$\sqrt{-\frac{\mathrm{R}}{2}}f = \frac{2^{n-1}}{(-2\mathrm{R})^{\frac{n-1}{2}}}(\xi^{2n+1} - \eta^{2n+1}), \quad Q = \frac{2^{n-1}}{(-2\mathrm{R})^{\frac{n-1}{2}}}(\xi^{2n+1} + \eta^{2n+1}), \quad \Delta = -2\xi\eta. \tag{9}$$

La funzione composta: $\varkappa f + \lambda Q$.

Poichè il covariante Q è dello stesso ordine di f, aggiungendo le due forme f e Q, moltiplicate per costanti indeterminate, otteniamo una serie semplicemente infinita di forme dell'ordine $2n+1$, che diremo formare un *fascio di forme d'ordine* $2n+1$. Per istudiare le proprietà del fascio $\varkappa f + \lambda Q$ occorre formarsi le espressioni Δ, R, Q per la funzione $\varkappa f + \lambda Q$ considerata come forma fondamentale. Indicheremo quelle forme colle notazioni:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} \quad R_{\varkappa\lambda} \quad Q_{\varkappa\lambda}.$$

Indichiamo con $a_0\ a_1 \dots a_{2n+1}$ i coefficienti di f, con $\alpha_0\ \alpha_1 \dots \alpha_{2n+1}$ i coefficienti di Q. Poichè le forme $\Delta_{\varkappa\lambda}$, $R_{\varkappa\lambda}$, $Q_{\varkappa\lambda}$ si deducono dalle Δ, R, Q, sostituendo ai coefficienti a_i i coefficienti $\varkappa a_i + \lambda\alpha_i$, tenendo conto dei gradi di $\Delta_{\varkappa\lambda}$, $R_{\varkappa\lambda}$, $Q_{\varkappa\lambda}$ rispetto ai coefficienti di $\varkappa f + \lambda Q$, si ha:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = \varkappa^2 \Delta + \varkappa\lambda\Delta_1 + \lambda^2\Delta_2,$$
$$R_{\varkappa\lambda} = \varkappa^4 R + \varkappa^3 \lambda R_1 + \varkappa^2\lambda^2 R_2 + \varkappa\lambda^3 R_3 + \lambda^4 R_4,$$
$$Q_{\varkappa\lambda} = \varkappa^3 Q + \varkappa^2\lambda Q_1 + \varkappa\lambda^2 Q_2 + \lambda^3 Q_3.$$

Delle nuove forme che così ottengonsi, le Δ_1, R_1, Q_1 sono semplicemente definite dalle formule:

$$\Delta_1 = \Sigma\alpha_i \frac{\partial\Delta}{\partial a_i}, \quad R_1 = \Sigma\alpha_i \frac{\partial R}{\partial a_i}, \quad Q_1 = \Sigma\alpha_i \frac{\partial Q}{\partial a_i}.$$

Indichiamo con $\delta\varphi$ l'applicazione dell'operazione $\Sigma\alpha_i \frac{\partial}{\partial a_i}$ ad una forma φ cioè:

$$\delta\varphi = \alpha_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + \alpha_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + \dots + \alpha_{2n+1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_{2n+1}},$$

cosicchè $\delta f = Q$.

Per le altre espressioni, che contengono più simboli di f, osserviamo che l'applicazione dell'operazione δ è la somma di risultati che ottengonsi, sostituendo successivamente a ciascun simbolo di f un simbolo di Q.

Secondo questa regola si ha:

$$\delta\Delta = 2\,(aQ)^2 a_x^{2n-1} Q_x^{2n-1} = 0 \ \text{(1)}; \qquad (10)$$

si conchiude da ciò, che i coefficienti di Δ dànno risultato nullo, effettuando su di essi l'operazione δ e che, nell'applicare questa operazione ad un prodotto simbolico che contiene simboli di Δ, si può fare a meno di applicarla a questi simboli. Si ha pertanto:

$$\delta R = \delta\,[\,(\Delta\Delta')^2\,] = 0, \qquad (11)$$
$$\delta Q = \delta\,[\,(a\Delta)\, a_x^{2n}\, \Delta_x\,] = (Q\Delta)\, Q_x^{2n}\, \Delta_x.$$

È questo il determinante funzionale delle forme Δ e Q, e Q alla sua volta è il determinante funzionale di f e Δ; applicando dunque la formula [2]:

$$\Big((\varphi, \psi), \chi\Big) = \frac{m-n}{2\,(m+n-2)}\chi X - \frac{1}{2}(\varphi\Phi - \psi\Psi),$$

(1) Vedi form. 5.

(2) Vedi Clebsch op. cit. pag. 117.

in cui bisogna porre:

$$\varphi_x{}^m = a_x{}^{2n+1}, \quad \psi_x{}^n = \Delta_x{}^2, \quad \chi_x{}^p = \Delta_x{}^2,$$

si ottiene:

$$\delta Q = -\frac{1}{2} R . f .$$

Per ottenere dopo ciò le espressioni $\Delta_{\varkappa\lambda}$, $R_{\varkappa\lambda}$, $Q_{\varkappa\lambda}$, vogliamo stabilire un procedimento ricorrente. Sia φ un'espressione simbolica di grado μ nei coefficienti di f e poniamo:

$$\varphi_{\varkappa\lambda} = \varphi . \varkappa^\mu + \varphi_1 . \varkappa^{\mu-1}\lambda + \varphi_2 . \varkappa^{\mu-2}\lambda^2 + \ldots, \tag{13}$$

cosicchè se la φ rappresenta una delle forme Δ, R, Q, sono noti i due primi termini. Effettuando sui due membri di (13) l'operazione δ, si ottiene:

$$\delta\varphi_{\varkappa\lambda} = \varkappa^\mu . \delta\varphi + \varkappa^{\mu-1}\lambda . \delta\varphi_1 + \varkappa^{\mu-2}\lambda . \delta\varphi_2 + \ldots \tag{14}$$

Intanto, essendo $\varphi_{\varkappa\lambda}$ una funzione di $\varkappa a_i + \lambda\alpha_i$, si ha:

$$\delta\varphi_{\varkappa\lambda} = \Sigma \frac{\partial\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial(\varkappa a_i + \lambda\alpha_i)} (\varkappa\delta a_i + \lambda\delta\alpha_i),$$

e poichè l'operazione δ trasforma f e Q rispettivamente in Q e $-\frac{R}{2}f$, epperò $\delta a_i = \alpha_i$, $\delta\alpha_i = -\frac{R}{2} a_i$, si ha:

$$\delta\varphi_{\varkappa\lambda} = \varkappa\Sigma \frac{\partial\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial(\varkappa a_i + \lambda\alpha_i)} \alpha_i - \frac{\lambda R}{2} \Sigma \frac{\partial\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial(\varkappa a_i + \lambda\alpha_i)} a_i = \varkappa \frac{\partial\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - \frac{R}{2}\lambda \frac{\partial\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}. \tag{15}$$

In luogo della formula (14) si può dunque scrivere la seguente:

$$\begin{aligned} &\varkappa(\varphi_1\varkappa^{\mu-1} + 2\varphi_2\varkappa^{\mu-2}\lambda + 3\varphi_3\varkappa^{\mu-3}\lambda^2 + \ldots) - \\ &- \frac{R\lambda}{2}(\mu\varphi\varkappa^{\mu-1} + (\mu-1)\varphi_1\varkappa^{\mu-2}\lambda + (\mu-2)\varphi_2\varkappa^{\mu-3}\lambda^2 + \ldots) \\ &= \delta\varphi . \varkappa^\mu + \delta\varphi_1\varkappa^{\mu-1}\lambda + \delta\varphi_2 . \varkappa^{\mu-2}\lambda^2 + \ldots, \end{aligned}$$

da cui deduconsi le relazioni seguenti:

$$\varphi_1 = \delta\varphi, \quad 2\varphi_2 = \delta\varphi_1 + \frac{\mu R}{2}\varphi, \quad 3\varphi_3 = \delta\varphi_2 + \frac{\mu-1}{2}R\varphi_1, \quad 4\varphi_4 = \delta\varphi_3 + \frac{\mu-2}{2}R\varphi_2, \ldots \tag{16}$$

Applicando queste formule al calcolo di $\Delta_{\varkappa\lambda}$, nel qual caso $\mu=2$, si ha:

$$\Delta_1 = \delta\Delta = 0, \quad 2\Delta_2 = \delta\Delta_1 + R\Delta = R\Delta,$$

epperò:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = \Theta . \Delta, \tag{17}$$

avendo posto:

$$\Theta = \varkappa^2 + \frac{R}{2}\lambda^2 . \tag{18}$$

In conseguenza della formula (17) il discriminante di $\Delta_{\varkappa\lambda}$ è:

$$R_{\varkappa\lambda} = \Theta^2 . (\Delta\Delta')^2 = \Theta^2 . R .$$

Inoltre, Q contenendo linearmente i coefficienti di Δ, $Q_{\varkappa\lambda}$ conterrà il fattore Θ e può quindi scriversi:

$$Q_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^2 + \frac{R}{2}\lambda^2\right)(\varkappa Q + \lambda Q_1),$$

in cui:

$$Q_1 = \delta Q = -\frac{1}{2} R f,$$

cosicchè:

$$Q_{\varkappa\lambda} = \Theta\left(\varkappa Q - \frac{R}{2}\lambda f\right) = \frac{1}{2}\Theta.\left(Q\frac{\partial\Theta}{\partial\varkappa} - f\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\right). \tag{20}$$

Ponendo in questa formula $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$, si ottiene come covariante Q del covariante Q:

$$Q_{01} = -\frac{R^2}{4}.f. \tag{21}$$

Mediante la notazione (18) può osservarsi che la formula (8)' può mettersi sotto la forma:

$$\Delta^{2n+1} = -2(-2R)^{n-1}.\Theta(Q,f). \tag{22}$$

Alle proprietà del fascio $\varkappa f + \lambda Q$, indicate dalle formule (17), (19), (20), aggiungiamo la seguente:

Il fascio $\varkappa f + \lambda Q$ abbraccia tutte quelle forme e solamente quelle per le quali il covariante Δ è, a prescindere di un fattore costante, una data forma quadratica.

La formula (17) mostra che tutte le forme del fascio $\varkappa f + \lambda Q$ hanno lo stesso covariante Δ, a prescindere da un fattor costante. Vogliamo dimostrare reciprocamente che solamente forme $\varkappa f + \lambda Q$ ammettono quel covariante Δ. Sia:

$$\Delta = p_0 x_1^2 + 2p_1 x_1 x_2 + p_2 x_2^2, \tag{23}$$

$$Q = \alpha_0 x_1^{2n+1} + (2n+1)\alpha_1 x_1^{2n} x_2 + \binom{2n+1}{2}\alpha_2 x_1^{2n-1} x_2^2 + \ldots\ldots .$$

Poichè annullasi identicamente tanto la 2ª sovrapposizione di Δ con f quanto quella di Δ con Q, si hanno le relazioni:

$$\begin{array}{ll}
a_0 p_2 - 2a_1 p_1 + a_2 p_0 = 0 & \alpha_0 p_2 - 2\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_0 = 0 \\
a_1 p_2 - 2a_2 p_1 + a_3 p_0 = 0 & \alpha_1 p_2 - 2\alpha_2 p_1 + \alpha_3 p_0 = 0 \\
a_2 p_2 - 2a_3 p_1 + a_4 p_0 = 0 & \alpha_2 p_2 - 2\alpha_3 p_1 + \alpha_4 p_0 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
a_{2n-1} p_2 - 2a_{2n} p_1 + a_{2n+1} p_0 = 0 & \alpha_{2n-1} p_2 - 2\alpha_{2n} p_1 + \alpha_{2n+1} p_0 = 0;
\end{array}$$

sia intanto:

$$\varphi = m_0 x_1^{2n+1} + (2n+1)\, m_1 x_1^{2n} x_2 + \binom{2n+1}{2} m_2 x_1^{2n-1} x_2^2 + \ldots$$

una forma di grado $2n+1$, il cui covariante Δ coincida col dato (23), allora i suoi coefficienti devono sodisfare alle seguenti condizioni:

$$\begin{array}{l}
m_0 p_2 - 2m_1 p_1 + m_2 p_0 = 0 \\
m_1 p_2 - 2m_2 p_1 + m_3 p_0 = 0 \\
m_2 p_2 - 2m_3 p_1 + m_4 p_0 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots \\
m_{2n-1} p_2 - 2m_{2n} p_1 + m_{2n+1} p_0 = 0.
\end{array} \tag{25}$$

Dalle equazioni (23) e (25) seguono le seguenti:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ m_0 & m_1 & m_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{2n-1} & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n} & \alpha_{2n+1} \\ m_{2n-1} & m_{2n} & m_{2n+1} \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

Supponendo che Δ non si annulli identicamente, possiamo porre:

$$m_0 = \varkappa a_0 + \lambda \alpha_0 ,$$
$$m_1 = \varkappa a_1 + \lambda \alpha_1 ,$$

dalle quali, in virtù delle (26), seguono le altre:

$$m_2 = \varkappa a_2 + \lambda \alpha_2 , \quad m_3 = \varkappa a_3 + \lambda \alpha_3 , \ \ldots \ m_{2n+1} = \varkappa a_{2n+1} + \lambda \alpha_{2n+1} ,$$

epperò:

$$\varphi = \varkappa f + \lambda Q ,$$

come voleasi dimostrare.

Interpretazioni geometriche.

La formula (21) ci dice che la forma f si deduce analiticamente dalla forma Q, come questa è stata dedotta dalla forma f. Questa reciprocità tra le due forme f e Q può mettersi ancora in evidenza, rappresentando i $2n+1$ punti di f e i $2n+1$ punti di Q sulla stessa retta.

Per la formula (9) si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= f \cdot \sqrt{-\frac{R}{2}} = (\xi - \eta)(\xi - \varepsilon\eta)(\xi - \varepsilon^2\eta) \ldots (\xi - \varepsilon^{2n}\eta) , \\ 0 &= Q = (\xi + \eta)(\xi + \varepsilon\eta)(\xi + \varepsilon^2\eta) \ldots (\xi + \varepsilon^{2n}\eta) , \end{aligned} \quad (27)$$

cosicchè le due forme f e Q sono rappresentate sulla retta da due gruppi di $2n+1$ punti che hanno le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned} &(1, 1), \quad (\varepsilon, 1), \quad (\varepsilon^2, 1) \ , \ldots\ldots (\varepsilon^{2n}, 1), \\ &(-1, 1), (-\varepsilon, 1), (-\varepsilon^2, 1) \ , \ldots\ldots (-\varepsilon^{2n}, 1), \end{aligned} \quad (28)$$

in cui ε indica una radice $(2n+1)^{ma}$ primitiva dell'unità positiva.

Se di uno degli elementi di f prendiamo i centri armonici di 2° ordine rispetto alla stessa forma f, otteniamo due punti, di cui uno è il polo, e l'altro il centro armonico di 1° ordine del polo rispetto agli altri $2n$ punti. Prendendo intanto del punto $(\varepsilon^k, 1)$ i centri armonici di 2° ordine rispetto ad f, si ottiene:

$$\varepsilon^{k-2} \xi^2 - \eta^2 = 0 . \quad (29)$$

Dei due punti rappresentati dall'equazione (29) l'uno ha per coordinate $(\varepsilon^k, 1)$ e coincide col polo, l'altro ha per coordinate $(-\varepsilon^k, 1)$. Dunque il centro armonico di 1° ordine del punto $(\varepsilon^k, 1)$ rispetto ai rimanenti punti di f è $(-\varepsilon^k, 1)$. Dando a k i valori $0, 1, \ldots 2n$, si ottengono i seguenti punti come centri armonici di ognuno degli elementi di f rispetto ai rimanenti:

$$(-1, 1), \ (-\varepsilon, 1), \ (-\varepsilon^2, 1) \ , \ldots \ (-\varepsilon^{2n}, 1),$$

il cui insieme costituisce il gruppo degli elementi Q.

Si ottiene dunque il teorema:

I. Di ogni elemento di f costruendo successivamente il centro armonico di 1° ordine rispetto ai rimanenti, si ottengono gli elementi del covariante Q, e reciprocamente.

Ponendo l'equazione:

$$\varkappa f + \lambda Q = 0\,, \tag{30}$$

si determina un fascio di gruppi di $2n+1$ elementi, gruppi corrispondenti ai valori del rapporto $\frac{\varkappa}{\lambda}$ e tali che un elemento determina il gruppo cui esso appartiene. Se $R_{\varkappa\lambda} \gtrless 0$ è anche $R \gtrless 0$, i fattori di Δ sono diversi, epperò anche quelli di $\varkappa f + \lambda Q = \frac{2^{n-1}}{(-2Q)^{\frac{n-1}{2}}} \left\{ \xi^{2n+1} . \left(\varkappa + \lambda \sqrt{-\frac{R}{2}} \right) - \eta^{2n+1} . \left(\varkappa - \lambda \sqrt{-\frac{R}{2}} \right) \right\}$, cosicchè gli elementi di un gruppo corrispondente ad un dato valore del rapporto $\frac{\varkappa}{\lambda}$ sono dati dall'equazione:

$$0 = \left(\varkappa + \lambda \sqrt{-\frac{R}{2}} \right) \xi^{2n+1} - \left(\varkappa - \lambda \sqrt{-\frac{R}{2}} \right) \eta^{2n+1}\,. \tag{31}$$

Per determinare quei gruppi che hanno elementi coincidenti basta porre:

$$R_{\varkappa\lambda} = \Theta . R = 0\,, \qquad \text{ovvero} \qquad \Theta = \varkappa^2 + \frac{R}{2}\lambda^2 = 0\,,$$

avendo sempre supposto $R \lesseqgtr 0$. Si hanno dunque due gruppi con elementi coincidenti e corrispondenti ai due valori del rapporto $\frac{\varkappa}{\lambda}$:

$$\frac{\varkappa}{\lambda} = \pm \sqrt{-\frac{R}{2}}.$$

Intanto in questi due casi l'equazione (31) si riduce all'una o all'altra delle equazioni:

$$\xi^{2n+1} = 0\,, \qquad \eta^{2n+1} = 0\,,$$

cioè all'uno o all'altro degli elementi di Δ. Si ha dunque il teorema:

II. Due soli gruppi del fascio (30) hanno elementi coincidenti e sono rappresentati dall'uno o dall'altro elemento di Δ, considerato come elemento $(2n+1)^{plo}$.

Ponendo:

$$a = \sqrt{\frac{\varkappa - \lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}}{\varkappa + \lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}}}\,, \tag{32}$$

gli elementi di un gruppo qualunque del fascio (30) sono dati dall'equazioni:

$$\xi = a\eta, \quad \xi = \varepsilon a\eta, \quad \xi = \varepsilon^2 a\eta, \dots \xi = \varepsilon^{2n} a\eta, \tag{33}$$

mentre gli elementi del suo covariante Δ sono dati dalle due equazioni:

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0\,. \tag{34}$$

Gli elementi (33) e (34) formano un gruppo di $2n+3$ elementi ciclicamente proiettivo, cioè un gruppo tale che, tenendo fissi i due elementi $\xi=0$; $\eta=0$, e permutando ciclicamente gli altri, si ottengono sempre sistemi proiettivi al sistema dato.

Si ha dunque il teorema:

III. Gli elementi di un gruppo del fascio (30) formano cogli elementi di Δ (che non variano col variare del gruppo) un sistema ciclicamente proiettivo.

Fra' gruppi del fascio (30) vi sono il gruppo fondamentale $f=0$ e il gruppo $Q=0$, epperò completiamo il teorema I dicendo:

IV. Gli elementi di f e gli elementi di Q formano due sistemi ciclicamente proiettivi, i cui elementi fissi sono quelli di Δ. Gli elementi di f coi *corrispondenti* elementi di Q formano $2n+1$ coppie appartenenti alla stessa involuzione, che ha per elementi doppî quelli di Δ.

Chiamiamo corrispondente ad un elemento di f l'elemento di Q che rappresenta il centro armonico di 1° ordine di quell'elemento rispetto ai rimanenti di f.

Ritorniamo al gruppo (33) e insieme ad esso consideriamo un altro gruppo corrispondente alla costante:

$$b=\sqrt{\frac{\varkappa'-\lambda'\sqrt{-\frac{R}{2}}}{\varkappa'+\lambda'\sqrt{-\frac{R}{2}}}}.$$

Gli elementi $\xi-a\eta=0$, $\xi-b\eta=0$, che appartengono a questi due gruppi, formano cogli elementi di Δ un gruppo di 4 punti il cui rapporto anarmonico è $\frac{b}{a}$. Scegliendo due altri elementi de' due gruppi, il rapporto anarmonico viene solamente alterato di una $(2n+1)^a$ radice dell'unità, ma, stabilito l'ordine degli elementi di un gruppo, si possono ordinare gli elementi dell'altro in modo che il rapporto anarmonico resti inalterato, operando uno stesso numero di permutazioni cicliche negli elementi dei due gruppi.

Pertanto il fascio $\varkappa f+\lambda Q=0$ si può scindere in $2n+1$ serie proiettive rappresentate dalle equazionî:

$$\xi=a\eta=0, \qquad \xi-\varepsilon a\eta=0, \ldots\ldots \xi-\varepsilon^{2n}a\eta=0;$$

gli elementi corrispondenti in queste serie si ottengono coll'attribuire lo stesso valore alla costante a nelle $2n+1$ equazioni. Queste serie proiettive hanno comune una coppia di elementi, cioè gli elementi di Δ. Due gruppi del fascio sono messi in relazione dalla costante $\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}$, che rappresenta la $(2n+1)^a$ potenza del rapporto anarmonico di due elementi qualunque presi nei due gruppi cogli elementi di Δ. Un valore particolare di questa costante è -1, con che il rapporto anarmonico diviene -1, ovv. $-\varepsilon$, ... ovv. $-\varepsilon^{2n}$. Diremo per brevità che in questo caso i due gruppi sono armonici. Per trovare il gruppo $(\varkappa', \lambda')$ armonico ad un gruppo dato $(\varkappa, \lambda)$ basta scrivere l'equazione:

$$\frac{\varkappa'-\lambda'\sqrt{-\frac{R}{2}}}{\varkappa'+\lambda'\sqrt{-\frac{R}{2}}}+\frac{\varkappa-\lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}}{\varkappa+\lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}}=0,$$

ovvero:

$$\varkappa\varkappa' + \frac{R}{2}\lambda\lambda' = 0, \qquad \varkappa':\lambda' = -\frac{R}{2}\lambda:\varkappa.$$

Dunque il gruppo armonico al gruppo $\varkappa f + \lambda Q = 0$ è dato dall' equazione:

$$\varkappa Q - \frac{R}{2}\lambda f = 0.$$

Osserviamo intanto che il 1° membro di questa equazione è $Q_{\varkappa\lambda}$ e, per la reciprocità delle forme $\varkappa f + \lambda Q$ e $Q_{\varkappa\lambda}$, si conchiude che la relazione fra due gruppi armonici è reciproca, e si ha il teorema:

V. I due gruppi $\varkappa f + \lambda Q = 0$ e $Q_{\varkappa\lambda} = 0$ sono armonici e sono i soli gruppi armonici.

In questo paragrafo abbiam sempre supposto $R = (\Delta\Delta')^2 \gtrless 0$. Supponiamo ora $R = 0$; allora non ha più luogo la formula (2) e tutte le altre conseguenze della stessa formula. In questo caso i due elementi di Δ coincidono in un solo ξ, e continuando a supporre $(a\Delta)^2 a_x^{2n-1} \equiv 0$, si avrà:

$$\Delta = \xi^2, \qquad f = a_0\xi^{2n+1} + (2n+1)a_1\xi^{2n}\eta + \dots + a_{2n+1}\eta^{2n+1},$$

$$(a\Delta)^2 a_x^{2n-1} = a_2\xi^{2n-1} + (2n-1)a_3\xi^{2n-2}\eta + \dots + a_{2n-1}\eta^{2n-1} \equiv 0,$$

epperò:

$$a_2 = a_3 = \dots = a_{2n+1} = 0,$$

$$f = \xi^{2n}\left(a_0\xi + (2n+1)\alpha_1\eta\right). \tag{35}$$

D'altra parte formando il covariante Δ da (35) trovasi:

$$\Delta = -2a_1^2\xi^2 \quad \text{per} \quad n = 1,$$
$$\Delta \equiv 0 \quad \text{»} \quad n > 1.$$

Reciprocamente, se f ha una radice di multiplicità $2n$ $(n>1)$, si annulla identicamente Δ, $(a\Delta)^2 a_x^{2n-1}$ ed R. Si ha dunque il teorema:

VI. Le condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma di ordine $2n+1$ ammetta una radice $(2n)^{pla}$ sono date dall'annullarsi identicamente del covariante $(a\Delta)^2 a_x^{2n-1}$ e dell'invariante $(\Delta\Delta')^2$, in cui è $\Delta = (ab)^{2n} a_x b_x$ [1].

§ 2. *Forme di ordine pari.*

Indichiamo simbolicamente con:

$$f = a_x^{2n} = b_x^{2n} = \dots \tag{1}$$

una forma binaria di grado pari, e con:

$$H = (ab)^{2n-2} a_x^2 b_x^2 \tag{2}$$

la $(2n-2)^{ma}$ sovrapposizione della forma f sopra sè stessa. Le forme che costituiscono la 2ª classe sono definite col porre identicamente uguali a zero i due covarianti:

$$(aH)^3 a_x^{2n-3} H_x \equiv 0, \qquad (aH)^4 a_x^{2n-4} \equiv 0. \tag{3}$$

Dalla teoria delle forme biquadratiche e sestiche si sa, che la 1ª delle identità (3) si verifica per la forma biquadratica e sestica generale [2], mentre la 2ª delle identità (3) ha luogo per la forma biquadratica armonica.

[1] Cfr. Clebsch, op. cit. pag. 374.

[2] Vedi Clebsch, op. cit. pag. 136 e 284.

Nella Memoria del sig. Gordan, *Ueber das Formensystem binärer Formen,* dimostrasi la seguente identità (form. III pag. 11):

$$\sum_i \frac{\binom{n_2-\alpha_1-\alpha_3}{i}\binom{\alpha_2}{i}}{\binom{n_1+n_2-2\alpha_3-i+1}{i}}\Big((r_1 r_2)^{\alpha_3+i}, r_3\Big)^{\alpha_1+\alpha_2-i} = (-)^{\alpha_1} \sum_i \frac{\binom{n_3-\alpha_1-\alpha_2}{i}\binom{\alpha_3}{i}}{\binom{n_1+n_3-2\alpha_2-i+1}{i}}\Big((r_1 r_3)^{\alpha_2+i}, r_2\Big)^{\alpha_1+\alpha_3-i}, \tag{4}$$

in cui r_1, r_2, r_3 indicano tre forme binarie qualunque degli ordini rispettivi n_1, n_2, n_3, le costanti α sodisfano alla condizione:

$$\alpha_1 (n_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = 0\,,$$

e le somme sono prese a partire da $i=0$.

Poniamo: $\quad r_1 = a_x^{2n}, \quad r_2 = a_x^{2n}, \quad r_3 = \mathrm{H}\,,$

e per conseguenza: $\quad n_1 = 2n, \quad n_2 = 2n, \quad$ ed $\quad n_3 = 4\,,$

poniamo inoltre: $\quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 2n-3\,,$

cosicchè la formula (4) diviene:

$$\sum_i \frac{\binom{3}{2i+1}^2}{\binom{6-2i}{2i+1}}\Big((f,f)^{2n-2+2i}, \mathrm{H}\Big)^{2-2i} = \sum_i \frac{\binom{1}{i}\binom{2n-3}{i}}{\binom{2n-1-i}{i}}\Big((f,\mathrm{H})^{3+i}, f\Big)^{2n-3-i},$$

epperò:

$$\frac{3}{2}(\mathrm{HH}')^2\mathrm{H}_x{}^2\mathrm{H}_x'{}^2 + \frac{1}{4}(ab)^{2n}.\mathrm{H} = \Big((f,\mathrm{H})^3, f\Big)^{2n-3} + \frac{2n-3}{2n}\Big((f,\mathrm{H})^4, f\Big)^{2n-4}. \tag{5}$$

Il 2° membro è identicamente nullo, essendo identicamente nulle per le ipotesi (3) la 3ª e 4ª sovrapposizione della forma f sulla forma $\mathrm{H}: (f,\mathrm{H})^3$ ed $(f,\mathrm{H})^4$; dunque:

$$6(\mathrm{HH}')^2\mathrm{H}_x{}^2\mathrm{H}_x'{}^2 = -(ab)^{2n}.\mathrm{H}\,, \tag{6}$$

cioè la forma biquadratica $\mathrm{H} = (ab)^{2n-2}a_x{}^2 b_x{}^2$ differisce dal suo essiano $(\mathrm{HH}')^2\mathrm{H}_x{}^2\mathrm{H}_x'{}^2$ per un fattore costante. Allora, supponendo $(\mathrm{HH}')^4 \gtreqless 0$, la forma H dev' essere il quadrato di un' espressione quadratica ([1]) e, indicando con $\xi=0$, $\eta=0$ le due radici distinte dall' equazione $\mathrm{H}=0$, si potrà porre:

$$\mathrm{H} = 6\alpha_2\xi^2\eta^2, \quad f = a_0\xi^{2n} + 2na_1\xi^{2n-1}\eta + \ldots. + a_{2n}\eta^{2n}. \tag{7}$$

Essendo intanto $(a\mathrm{H})^4 a_x{}^{2n-4} \equiv 0$, si avrà:

$$\alpha_2\Big\{a_2\xi^{2n-4} + (2n-4)a_3\xi^{2n-5}\eta + \ldots. + a_{2n-2}\eta^{2n-4}\Big\} \equiv 0\,,$$

epperò:

$$a_2 = a_3 = \ldots. = a_{2n-2} = 0, \quad f = a_0\xi^{2n} + 2na_1\xi^{2n-1}\eta + 2na_{2n-1}\xi\eta^{2n-1} + a_{2n}\eta^{2n}. \tag{8}$$

Formando intanto della forma f il covariante:

$$\mathrm{H} = 2\Big\{(a_0\xi^2 + 2a_1\xi\eta + \alpha_2\eta^2)(a_{2n-2}\xi^2 + 2a_{2n-1}\xi\eta + a_{2n}\eta^2)$$

$$-(2n-2)(a_1\xi^2 + 2a_2\xi\eta + a_3\eta^2)(a_{2n-3}\xi^2 + 2a_{2n-2}\xi\eta + a_{2n-1}\eta^2) + \ldots.\Big\},$$

([1]) Clebsch, op. cit. pag. 163.

si ottiene per le condizioni (8):

$$H=2\left\{a_0 a_{2n}-(2n-6)\, a_1 a_{2n-1}\right\}\xi^2\eta^2+4a_0 a_{2n-1}\xi^3\eta+4a_1 a_{2n}\xi\eta^3,$$

epperò:

$$a_1=a_{2n-1}=0, \qquad \text{ovvero} \qquad a_0=a_{2n}=0. \tag{9}$$

D'altra parte, formando il covariante $(a\mathrm{H})^3 a_x^{2n-3}\mathrm{H}_x$ identicamente nullo, si ha:

$$(f,\mathrm{H})^3=\left\{\frac{\partial^3 f}{\partial\xi^3}\frac{\partial^3 \mathrm{H}}{\partial\eta^3}-3\frac{\partial^3 f}{\partial\xi^2\partial\eta}\frac{\partial^3 \mathrm{H}}{\partial\xi\partial\eta^2}+3\frac{\partial^3 f}{\partial\xi\partial\eta^2}\frac{\partial^3 \mathrm{H}}{\partial\xi^2\partial\eta}-\frac{\partial^3 f}{\partial\eta^3}\frac{\partial^3 \mathrm{H}}{\partial\xi^3}\right\}\equiv 0,$$

e per le stesse (7) e (8):

$$(f,\mathrm{H})^3=-3\alpha_2(a_1\xi^{2n-2}-a_{2n-1}\eta^{2n-2})\equiv 0, \quad \text{ovvero} \quad a_1=a_{2n-1}=0.$$

Delle ipotesi (9) resta dunque la 1ª, e la forma f diviene:

$$f=a_0\xi^{2n}+a_{2n}\eta^{2n},$$

ovvero, definendo come coordinate $y_1\ y_2$:

$$y_1=\xi\sqrt[2n]{a_0}, \qquad y_2=\eta\,.\,\varepsilon\sqrt[2n]{a_{2n}},$$

in cui ε è una radice $(2n)^{ma}$ dell' unità negativa:

$$f=y_1^{2n}-y_2^{2n}=(y_1^n+y_2^n)(y_1^n-y_2^n), \qquad \mathrm{H}=6ky_1^2y_2^2; \tag{10}$$

si ha dunque il teorema:

Se per una forma binaria di grado $2n$ si annullano identicamente i due covarianti $(a\mathrm{H})^3 a_x^{2n-3}\mathrm{H}_x$ e $(a\mathrm{H})^4 a_x^{2n-4}$, in cui $\mathrm{H}=(ab)^{2n-2}a_x^2b_x^2$, i $2n$ punti, rappresentati dall'equazione $f=a_x^{2n}=0$, sono ciclicamente proiettivi ai due elementi doppî dati dall' equazione $\mathrm{H}=0$. Se n è dispari, i $2n$ punti di $f=0$ si scompongono in 2 gruppi di n punti costituenti n coppie di un' involuzione, i cui elementi doppî sono quelli di $\mathrm{H}=0$

Finora abbiamo supposto diverso da zero $(\mathrm{HH}')^4$, l'invariante di 2° grado di H, se invece è $(\mathrm{HH}')^4=0$, la forma biquadratica H diviene la quarta potenza di un fattore lineare ξ:

$$\mathrm{H}=\alpha_0\xi^4, \quad f=a_0\xi^{2n}+2n\,a_1\xi^{2n-1}\eta+\ldots+a_{2n}\eta^{2n},$$

e la condizione $(a\mathrm{H})^4 a_x^{2n-4}\equiv 0$ diviene:

$$\alpha_0\left\{a_4\xi^{2n-4}+(2n-4)a_5\xi^{2n-5}\eta+\ldots+a_{2n}\eta^{2n-4}\right\}\equiv 0,$$

ovvero: $\qquad a_4=a_5=\ldots=a_{2n}=0,$

mentre la condizione $(a\mathrm{H})^3 a_x^{2n-3}\mathrm{H}$ è:

$$\alpha_0\xi\left\{a_3\xi^{2n-3}+(2n-3)\,a_4\xi^{2n-4}\eta+\ldots+a_{2n}\eta^{2n-3}\right\}\equiv 0,$$

ovvero: $\qquad a_3=a_4=\ldots=a_{2n}=0,$

ed f assume l'espressione:

$$f=a_0\xi^{2n}+2n.a_1\xi^{2n-1}\eta+\binom{2n}{2}a_2\xi^{2n-2}\eta^2.$$

Reciprocamente, se f ha una radice $(2n-2)^{pla}$, si annulla identicamente H, eccezion fatta del caso $n\gtreqless 3$, epperò anche $(a\mathrm{H})^3a_x^{2n-3}\mathrm{H}_x$, $(a\mathrm{H})^4a_x^{2n-4}$, $(\mathrm{HH}')^4$. Dunque: Le condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma binaria

di ordine $2n$ abbia una radice $(2n-2)^{pla}$ sono date dall' annullarsi identicamente delle seguenti forme:

$$(aH)^3 a_x^{2n-3} H_x, \ (aH)^4 a_x^{2n-4}, \ (HH')^4,$$

in cui è posto: $H=(ab)^{2n-2} a_x^2 b_x^2$.

Se $n=2$ si annulla per sè il covariante $(aH)^3 a_x H_x$, inoltre se è $(aH)^4=j=0$ e $(HH')^4=\frac{i^2}{6}=0$, $f=a_x^4$ ammette una radice tripla (¹).

Se $n=3$ restano le condizioni $a_3=a_4=a_5=a_6$, senza che H si annulli identicamente, ed $f=a_x^6$ ammette ancora una radice quadrupla (²).

(¹) Vedi Clebsch, op. cit. pag. 165.
(²) Vedi Clebsch, op. cit. pag. 446.

Sulla lunghezza del pendolo a secondi.

Ricerche di G. PISATI ed E. PUCCI

Memoria approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 4 febbraio 1883.

(Con quattro tavole)

---

§ I.

L' importanza di moltiplicare le determinazioni delle coordinate astronomiche e dell' intensità della gravità è ben nota agli Astronomi ed ai Geodeti, e non può certo sfuggire a nessuno dei cultori della Filosofia Naturale. Simili ricerche, avendo numerose ed immediate relazioni con parecchi problemi fondamentali sia di natura geologica, sia di natura fisica, già molte volte hanno richiamata l'attenzione degli scienziati, e l'attività con cui, nel secolo nostro, furono spinte innanzi e nel campo della matematica astratta, ed in quello dell'applicata, è stata feconda di lavori del più grande interesse. L' illustre prof. Bruns, in una Memoria [1] presentata alla Commissione per la misura dei gradi in Europa, fece già osservare che il complesso delle importanti quistioni, che si connettono con le varie classi di misure astronomico-geodetiche, non può essere risoluto in mancanza di una di esse; pure, nello sviluppo sin qui dato ai lavori di questo genere, alcuna di tali classi presenta presso parecchie nazioni una deplorevole lacuna, presso altre dei gravi dubbî sui risultati delle determinazioni, ed è ben noto come la Commissione sopra rammentata si propose più volte di usare di tutta la sua attività per fare sparire una simile deficienza. Nè l' Italia fu l' ultima a mettersi all' opera ; la rapidità con cui in pochi anni nel nostro paese sono stati collegati con determinazioni di longitudine gli Osservatorî Astronomici e sono state moltiplicate le osservazioni di latitudine e di azimut rivela il solerte interesse con cui fu qui accolta ed estesa l' idea di ordinare simili lavori ad un fine altamente scientifico. La Commissione italiana per la misura dei gradi, dopo avere iniziate e condotte innanzi le livellazioni di precisione, nelle sedute del giugno del 1880 decise di istituire ricerche di precisione anche sulla gravità: ed, in vero, presso di noi questa classe di misure era stata fin ora completamente trascurata, giacchè alle pochissime determinazioni che possediamo non si può oggimai assegnare che una ben piccola fiducia; cosa tanto più deplorabile inquantochè le osservazioni di Biot fatte in Lombardia accennerebbero a forti anomalie locali. I numerosi lavori eseguiti sulla gravità all' estero con grande ricchezza di mezzi, e talvolta con grande rigore di metodi di osservazione, hanno dato luogo a delicatissimi studî analitici sostanziali, che hanno aperto un nuovo campo di idee e son venuti a dare alle ricerche

[1] *Die Figur der Erde.* Berlin 1878.

sulla direzione e sull' intensità del peso una nuova imprevista e grande importanza. Ci sia concesso di entrare in proposito in qualche maggiore spiegazione.

Nei classici lavori di Bessel [1] sulla gravità si trova sviluppata e per la prima volta applicata la teoria del movimento pendolare di una sfera in un mezzo resistente, tenuto conto dell'aumento che il momento d'inerzia della sfera riceve a causa della porzione del fluido trascinata in moto dal corpo oscillante : ma se il calcolo delle delicate esperienze di Bessel, fatte col noto pendolo differenziale a filo, pose fuori di dubbio che la riduzione al vuoto con le formule già date ed adottate da Bouguer è insufficiente, tuttavia alcune anomalie che si verificarono fra i risultati ottenuti con pendoli di diversa lunghezza ed oscillanti in mezzi diversi misero pure in chiaro altre influenze, di cui non tenevano conto le formule definitive alle quali Bessel si era prima arrestato. È noto che in queste formule l' influenza del fluido messo in moto dal pendolo viene espressa in funzione di una costante k, per la quale l' esperienza dà un valore assai più grande di 0,5 assegnatole teoricamente da Poisson. In seguito Bessel stesso considerò il valore di k come variabile colla durata dell'oscillazione del pendolo, ma già Baily in un interessantissimo lavoro [2] esperimentale aveva trattato il problema della correzione che deve esser fatta alle durate di oscillazione per ridurle al vuoto: le ricerche di Baily furono fatte con una sorprendente varietà di mezzi, dacchè egli fece oscillare nel vuoto e nell'aria più di ottanta pendoli di natura e di forma differente e con sistemi diversi di sospensione; così esse costituiscono un prezioso patrimonio di dati, che servì ben presto come punto di partenza alle investigazioni di eminenti analisti, nè è stato per ora completamente usufruito.

Stokes, partendo dai risultati di Bessel, Baily e Dubuat, riprese a trattare analiticamente la quistione, e nelle sue ben note memorie, pubblicate nelle Philosophical Transactions di Cambridge, dopo aver mostrato che il valore attribuito a k da Poisson era troppo piccolo perchè non era stato tenuto conto dell'attrito interno del mezzo, ponendo a base delle sue ricerche l' ipotesi di oscillazioni infinitamente piccole in un mezzo incompressibile, giunse a stabilire come, nella teoria oggi ammessa sulla costituzione elementare dei fluidi, si deve avere:

$$(1)\qquad k=\frac{1}{2}+\frac{9\sqrt{2}}{4R}\sqrt{\eta}\sqrt{\frac{t}{\pi\rho}}=0,5+1,795240\frac{\sqrt{\eta}}{R}\sqrt{\frac{t}{\rho}},$$

ove t rappresenta la durata di un' oscillazione, ρ la densità del mezzo, R il raggio della sfera oscillante, η, infine, il coefficiente di attrito interno del fluido [3], ossia

[1] *Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels.* Abh. der kön. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1826. — *Versuche über die Kraft mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht.* Abh. d. kön. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1830. — *Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels für Berlin.* Abh. d. kön. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1835.

[2] *On the Correction of a Pendulum for the Reduction to a Vacuum* etc. Phil. Trans. Vol. 122, anno 1832.

[3] Maxwell in una Nota inserita nelle Phil. Trans. vol. 156, anno 1866, ed intitolata: *On the Viscosity or Internal Friction of Air and other Gases*, definisce questo coefficiente nel seguente modo. Si considerino due piani indefiniti paralleli e supponiamo impressa ad uno di essi una rotazione uniforme:

una costante rispetto alla natura ed alla forma del pendolo che si considera in un dato mezzo resistente. L'espressione (1), in cui η deve essere però considerato come una funzione della temperatura ([1]), concorda assai bene colle esperienze di Dubuat, Baily, Bessel e Coulomb; tuttavia non deve essere dimenticato che le circostanze in cui queste esperienze furono eseguite le rendono poco adatte a servire di definitiva verifica alla teoria sviluppata da Stokes; in realtà i valori dei termini di correzione alle durate delle oscillazioni osservate, dovuti all'attrito interno del fluido, sono estremamente tenui, e quindi le deduzioni che se ne possono trarre sono influenzate troppo sensibilmente dagli errori di osservazione se le esperienze non sono condotte con un' estrema delicatezza e precisione, ed intese direttamente allo scopo della verifica suddetta; inoltre i mezzi resistenti finora esperimentati non sono che l'acqua e l'aria sotto la pressione atmosferica ed a temperature determinate con ben poco rigore, mentre il coefficiente di attrito interno varia assai rapidamente colla temperatura e colla natura del mezzo.

O. E. Meyer, riprendendo lo stesso argomento, dopo aver completato in una prima Memoria ([2]) la teoria di Stokes, la estese in una seconda Memoria ([3]) al caso di piccole velocità di oscillazione in un fluido elastico, analiticamente mostrando, come del rimanente era da prevedere, che anche in questo sono applicabili le formule ricavate per il movimento pendolare in un fluido incompressibile tuttavolta che il movimento non ingeneri sensibili alterazioni di densità nel mezzo, e che possa quindi essere trascurato l'effetto dei rigurgiti e dei relativi vortici. Non vi ha bisogno per certo di ricordare l' importanza di queste ricerche analitiche che si collegano direttamente colla teoria molecolare dei fluidi, ma ci sembra sommamente interessante di allargarne la base esperimentale per constatare l'ammissibilità delle ipotesi su cui si fondano: per quanto plausibili possano infatti apparire tali ipotesi, i conseguenti risultati non possono essere accettati con piena fiducia senza questa verifica definitiva, tanto più che in pratica il movimento della parte di fluido trascinato dal pendolo non può avvenire senza uno scivolamento lungo la superficie del corpo oscillante, scivolamento che del resto è messo in piena evidenza da alcune esperienze di Helmholtz e Pietrowski ([4]). Un tale fenomeno non è stato fin qui sottoposto a calcolo; però l'alterazione che esso può produrre nella durata delle oscillazioni è certo funzione della costituzione fisica e sopratutto della scabrosità della superficie

in causa della viscosità dell'aria, ai diversi strati di questa viene successivamente comunicato il movimento. Sia f la frizione fra due strati contigui d'aria, v la velocità dello strato più prossimo al piano ed a la velocità di quello più prossimo al piano fisso, il coefficiente d'attrito η è definito dalla relazione ruotante $\eta = \frac{fa}{v}$.

([1]) Maxwell, nella Memoria citata più sopra, trova che la viscosità è indipendente dalla pressione ed è proporzionale alla temperatura assoluta. Questa legge, dedotta dalla rotazione di un disco nell'aria, merita tanto maggiore fiducia in quanto che verifica i risultati ottenuti da Graham con esperimenti di traspirazione di gas a traverso di tubi capillari.

([2]) *Ueber die pendelnde Bewegung einer Kugel unter dem Einflusse der inneren Reibung des umgebenden Mediums.* Crelle. Jour. f. d. Math. B. 73.

([3]) *Ueber die Bewegung einer Pendelkugel in der Luft.* Crelle. Jour. f. d. Math. Bd. 75.

([4]) Sitzungberichte k. k. Akad. 1860.

oscillante: reciprocamente le osservazioni fatte con superficie di costituzione fisica differente possono mettere in chiaro se un tale scivolamento esiste, od almeno se la sua influenza può essere soggetta a calcolo nel genere di misura di cui qui si tratta. Le ricerche fatte in questa via meritano, ci sembra, l'attenzione dei Fisici. D'altra parte l'estrema difficoltà della determinazione diretta del coefficiente di attrito interno di un fluido accresce l'importanza di esperimenti atti a porne in evidenza l'entità, e, sotto questo punto di vista, deve tenersi presente l'autorità di Maxwell, che, nella stessa Memoria in cui riporta le proprie ricerche sull'attrito interno dell'aria fatte per tutt'altra via, osserva che: « *The pendulum method is capable of great accuracy, and I believe that experiments are in progress by which its merits as a means of determining the properties of the resisting medium will be tested* » [1].

§ II.

La invariabilità della direzione e dell' intensità del peso non suole oggidì esser rivocata in dubbio, e se con ciò si vuole intendere che le alterazioni periodiche o secolari che tali quantità possono presentare sono insensibili ai nostri strumenti di misura e metodi di indagine fisica, questa idea di costanza può sembrare fino a un certo punto giustificabile. Bessel, nella sua classica Memoria sopra le irregolarità del Geoide [2], ricordava però in proposito che se l'interno della terra è fluido e la disposizione delle densità è periodicamente od irregolarmente variabile, anche la superficie di livello che è scelta a rappresentare la figura matematica del nostro pianeta deve essere periodicamente od irregolarmente deformata, e queste deformazioni possono venirci indicate dai cangiamenti delle direzioni nel sistema delle verticali dei varî punti terrestri: a questi elementi di misura si deve evidentemente aggiungere l' intensità della gravità. Ora uno dei periodi di variazione ci è noto ed è la marea: si può anzi dimostrare che la sua influenza deve essere sensibile pei nostri strumenti di precisione anche nelle alterazioni periodiche che ingenera nella intensità e nella direzione del peso.

Ma nella considerazione dei fenomeni naturali siamo abituati a fare astrazione dalle vibrazioni di minima ampiezza, per non considerare che i valori medî, che soli possono essere precisamente misurati. Per lo più è insormontabile la difficoltà di determinare la legge di un periodo breve, sia teoreticamente tenendo conto di tutti gli elementi che contribuiscono alla sua produzione, sia per mezzo dell' esperienza, in cui, in questo caso, si richiede sempre un lungo numero di osservazioni e un' estrema delicatezza nell' eseguirle; tuttavia il complesso di un fenomeno e i suoi caratteri generali restano con tutta chiarezza definiti allorchè le piccole irregolarità periodiche vengono trascurate. È solo quando cotesti caratteri sono entrati nel campo delle nostre cognizioni e, diremmo quasi, dell' erudizione comune, che si ritorna alle anomalie accessorie per classificare i periodi e per studiarne le cagioni, e non di rado questa nuova analisi, in cui si entra con idee preconcette e definite, è stata in ogni scienza feconda di grandi scoperte.

[1] Phil. Trans. Vol. 156, loco citato, pag. 250.

[2] *Ueber den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten* etc. Astr. Nachr. 14, pag. 269.

Se nello stato attuale dei nostri metodi il breve periodo di variazione negli elementi della gravità sopra indicato non può per ora essere sottoposto a misura, altri periodi assai più lunghi che per avventura esistessero meriterebbero ben altra considerazione; nè sarebbe il caso per certo di negarli a priori solo perchè l'idea della costanza di certe quantità fisiche è cresciuta con noi ed è ammessa dai più. Manchiamo per ora di tutti gli elementi per un tale diniego, nè qui è certo la prima volta che si parla della variabilità del peso: le idee esposte dal sig. Grablowitz sul fenomeno delle maree sotterranee osservate a Dux dall'ing. Klönne (1) tenderebbero anzi ad assegnare alla variabilità del peso un ben notevole valore.

Noi non oseremmo sperare con Pictet (2) che in un tempo relativamente breve tali variazioni possano illuminarci sulla natura della gravitazione universale; se esse venissero poste fuor di dubbio e la loro legge corrispondesse a quella che consegue dalla attuale teoria sulla costituzione molecolare dei corpi, certo questa concordanza accrescerebbe la probabilità in favore della teoria suddetta, ma non sarebbe una prova irrefragabile del movimento iniziale della materia, giacchè a spiegarle si possono immaginare molte altre cause, che a priori non sono di questa meno ammissibili. Analogamente la costanza nell' intensità del peso, sotto questo punto di vista, sarebbe pure ben poco concludente, giacchè la diminuzione del peso, corrispondente al massimo di forza viva assorbita dai pianeti principali del sistema solare nei momenti in cui il complesso delle loro velocità è massimo, non è funzione che del rapporto fra l'assorbimento suddetto e la forza viva totale. Ma nell'attuale stato delle nostre conoscenze non vi ha nulla di improbabile nell'ammettere che gli elementi che possiamo introdurre in un simile genere di calcolo si riferiscano ad un numero estremamente limitato di corpi celesti del nostro sistema planetario e siano affatto insufficienti alle bramate conclusioni, giacchè è possibile che la materia cosmica, che ci viene rivelata sotto forma di frammenti o di asteroidi o che, in anelli di materia attenuata può circolare intorno al sole, presenti un minimo di assorbimento di forza viva corrispondente al massimo sopra indicato o, sopratutto, che sia tanta da rendere la diminuzione del peso completamente inapprezzabile alle nostre più spinte approssimazioni.

È però fuori di dubbio che l' istituzione di indagini periodiche sulla gravità, fatte colla massima delicatezza di osservazione e l' ultimo grado di precisione possibile, merita tutta l'attenzione dei Fisici e degli Astronomi ed ha una grande importanza scientifica. Potrebbe ad alcuno sembrare che, in ciò, i regolatori astronomici a pendolo presentassero il più comodo ed il più vantaggioso metodo di ricerca: ma tutti coloro che hanno avuto occasione di usare diuturnamente di un simil genere di orologi per osservazioni di alta precisione non possono essere tratti di certo in simile inganno, giacchè, ammesso anche una eccellente compensazione e che il mezzo in cui il pendolo oscilla abbia una pressione ed una temperatura perfettamente costanti, resta tuttavia una grande quantità di cause di perturbazione che si rivelano anche troppo, e a volte

(1) Vedasi in proposito la nota di C. Lagrange inserita negli Annales de Chimie et Physique. Paris 1882.

(2) Ann. de Chimie et Physique. Paris 1882.

bruscamente, nell'andamento del pendolo stesso studiato a lunghi intervalli: sarebbe inutile di spendere altre parole su questo proposito.

Secondo il nostro modo di vedere l' intensità del peso dovrebbe dunque negli osservatorî essere considerata come uno di quei dati fondamentali ai quali gli astronomi annettono giustamente tanta importanza e che verificano via via, aumentando la precisione delle determinazioni a misura che cresce la delicatezza degli strumenti e dei sistemi analitici di calcolo: un tal genere di ricerche periodiche ha dato occasione a dei lavori ben noti, fra cui ci contentiamo di ricordare la Memoria del prof. Em. Fergola ([1]) sulla variabilità secolare dell'asse di rotazione terrestre; non sappiamo però intendere perchè si debba assegnare alle latitudini una importanza scientifica tanto superiore agli altri elementi, i quali, sebbene meno direttamente utili nei lavori diuturni di un Osservatorio, concorrono però collo stesso grado d' importanza alla soluzione dell' insieme dei problemi che debbono completare la teoria della Gravitazione Universale. D'altra parte un simile nostro modo di pensare prende nuovo fondamento nell' esame degli ampî lavori che sulla gravità si sono compiuti in questi ultimi tempi e in Europa e in Asia e in America.

§ III.

Dopo le esperienze di Kater ([2]) e le preziose indicazioni di Bessel, i pendoli ad inversione furono a preferenza usati nelle determinazioni dell' intensità del peso: ed era ben naturale, giacchè lo scopo principalmente geodetico di queste determinazioni poneva la facilità di trasporto e di sistemazione degli apparecchi di misura a primo requisito da ricercarsi: ma oggidì le idee su questo genere di istrumenti sono sostanzialmente cangiate.

La notata influenza delle trepidazioni dei sostegni, le quali, dietro le esperienze di Hirsch e Plantamour, sembrano essere ancora notevoli quando i coltelli vengono sorretti da pilastri, ha gettato sui risultati ottenuti per tale strada un velo di sfiducia, tantochè, in una relazione di Plantamour rivolta alla presidenza della Commissione permanente per la misura dei gradi, si trova espresso chiaramente il giudizio che per la maggior parte delle stazioni fatte per misurare la gravità coi pendoli ad inversione i risultati non possono essere considerati che come provvisorî. Dalle note esperienze di Peirce e dall'analisi teoretica che egli fece di siffatta quistione risulterebbe che ad ogni pendolo invertibile compete una costante di correzione sua propria, la quale deve essere determinata esperimentalmente per mezzo del paragone fra i valori ottenuti coll'istrumento cui la costante appartiene e quelli dati da altri sistemi di misura che non offrano appiglio a sospetti. La correzione che ne risulterebbe è d'altronde così notevole che non sarebbe per certo possibile di trascurarla: così in due degli istrumenti studiati dal Peirce essa ascende a $0^{mm}, 25$ e nel terzo a $0^{mm}, 18$ sulla lunghezza del pendolo semplice sessagesimale. A questa difficoltà di pratica attuazione della tanto semplice idea del pendolo invertibile se ne aggiungono altre di ordine teoretico, giacchè la legge del movimento pendolare in un mezzo resistente elastico per

([1]) Società reale di Napoli. Atti, Vol. VI, n. 10.
([2]) Phil. Trans. for 1819.

un corpo di forma così speciale come è quella di un pendolo invertibile, non è matematicamente stata determinata, e tale determinazione presenta anzi delle grandi difficoltà di sviluppo analitico, mentre l'influenza dell'attrito interno del mezzo e della porzione di questo mezzo che è messa in moto dal corpo oscillante è in questo caso evidentemente ben più sensibile che nei pendoli a filo. A nessuno può sfuggire frattanto l'importanza di vincere tutte queste difficoltà ed altre ancora su cui ci fermeremo fra breve, per rendere attuabile il principio della invertibilità dei centri di sospensione e di oscillazione, tanto più che all'instabilità, lamentata più volte, della temperatura negli osservatorî geodetici provvisorî si può rimediare con metodi già in questi ultimi tempi entrati negli usi comuni delle campionature e delle misure lineari di laboratorio. La Commissione permanente già più volte ricordata cercò a più riprese di rivolgere l'attenzione dei suoi membri su tale argomento, invitandoli inoltre a ricercare se sia possibile di usufruire delle tante misure di gravità già fatte, determinando delle costanti di correzione almeno per quelli fra gli apparecchi usati che non sono andati distrutti. Sul primo di questi scopi è certo da notare la proposta di Faye (analiticamente discussa poi da G. S. Peirce) ([1]), proposta che tende ad impedire la trepidazione dei sostegni col mezzo di due pendoli isocroni sospesi al medesimo asse ed oscillanti con fasi contrarie. In mancanza della coincidenza perfetta nei massimi delle fasi, la lieve trepidazione dell'asse di sospensione non avrebbe influenza nella media durata delle oscillazioni dei due pendoli: tuttavia non dobbiamo passare sotto silenzio che se, in questo sistema, i corpi oscillanti, che naturalmente debbono essere assai prossimi, dovessero oscillare nell'aria, i loro movimenti s'influenzerebbero mutuamente; inoltre l'attuazione del progetto di Faye presenta delle altre gravi difficoltà da sormontare, sulle quali non è qui il caso di dilungarci, mentre sotto il punto di vista teoretico resta a dimostrare che le vibrazioni interne dell'asse di sospensione non hanno influenza sul movimento delle due sbarre oscillanti.

In quanto all'influenza dell'aria, di cui sopra abbiamo parlato, è noto come già da molto tempo si è cercato di costruire dei pendoli ad inversione oscillanti nel vuoto: il costo elevato di questi nuovi apparecchi, dei quali la bontà non è per anco constatata dall'esperienza, può appena essere giustificato dall'aumento grandissimo della precisione di misura, dovuto all'aumento dell'intervallo di tempo durante il quale le osservazioni delle coincidenze possono essere protratte. Su questo proposito dovremo tornare più a lungo parlando del sistema da noi scelto per l'apprezzamento degli intervalli suddetti: qui è solo conveniente ricordare che una coincidenza non è un fenomeno determinato ed istantaneo come piace a molti di supporre; così esistono dei pendoli per i quali, ammessa una coincidenza, non vi ha poi altra coincidenza possibile teoreticamente; fisicamente essi presentano tuttavia dei gruppi di coincidenze successive, lo che vale quanto dire che una coincidenza fisica è suscettibile d'errore d'apprezzamento, come qualunque altro genere di misura. Ne risulta naturalmente che la precisione dei risultati ottenuti dagli attuali pendoli ad inversione, come da ogni altro pendolo, è proporzionale all'intervallo fra la prima e l'ultima coincidenza o analogo apprezzamento del tempo.

([1]) American Journal of Science and Arts. Vol. XVIII. Aug. 1879.

Non è qui il caso per certo di passare in rassegna i molti lavori e le molte considerazioni pubblicate in questi ultimi anni sui pendoli invertibili, giacchè ciò che è stato sopra citato è sufficiente a porre in piena luce lo stato della questione che anche oggi si dibatte sopra di essi; solo ne facciamo parola perchè tali lavori dimostrano quanto interesse ha destato siffatta questione e quanto è generale l'idea che si debba trovare il modo di togliere dal sistema di misura del peso per mezzo del principio di reciprocità fra gli assi di oscillazione e di sospensione qualunque sorgente di dubbio e di incertezza.

§ IV.

È noto ancora come, dopo Laplace, il Villarceau, in una Memoria pubblicata nel 1879, richiamò l'attenzione sopra l'influenza che ha la forma cilindrica ed il rotolamento dei coltelli dei pendoli ad inversione sulla durata delle oscillazioni; quel-l'illustre scienziato concluse essere importante di fare delle esperienze comparative tra pendoli a coltelli taglienti e pendoli a coltelli arrotondati, e tale conclusione deve essere evidentemente estesa anche al caso dei così detti pendoli di Borda. Ci sembra utile di notare che tali esperienze non hanno che un'importanza relativa fino a che teoreticamente, partendo da ipotesi che non lascino campo a sospetti, non si sia posto in chiaro la natura di questa lamentata influenza, e così l'esperimento non debba servire che alla determinazione di costanti di correzione, se pure è possibile di giungervi. Le esperienze di Baily e le conclusioni che ne trae sono, sotto questo punto di vista, assai scoraggianti; egli si esprime con tanta sicurezza in proposito che non possiamo a meno di riportare le sue stesse parole, le quali, venendo da siffatta autorità scientifica, gettano un deplorabile dubbio anche sulla maggior parte dei lavori più recenti o che si stanno attualmente compiendo. Dopo avere ricordate le anomalie osservate da Sabine nelle sospensioni a coltelli, e notato che altre ben più forti ne avrebbe potuto osservare se avesse maggiormente variate le circostanze degli esperimenti, Baily conclude [1]: « *The fact, I believe to be, that the pendulum furnished with a knife edge and agate planes, as at present constructed, is a very inadequate instrument for the delicate purposes for which it was originally intended: and a more rigid examination and adjustement of that part of the instrument are requisite, before we can depend on the experiments made with it, either for the determination of the length of the seconds pendulum, or even for the comparison of results obtained in different parts of world .... But the fact is rendered still more evident by reversing the pendulum in the V's, when a sensible difference in the result generally take place. Amongst the numerous pendulums in my possession, I have not met with more that one, that does not differ in the results by an appreciable quantity, when the pendulum is reversed in the V's, or tourned half round in azimuth* ».

In realtà questa quistione si connette intimamente con quella delle pesate di precisione, quantunque in queste le irregolarità dei tagli dei coltelli, le loro flessioni laterali, la loro elasticità e l'attrazione fra il coltello ed il piano d'appoggio

[1] Phil. Trans. Vol. 122, loco citato, pag. 465.

non si rivelino che saltuariamente dopo una sospensione del giogo; così è prevedibile che, ammessa l'influenza della superficie di rotolamento sulla durata e sulle ampiezze di oscillazione, questa influenza sia variabile anche da coltello a coltello fra quelli che hanno la stessa apertura di cuneo, e ciò tanto più quanto più acuta è quest' apertura. Le esperienze di confronto che Bessel ha fatto col suo sistema di pendolo differenziale fra le sospensioni a coltelli e quelle a lamine fisse non possono servire in modo veruno a risolvere la quistione discussa dal Villarceau, giacchè nel sistema immaginato da Bessel i risultati sono sensibilmente indipendenti dal modo di sospensione. A parer nostro la correzione degli errori pel rotolamento, se pur è possibile determinarla distinguendo gli errori costanti dagli accidentali, dev' essere fatta individualmente per ciascun apparecchio e per mezzo del confronto con apparecchi fissi, dei quali i resultati sieno indipendenti dal modo di sospensione del corpo oscillante.

§ V.

È noto il metodo proposto per la misura della gravità dal prof. Govi, metodo che consiste nel determinare le durate di oscillazione di una verga rigida munita di una sospensione a coltelli in una delle sue estremità, lungo la quale verga si fa scorrere e si fissa in diverse posizioni un peso accessorio (*curro*), che serve a cambiare successivamente la durata di oscillazione in corrispondenza col suo spostamento lineare, spostamento che può essere determinato con tutta precisione. Le differenze fra le durate delle oscillazioni corrispondenti a diverse posizioni del curro servono allora a determinare senza incertezza le relazioni fra i momenti d'inerzia dei corpi oscillanti rispetto al loro comune asse di sospensione, e queste relazioni insieme alle durate suddette danno il mezzo di risalire alla lunghezza cercata del pendolo a secondi.

L'idea che informa questo metodo non differisce da quella che informa il metodo del pendolo di Bessel e che fu, per quanto sappiamo, per la prima volta proposta da Prony in una Memoria letta nell'Accademia delle scienze a Parigi nel marzo 1792 e che si trova poi discussa dallo stesso autore nelle sue lezioni di Meccanica analitica (¹). I diversi sistemi di misura che si fondano su questa stessa idea possono essere raggruppati sotto il nome di sistemi ad *osservazioni conjugate differenziali*, ma fra questi il metodo indicato dal prof. Govi ha tutti gli svantaggi di quello del pendolo ad inversione già sopra discusso e introduce per di più la difficoltà di fare scorrere un peso lungo una verga, parallelamente a sè stesso e in modo che il suo centro di gravità rimanga sempre sulla stessa retta. Sotto questo punto di vista il sistema originalmente indicato da Prony, che consiste nel fissare in diversi punti di una sbarra pesante dei coltelli di sospensione, ed osservare quindi le durate di oscillazione relative a ciascuno di questi, è senza dubbio più semplice, più facilmente applicabile, e presenta la possibilità di una maggiore precisione nella determinazione delle distanze.

(¹) *Leçons de Mécanique analytique*; da pag. 338 a pag. 342. Paris 1815.

§ VI.

Da ciò che fin qui abbiamo ricordato si scorge l' importanza delle seguenti ricerche:

1° Determinare il valore assoluto della gravità colla massima precisione compatibile colle attuali ultime suddivisioni osservabili sia lineari come di tempo.

2° Determinare la costante di correzione per l' influenza dell' aumento del momento d' inerzia del pendolo, aumento dovuto alla porzione del mezzo che esso trascina nell' oscillazione, tale determinazione essendo fatta in circostanze fisiche molto più varie di quelle tenute da Bessel.

3° Verificare la legge di Stokes, e determinare in conseguenza il coefficiente dell' attrito interno sia per l'aria sia per altri gas e liquidi a temperature e pressioni differenti, per dedurre la legge di variazione di tale coefficiente (¹).

4° Verificare se lo scivolamento del mezzo lungo la superficie di un corpo oscillante ha influenza sensibile sulla durata delle oscillazioni.

5° Istituire l'esperienza in modo da poter con tutta facilità ripetere periodicamente la determinazione della gravità, sia per constatarne la costanza o la variazione secolare, sia per dedurre le costanti istrumentali di altri apparecchi atti a dare differenzialmente i valori della gravità nei punti principali delle nostre reti geodetiche.

A tale ordine di idee fummo richiamati quando la Commissione Superiore dei pesi e misure, della quale abbiamo l'onore di far parte, dietro proposta del suo presidente, l'illustre prof. Cannizzaro, incaricò noi e il prof. Respighi di fare delle esperienze per determinare la gravità in Roma. Nell' accettare una tale onorevole missione noi non disconoscevamo le difficoltà che avremmo dovuto vincere, e il grande numero di questioni accessorie che dovevano essere prima risolute perchè la determinazione meritasse la fiducia desiderata dai Commissari nostri colleghi; ma abbiamo sperato, che, unendo ai mezzi che il Ministero d'Agricoltura Industria e Commercio poneva a nostra disposizione, quelli dei nostri proprî gabinetti, e dedicando esclusivamente la nostra attività a tale ricerca, il lavoro non solo raggiungerebbe lo scopo che la Commissione si proponeva, ma riuscirebbe altresì scientificamente efficace allo svolgimento completo di una parte delle suddette importanti quistioni che colla determinazione della gravità intimamente si connettono. Fissi in questo intento, per noi la scelta del metodo di osservazione presentò fin dal principio delle gravi difficoltà: abbandonata l'idea del pendolo ad inversione e quella del Govi, era necessario di ricorrere ad un pendolo a filo, e fra il metodo di Borda e il metodo differenziale di Bessel non potevamo rimanere perplessi; tuttavia ci sembrava che nè l'uno nè l'altro fossero sufficienti al pieno sviluppo del nostro programma. Infatti lo studio completo dell' influenza del mezzo in cui il pendolo oscilla non è possibile sperimentalmente se non si può

(¹) In proposito ricorderemo che i tre metodi fin qui usati per questa determinazione sono i seguenti: 1.° Metodo di rotazione di una lastra piana nell'aria (Maxwell). 2.° Metodo di trasfusione detto anche di traspirazione a traverso tubi capillari (Graham). 3.° Metodo del pendolo. Sull' importanza relativa di questi metodi si debbono ricordare le parole di Maxwell, già citate a pag. 60.

far oscillare un pendolo successivamente nel vuoto e in mezzi di diversa natura ed a pressioni e a temperature diverse: ora cotesto studio ci interessava sopra ogni altra cosa. Dopo un particolareggiato esame e diverse esperienze preliminari ci decidemmo di adottare come base del metodo di determinazione del valore assoluto della gravità il principio fondamentale del pendolo a filo di Bessel, salvo a determinare le costanti di riduzione al vuoto per altra via, mediante cioè un altro apparecchio, atto alla ricerca delle relazioni fra le durate delle oscillazioni di un pendolo oscillante ora nel vuoto ora in mezzi diversi sotto determinate pressioni e determinate temperature costanti. Il primo pendolo serve dunque a dare la durata delle oscillazioni nell'aria per certi pendoli composti, indipendentemente dal modo di sospensione e da ogni causa di errore costante o di influenza perturbatrice dovuta alla costruzione dell'apparecchio stesso (¹): però esso fu costruito per modo da rendere possibile la massima varietà di circostanze negli esperimenti e da poter contribuire alle ricerche da farsi più particolarmente col secondo pendolo; quest' ultimo è destinato allo studio dell' attrito interno dei diversi mezzi a diverse temperature e pressioni e a dare le costanti necessarie per la riduzione al vuoto; alcuni apparecchi accessorî sono poi stati aggiunti per lo studio della diminuzione delle ampiezze dovuta alla resistenza dei mezzi. La descrizione del secondo pendolo e di questi ultimi apparecchi non fa parte di questo lavoro, ma sarà pubblicata in un'altra Memoria tostochè le relative esperienze saranno compiute; però questo momentaneo ritardo non deve rappresentare una lacuna in ciò che ora pubblichiamo, perocchè le esperienze col pendolo fondamentale per la determinazione del valore assoluto della gravità sono state fatte in guisa che già da sole sono sufficienti ad ottenere questo valore, ed anche a delineare le principali conseguenze che ci ripromettiamo di trarre dal seguito delle nostre ricerche.

§ VII.

È nota la semplicità dell'idea su cui è fondato il pendolo differenziale di Bessel: ad ovviare alle difficoltà che si presentano nel determinare esattamente rispetto all'asse di rotazione i momenti d' inerzia delle diverse parti costitutive di un pendolo composto, Bessel imaginò di fare oscillare due pendoli, di cui le lunghezze differissero fra loro di una quantità perfettamente nota, deducendo da questa costante e dalle durate di oscillazione osservate le lunghezze dei pendoli stessi. In realtà questi due pendoli nell'apparecchio di Bessel sono composti successivamente dalla stessa palla sospesa a due fili di diversa lunghezza; in tal caso nella determinazione dei pendoli semplici isocroni coi composti, il momento d'inerzia della palla rispetto ad un suo diametro non comparisce che in termini di correzione i cui valori sono assai piccoli, e quindi non vi ha bisogno di conoscerlo che con una approssimazione più che accessibile ai nostri mezzi di misura: le distanze poi fra i

(¹) A questo proposito ricorderemo le parole stesse di Bessel: *Diese Idee der anzuwendenden Methode, und die Art wie sie, meiner Meinung nach, so ausgeführt werden konnte, dass die Genauigkeit des Resultats nicht von dem Apparate, sondern allein von dem Fleisse, welchen man auf die Beobachtungen und ihre Wiederholung verwendet, begrenzt wird, theilte ich im Anfange des Jahrs* 1823 *Herrn Repsold in Hamburg mit, und* ecc. Bessel, *Untersuchungen über die Länge* ecc., l. c. pag. 2.

baricentri dei pendoli composti e l'asse di sospensione sono fra le incognite da determinare, dimodochè restano del tutto eliminate le difficoltà fisiche inerenti alla misura delle distanze fra i centri di gravità delle diverse parti costitutive dei pendoli composti e l'asse di sospensione. In quanto all'influenza del modo di sospensione, essa resta eliminata, giacchè, nel modo di calcolo indicato da Bessel, si viene a determinare la posizione dell'asse ideale intorno a cui oscillano i baricentri dei pendoli composti, asse essenzialmente diverso dall' asse materiale di sospensione: la delicata analisi che l'illustre astronomo ha sviluppato sull'influenza dell' elasticità della lamina vibrante nei suoi pendoli moventisi su sviluppate di cilindri (') non lascia alcun dubbio su questo proposito. Così le esperienze fatte con sospensioni a coltelli a morse e a cilindri di inviluppo condussero Bessel sempre allo stesso risultato: abbiamo visto che quest'ultimo vantaggio è fondamentale per l'intento che ci eravamo proposto.

Riassumeremo qui in breve le formule ottenute analiticamente da Bessel, introducendovi quei lievi cangiamenti che ci sono imposti dalla diversità degli apparati di misura, e dalla considerazione dell'attrito interno dell'aria. Rappresentiamo con λ la lunghezza del pendolo a secondi sotto la latitudine φ del luogo di osservazione ed all'altezza di questo sul mare, con L la lunghezza del pendolo semplice isocrono con un certo pendolo composto, di cui la durata di oscillazione è t: in questo pendolo sia m la massa del corpo oscillante, s la distanza del suo baricentro dall'asse di sospensione, m' la massa del fluido spostato, s' la distanza del baricentro di questa dall'asse suddetto; si dimostra che fra tali quantità sussiste la relazione:

$$\text{(2)} \qquad L = \lambda t^2 \frac{1 - \frac{m' s'}{m s}}{1 + \frac{m'}{m} k},$$

essendo k una certa quantità che Bèssel, nella sua prima Memoria, ritenne costante rispetto alla durata di oscillazione e alla densità del mezzo, ma che Stokes e Meyer, come già fu ricordato, hanno dimostrato legata a tali quantità ed al raggio del corpo oscillante supposto sferico, dalla relazione

$$\text{(3)} \qquad k = 0{,}5 + 1{,}795240 \sqrt{\eta} \sqrt{\frac{t}{\rho R^2}}.$$

Il significato delle notazioni che compariscono in questa ultima formula è quello già indicato nel § I. Il valore di η (coefficiente di attrito), dietro le già ricordate esperienze di Maxwell e di Graham, è costante per uno stesso mezzo rispetto alla pressione, ma proporzionale alla temperatura assoluta; rappresentando con θ la temperatura centigrada ordinaria, con η_0 il coefficiente di attrito corrispondente allo zero assoluto si ha in conseguenza:

$$\eta = \eta_0 \, (273 + \theta)$$

e quindi:

$$k = 0{,}5 + 1{,}795240 \sqrt{\eta_0} \sqrt{\frac{t(273 + \theta)}{\rho R^2}}$$

(') *Untersuchungen* etc. loco citato, pag. 104.

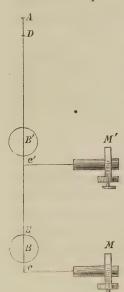
ove η_0 per un dato mezzo è una costante. Combinando la (2) colla (3) e facendo

$$\lambda = \lambda_0 + x, \qquad \sqrt{\eta_0} = y$$

avremo adunque:

$$(4)\quad L = \lambda_0 t^2 \left(1 - \frac{m' s'}{ms}\right) - 0{,}5\, L \frac{m'}{m} + x t^2 \left(1 - \frac{m' s'}{ms}\right) - 1{,}795240\, y L \frac{m'}{m} \sqrt{\frac{t(273+\theta)}{\rho R^2}}$$

ove λ_0 rappresenterà un valore prossimo, scelto arbitrariamente, della lunghezza del pendolo sessagesimale alla latitudine ed altitudine del punto di osservazione, x la piccola correzione da farsi a λ_0 per ottenere il vero valore del pendolo sessagesimale suddetto, y una certa quantità incognita (¹) dipendente dal coefficiente di attrito interno del mezzo e quindi variabile col mezzo stesso.

Ciò premesso prendiamo a considerare un pendolo composto, consistente in una sfera B sospesa ad un punto fisso A per mezzo di un filo metallico, il modo di sospensione essendo qualunque. Facciamo pel momento astrazione dalla rotazione terrestre: se dopo avere spostato la palla, tenendo teso il filo, la si lascia cadere, si produce un movimento oscillatorio intorno alla verticale compreso in un piano determinato: ma, qualunque sia il modo di sospensione, questo movimento oscillatorio è sincrono a quello di un pendolo composto consistente nella stessa sfera B sospesa ad un certo punto D per mezzo di un filo metallico ideale, ma eguale in tutto, salvo che in lunghezza al filo materiale che sorregge la palla B considerata. Sia C D la verticale del punto D, e, scelto arbitrariamente su di essa il punto C, rappresentiamo con F la distanza C D. Il punto C si suppone fisicamente individuato, per es. dall'incontro di C D coll'asse di collimazione di un microscopio orizzontale M convenientemente situato. Siano inoltre h_1 la distanza fra B e C quando il pendolo è in riposo, m_1, m_2 le masse ed s_1, s_2 le distanze da D dei baricentri della porzione del filo D E e della sfera B; μ_1, μ_2 infine i relativi momenti d'inerzia presi rispetto ad assi orizzontali, passanti per i baricentri suddetti. È noto che la lunghezza L_1 del pendolo semplice isocrono col pendolo composto D B sopra particolareggiato è data da:

$$L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2 + m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2}{m_1 s_1 + m_2 s_2}.$$

Però di solito si hanno da considerare oltre il filo e la palla anche altre piccolissime masse accessorie che servono sia per sospendere il pendolo, sia per congiungere il filo alla palla, sia per altri usi che qui è inutile di ricordare: supponendo dunque che sia n il numero totale dei pezzi costitutivi del pendolo, porremo:

$$L_1 = \frac{\sum_{r=1}^{r=n} \mu_r + \sum_{r=1}^{r=n} m_r s_r^2}{\sum_{r=1}^{r=n} m_r s_r}$$

(¹) Nel nostro caso conviene però considerare y come variabile anche colla natura della superficie del corpo oscillante a fine di tener conto dell'influenza dello scivolamento del mezzo lungo tale superficie.

Intenderemo che in questa relazione l'indice n si riferisca agli elementi relativi alla palla oscillante. Se ne trae senza difficoltà:

$$L_1 = s_n - \frac{m_1 s_1 (s_n - s_1) + m_2 s_2 (s_n - s_2) + \dots m_{n-1} s_{n-1} (s_n - s_{n-1}) - (\mu_1 + \mu_2 \dots + \mu_n)}{m_1 s_1 + m_2 s_2 \dots\dots + m_n s_n}$$

Se si fa:

$$(5) \qquad c_1 = \frac{\Sigma_{r=1}^{r=n-1} m_r s_r (s_n - s_r) - \Sigma_{r=1}^{r=n} \mu_r}{\Sigma_{r=1}^{r=n} m_r s_r}$$

e si osserva che, nelle notazioni sopra stabilite, si ha $s_n = F - h_1$, si ottiene:

$$L_1 = F - h_1 - c_1$$

ed, in conseguenza, la relazione (4) dà:

$$(6) \qquad F = h_1 + c_1 + \lambda_0 t_1^2 \left(1 - \frac{m' s'}{ms}\right) - 0{,}5 (F - h_1 - c_1) \frac{m'}{m} +$$

$$+ x t_1^2 \left(1 - \frac{m' s'}{ms}\right) - 1{,}795240\, y_1 (F - h_1 - c_1) \frac{m'}{m} \sqrt{\frac{t_1 (273 + \theta_1)}{\rho_1 R^2}} .$$

In questa espressione non è tenuto conto della flessibilità del filo, della quale l'influenza, come ha notato pel primo Laplace, corrisponde ad un piccolo aumento nella durata di oscillazione. Per tener conto di tale influenza è sufficiente fare una leggiera correzione al valore di c_1 calcolato dall' equazione (5), correzione che può essere posta sotto la forma della serie [1]:

$$-\frac{(L - R') \mu'^2_n}{m'^2_n R' L^3} + \frac{(L - R') \mu'^3_n}{m'^2_n R'^2 L^4} \dots,$$

dove L indica, come più sopra, la lunghezza del pendolo semplice isocrono col pendolo composto considerato, m'_n, μ'_n sono rispettivamente i valori che prendono m e μ per il corpo sospeso al filo flessibile, ed R' è la distanza fra il baricentro di questo corpo ed il punto in cui è sospeso al filo. Della serie precedente basta naturalmente introdurre in calcolo il solo primo termine, cosicchè nella (6) supporremo che c_1 sia determinato dall'espressione:

$$(7) \qquad c_1 = \frac{\Sigma_{r=1}^{r=n-1} m_r s_r (s_n - s_r) - \Sigma_{r=1}^{r=n} \mu_r}{\Sigma_{r=1}^{r=n} m_r s_r} - \frac{(L - R') \mu'^2_n}{m'^2_n R' L^3} .$$

È utile notare che nel calcolo della piccola correzione per la flessibilità del filo si ammette cha la palla possa liberamente ruotare intorno al suo punto di congiunzione col filo stesso: la formula sopra scritta non è dunque che approssimativa, giacchè l' ipotesi su cui si fonda non è praticamente realizzabile: però se il filo è assai pieghevole e sottile, l'errore che si commette ritenendo la (7) come esatta è del tutto trascurabile. Il valore di c_1 nella (6) poi deve essere considerato come una correzione assai piccola da farsi alla quantità $F - h_1$, e si comprende quindi come nel calcolo della (7) si possa avere tutta la precisione desiderabile anche se in luogo di $\mu_1, \mu_2, \dots\dots \mu_n$, $s_1, s_2, \dots\dots s_n$, $m_1, m_2, \dots\dots m_n$ vi si introducono dei valori approssimati,

[1] Bessel, *Untersuchungen über die Länge* ecc. loco citato, pag. 135.

quali si possono sempre trarre da misure dirette di distanza e di peso fatte sul pendolo composto: del resto il procedimento di questo calcolo sarà esposto a suo tempo tenendo conto, fra gli errori commessi nelle misure suddette, di quelli che più influiscono sul risultato, e che sono l' errore fatto nella misura di s_n a causa della differenza fra l'asse materiale e l'asse ideale di sospensione, e l'errore nella determinazione del baricentro della palla, dipendente dalla irregolare ed ignota distribuzione della densità nel metallo di questa. Qui riterremo ora c_1 come una quantità nota, e nella (6) considereremo solo come incognite x, y, ed F.

§ VIII.

Ma fra queste incognite x, y, F vi ha una differenza fondamentale, poichè mentre le prime due rimangono le stesse qualunque sia la grandezza e la densità della palla e la lunghezza del filo, F invece cambia in generale da pendolo a pendolo, dimodochè, per ogni esperienza fatta con un pendolo diverso, si viene ad introdurre in calcolo un nuovo valore incognito da determinare. Supponiamo però che del filo di sospensione A B (v. fig. precedente) sia stata tolta una parte, per modo che il baricentro della palla B sia venuto ad occupare la nuova posizione B'; rappresentiamo con t_2, h_2, c_2, ρ_2 i nuovi valori che assumono in questo caso t_1, h_1, c_1, ρ_1, e con λ'_0 il valore di λ_0 ridotto per la differenza di altitudine fra i punti B e B'; è facile comprendere che il punto D, e quindi l'asse ideale di sospensione, deve essere rimasto sensibilmente lo stesso: ad ogni modo però dall'analisi che sarà esposta nel § XXX, e dai valori riportati ai pie' delle tavole degli elementi dei nostri pendoli, resterà indiscutibilmente dimostrato che la piccola variazione che può subire D, e che in ogni caso non può superare in valore la quantità indicata con i nel paragrafo sopra citato, non ha apprezzabile influenza nei risultati. Porremo adunque:

$$(8)\qquad F = h_2 + c_2 + \lambda'_0 t_2^2 \left(1 - \frac{m''' s'''}{m'' s''}\right) - 0{,}5\,(F - h_2 - c_2)\frac{m'''}{m''} +$$

$$+ x t_2^2 \left(1 - \frac{m''' s'''}{m'' s''}\right) - 1{,}795240\, y\, (F - h_2 - c_2)\frac{m'''}{m''}\sqrt{\frac{t_2\,(273 + \theta_2)}{\rho_2 R^2}}.$$

L' eliminazione di F fra la (6) e la (8) si può fare molto semplicemente ricordando che $F - h_1 - c_1$, $F - h_2 - c_2$ sono le lunghezze dei pendoli semplici che hanno per tempi di oscillazione t_1, t_2, e quindi si ha prossimamente:

$$\frac{F - h_1 - c_1}{F - h_2 - c_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$$

da cui si deduce:

$$F - h_1 - c_1 = \frac{h_2 + c_2 - h_1 - c_1}{(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)}\, t_1^2$$

$$F - h_2 - c_2 = \frac{h_2 + c_2 - h_1 - c_1}{(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)}\, t_2^2.$$

Ponendo dunque:

$$\gamma = \frac{h_2 + c_2 - h_1 - c_1}{(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)}$$

$$(9)\left\{\begin{aligned}
A_1 &= h_1 + c_1 + \lambda_0 t_1^2 \left(1 - \frac{m' s'}{m s}\right) - 0{,}5\,\gamma\, t_1^2 \frac{m'}{m} \\
B_1 &= t_1^2 \left(1 - \frac{m' s'}{m s}\right) \\
C_1 &= -1{,}795240\,\gamma\, t_1^2 \frac{m'}{m} \sqrt{\frac{t_1 (273 + \theta_1)}{\rho_1 R^2}} \\
A_2 &= h_2 + c_2 + \lambda'_0 t_2^2 \left(1 - \frac{m''' s'''}{m'' s''}\right) - 0{,}5\,\gamma\, t_2^2 \frac{m'''}{m''} \\
B_2 &= t_2^2 \left(1 - \frac{m''' s'''}{m'' s''}\right) \\
C_2 &= -1{,}795240\,\gamma\, t_2^2 \frac{m'''}{m''} \sqrt{\frac{t_2 (273 + \theta_2)}{\rho_2 R^2}}
\end{aligned}\right.$$

la (6) e la (8) sottratte l'una dall'altra daranno:

$$(10) \qquad A_1 - A_2 + x (B_1 - B_2) + y (C_1 - C_2) = 0 .$$

I coefficienti $A_1 - A_2$, $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$ sono quantità da dedursi esperimentalmente per mezzo di misure dirette, ma l'esame delle formule (9) ci mostrà subito che non tutte queste misure hanno un' eguale influenza sulla precisione con cui tali coefficienti possono essere ottenuti: mentre h_1, h_2, t_1, t_2 debbono essere determinati colla massima diligenza, per m', s', m, s ecc. invece, a cagione della piccolezza che hanno i rapporti $\frac{m' s'}{m s}$ ed $\frac{m''' s'''}{m'' s''}$ rispetto all'unità (nel caso nostro circa 0,00012 per la palla più pesante e 0,00071 per la palla più leggiera), è sufficiente introdurre in calcolo dei valori discretamente approssimati; ora ciò è consentaneo con quello che possiamo chiedere all'osservazione diretta.

Esperimentando adunque con pendoli le cui palle abbiano diversa densità, e facendo oscillare ciascuna palla appesa successivamente ad un filo lungo e ad uno corto, potremo ottenere dall'osservazione un seguito di equazioni

$$\begin{aligned}
0 &= (A_1 - A_2)_1 + x (B_1 - B_2)_1 + y (C_1 - C_2)_1 \\
0 &= (A_1 - B_2)_2 + x (B_1 - B_2)_2 + y (C_1 - C_2)_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= (A_1 - A_2)_n + x (B_1 - B_2)_n + y (C_1 - C_2)_n
\end{aligned}$$

a ciascuna delle quali però in generale dovremo ascrivere una fiducia diversa: la risoluzione di queste col solito metodo dei minimi quadrati darà allora i valori cercati di x ed y ed i loro errori probabili.

§ IX.

La ricerca della lunghezza del pendolo semplice sessagesimale e quindi quella dell' intensità della gravità è dunque ridotta alla determinazione precisa dei valori che prendono h_1, h_2, t_1, t_2, c_1, c_2 in un seguito di esperienze fatte con pendoli diversi. È noto che, per quanto semplice possa sembrare questa determinazione, essa presenta

delle grandi difficoltà che, in parte, sono comuni a tutte le misure di precisione, in parte però sono inerenti al caso attuale, in cui le cause di disturbo sono molto più numerose. Ricorderemo brevemente anzitutto il metodo adottato da Bessel per la misura delle quantità lineari h_1, h_2. La figura 1 della annessa tav. I rappresenta l'apparecchio che, dietro le indicazioni di Bessel, fu costruito da Repsold dal 1823 al 1826, e che servì poi alle note e classiche esperienze che quel celebre astronomo fece a Königsberg e a Berlino ed a quelle che ripetè a Königsberg il dott. C. A. W. Peters per constatare le possibili variazioni sia nella lunghezza del pendolo semplice sessagesimale, sia in quella della tesa del Perù. L'apparecchio, sostenuto tutto dalla spranga di ferro verticale S S, consiste essenzialmente in un prototipo a testate A A (tesa), pressochè sospeso per il suo centro B col mezzo di un sistema di leve a contrappeso P, P; questo prototipo è mantenuto verticale dai fermagli b, b ed è poggiato colla testata inferiore sulla faccia piana superiore di un piccolo cilindretto C: i contrappesi P, P sono destinati a regolare la pressione della tesa sul cilindretto. Sulla testata superiore della tesa poggia il punto più basso di una zona sferica a basi verticali, disegnata in G (fig. 3), mantenuta in equilibrio per mezzo di un apparecchio accessorio fissato alla spranga di sostegno S S e munito di contrappeso T (fig. 2). Lo scopo di questo apparecchio è di poter rendere orizzontale l'asse E (fig. 3) di un piccolo cilindretto connesso stabilmente alla zona sferica sopraindicata, e ciò per mezzo della livella di precisione H montata sopra un cilindro R (fig. 2), di cui l'asse può essere mosso nel suo proprio piano verticale dalla vite di correzione V. La suddetta spranga di sostegno S S porta poi alla sua parte superiore il supporto R_1 (fig. 2), lungo il quale, sotto l'azione della vite V_1, può scorrere, guidato in R_1, il pezzo U; all'estremità inferiore di questo è fissata la esile lamina metallica L L, di cui lo scopo è di obbligare il pendolo ad oscillare in un piano, e che, dopo essersi adagiata sul cilindretto E più sopra rammentato, è connessa in K col filo del pendolo: una vite V_2 serve a fissare invariabilmente la lamina fra le morse di sostegno, mentre la vite V_1 serve a regolare la sua lunghezza e quindi l'altezza della palla del pendolo sul livello del suolo. Gli apparecchi ausiliarî R_1 U, H R V, (fig. 2), E F G (fig. 3), che servono per la sospensione della palla e per lo stabilimento del cilindretto orizzontale E, il cui asse viene a rappresentare l'asse materiale di sospensione dei pendoli composti, possono però, quando il prototipo di misura (tesa) venga rimosso dal posto, prendere un'altra posizione che nella figura 1 è indicata in X e X_1: allora il punto più basso della zona sferica G viene ad appoggiare sulla faccia superiore del cilindretto C sulla quale riposava prima la testata inferiore del prototipo, mentre il cilindretto orizzontale E, per mezzo della vite di correzione V, si dispone coll'asse parallelo alla direzione che esso aveva prima in alto. Alla lamina L L si congiunge quindi un nuovo filo più corto, in modo che la palla N del pendolo, quando questo è in riposo, venga ad occupare la stessa posizione che avea quando era appesa al filo lungo, ossia quando il cilindretto di sospensione si trovava al di sopra del prototipo di misura. Se quest'ultima condizione fosse esattamente verificata si verrebbero evidentemente a costituire due pendoli composti in cui la differenza di lunghezze dei fili di sospensione sarebbe eguale esattamente al prototipo di misura; la difficoltà di portare la palla nei due casi nella identica posizione fu ovviata da Bessel coll'aggiunta di un apparecchio accessorio, atto a

misurare la differenza di altezza fra le due posizioni coniugate della palla stessa, e consistente in una leva di sensibilità sopportata da una vite micrometrica verticale, che serve a condurre il piano della leva a contatto col punto più basso della palla, quando si vuole misurare l'altezza di questa al di sopra di un certo punto fisso. La leva di sensibilità misura e regola la pressione esercitata dal basso in alto sulla palla. È facile vedere come scegliendo per il valore di h_1, che è arbitrario, la differenza fra le letture fatte sulla vite micrometrica in corrispondenza ad una posizione iniziale qualunque ed a quando il piano della leva è a contatto colla palla nel caso del pendolo lungo, per h_2 deve prendersi la lunghezza del prototipo aumentata della differenza fra le letture analoghe pel pendolo corto, la leva di sensibilità essendo stata ricondotta alla stessa indicazione di prima. Infine accenneremo ad un altro apparecchio ausiliario disegnato in Z (fig. 1), e che serve a mettere in oscillazione la palla, trasportandola lentamente nel piano di oscillazione ed abbandonandola poi all'azione del proprio peso.

Da quanto sopra è detto si vede che la palla del pendolo nelle sue oscillazioni non descrive un arco di circonferenza di cui il centro sia nell'asse di sospensione E, ma la sviluppata del cerchio formato dalla sezione del cilindretto col piano di oscillazione. Bessel ha dimostrato che la durata dell' oscillazione del pendolo è in questo caso sensibilmente la stessa come se l'asse di rotazione fosse sull' asse del cilindro che contiene l' inviluppo, almeno quando il raggio del cilindro e l'amplitudine dell' oscillazione sono sufficientemente piccoli. Maggiori particolarità su questo proposito uscirebbero completamente dal campo di questo lavoro, giacchè quanto abbiamo detto è sufficiente a dare un' idea esatta del sistema di misura Besseliano ed a porre in evidenza gli inconvenienti di esso, inconvenienti che, in parte, non isfuggirono a Bessel, ed in parte non potevano essere ovviati al tempo in cui il suo apparecchio fu costruito. Essi possono essere riassunti come segue:

1° Il contatto della leva di sensibilità contro la palla produce dal basso in alto su questa una pressione che, per quanto leggiera, fa diminuire la lunghezza del filo, stirato durante l'oscillazione della palla dal peso totale di questa. È bene ricordare che Bessel tenne conto nelle sue esperienze di questo sensibile accorciamento, studiando l'influenza della elasticità del filo in un'interessante Nota annessa alla determinazione del pendolo a secondi in Köningsberg. Ma l'apprezzamento di questa diminuzione di lunghezza è molto difficile in pratica e vi rimane sempre qualche cosa di arbitrario che è impossibile di rimuovere. Coloro che sono abituati alle misure micrometriche lineari di alta precisione conoscono del resto gli immensi vantaggi che presenta il cosidetto metodo ottico sopra il metodo a contatti, al quale ultimo Bessel ricorse anche per gli apparecchi di base geodetici, e che pure sta per scomparire dai metodi di misura; ci sembra pertanto inutile di fermarci a dimostrare l'utilità che si ottiene nel sostituire la leva di sensibilità e la vite micrometrica Besseliana con dei microscopî micrometrici. L'attuazione di quest'idea presenta certo delle difficoltà, ma si vedrà in seguito come siamo riusciti a rimuoverle completamente.

2° Il cilindretto E nell' apparecchio di Bessel ha un piccolo diametro, mentre sporge assai al di fuori della zona sferica G; inoltre la connessione delle diverse parti negli apparecchi accessori E F G, H R V è estremamente delicata ed assai instabile:

non è dunque impossibile, anzi è molto probabile, che nel cilindretto E si producano delle vibrazioni od oscillazioni isocrone od armoniche coll'oscillazione del pendolo, ed interamente analoghe a quelle osservate e lamentate nei treppiedi dei pendoli invertibili, e che avrebbero per effetto di alterare sensibilmente la durata di oscillazione. Abbiamo già ricordato che Bessel ripetè le sue determinazioni con sospensioni a morse ed a coltelli; le une e gli altri venivano a sostituire il cilindretto E, ma presentavano, sotto il punto di vista qui considerato, pressochè gli stessi svantaggi di esso. Quantunque alcuni concetti teoretici, che qui è superfluo riferire, tendano a far credere che nel sistema Besselliano la determinazione dell'intensità del peso sia pressochè indipendente dall'influenza ora ricordata, giacchè nella massima parte questa si risolve in uno spostamento dell'asse ideale di sospensione, tuttavia al nostro scopo era indispensabile togliere dalle osservazioni ogni sospetto di questo genere. Così, non contenti di adottare un sistema di sospensione che non dà appiglio a dubbio veruno, abbiamo poi completamente accertato, la sua perfetta stabilità con apposite esperienze che saranno riportate in seguito.

3° Le testate del prototipo (tesa) soffrono successivamente delle pressioni che rendono erronea la misura della distanza fra le due posizioni dell'asse del cilindretto, corrispondenti alle due esperienze coniugate da farsi con ciascuna palla. È qui applicabile quanto sopra abbiamo detto sul sistema delle *campionature* per contatti, coll'aggiunta che in questo caso il prototipo stesso viene a soffrire immancabilmente dei danni oggidì apprezzabili ai nostri strumenti di misura. Scomparso, com'è quasi, l'uso delle campionature per contatti, nel rifare delle determinazioni di gravità fondate sul classico principio di Bessel era naturalmente necessario di misurare per mezzo del sistema ottico la distanza fra gli assi coniugati di sospensione: ma ci è sembrato molto più conveniente di mantenere fisso l'asse di sospensione, e di misurare invece la distanza fra le posizioni coniugate del baricentro della palla (le formule precedenti si riferiscono a quest'ultima maniera di esperimento), munendo questa di una mira conveniente. Per quanto semplice possa sembrare questa idea essa presenta nell'attuazione delle serie difficoltà che sono state vinte solo dopo molti e pazienti tentativi, come si vedrà in seguito.

4° I fili metallici molto sottili si mettono pressochè istantaneamente alla temperatura ambiente, non solo, ma inoltre sentono pressochè istantaneamente il calore raggiante da corpi situati anche a grande distanza. Nell'uso diuturno che abbiamo fatto di delicati termoscopî costituiti da fili metallici molto fini, ci siamo più volte dovuti sorprendere della rapidità con cui essi accusavano la presenza di una persona nella stanza nella quale erano tenuti a temperatura costante: del resto su tale fenomeno già Biot [1] aveva richiamata l'attenzione degli osservatori. Le esperienze che abbiamo fatto in proposito ci hanno pienamente convinti dell'assoluta necessità di far oscillare i pendoli in un ambiente a temperatura costante, e di osservare le durate delle oscillazioni senza entrare in questo ambiente se non per qualche momento, e senza rimanere in presenza del filo del pendolo. L'apparecchio di Bessel non può, senza esser modificato sostanzialmente, verificare questa condizione.

[1] *Recueil d'observations astronomiques et géodésiques*, 4° volume (aggiunto) al *Système métrique.*

5° Il sistema adottato da Bessel per porre in oscillazione la palla produce in questa un movimento ondulatorio secondario di *tangheggio* (ci si conceda questa espressione), movimento che però, dietro le indicazioni di Schumacher, fu ridotto assai piccolo nelle ultime esperienze. Bessel sottopone a calcolo l' influenza di questo secondo movimento, ma la delicata analisi del sommo astronomo non toglie ogni dubbio sull' esattezza dei risultati esperimentali.

6° L'apprezzamento degli intervalli per mezzo delle coincidenze implica altri inconvenienti su cui torneremo a suo luogo, e che ci hanno costretti a scartare questo metodo, sostituendolo colle segnalazioni cronografiche.

È inutile fermare l'attenzione sopra altre considerazioni di minore importanza, giacchè facendo all'apparecchio di Repsold le modificazioni necessarie a togliere gli inconvenienti suddetti non resta di esso che l'idea fondamentale da cui fu ispirato. Lasceremo dunque questo argomento per descrivere a grandi tratti l'apparecchio a cui ci siamo fermati dopo varî tentativi e lunghe discussioni.

§ X.

Una delle condizioni più importanti era la costanza della temperatura durante tutto l'intervallo necessario per le osservazioni coniugate con una stessa palla; a tale intento abbiamo fissato l'apparecchio per la misura della gravità ad uno spesso muro che serve di divisione fra due ampie stanze interne: questa disposizione ci permise di costruire tale apparecchio per modo che la maggior parte delle osservazioni possono esser fatte dalla stanza attigua a quella in cui il pendolo è contenuto. I due ambienti suddetti sono da tre lati circondati da stanze, nelle quali la temperatura durante l'esperienza vien mantenuta pressochè costante con caloriferi e fiamme a gas, dal quarto lato esse si trovano addossate alla navata principale della chiesa di S. Pietro in Vincoli, ove la temperatura, come è naturale, è assai lentamente variabile e, in ogni caso, assai poco differente da quella che teniamo nelle esperienze. Al di sotto delle sale di osservazione corre la volta della navata destra della chiesa suddetta e al di sopra vi hanno altre stanze poco frequentate. Abitualmente la luce non penetra che da piccole finestre poste quasi al solaio, che danno su di una terrazza: ma ora queste finestre sono state chiuse e difese in modo che la trasmissione del calore per tale via è estremamente lenta. Perciò, colla continua vigilanza e coll'aiuto di stufe ad acqua calda e di fiamme a gas od a benzina, siamo riusciti a mantenere nei detti locali anche per un mese la temperatura dentro due o tre decimi di grado, ed osservazioni precise, di cui dovremo parlare in seguito, ci hanno mostrato come era presumibile che anche il muro di divisione fra le due stanze non variasse sensibilmente di temperatura. L'ala del fabbricato in cui sono situati questi locali è destinata a gabinetti scientifici, addossata alla chiesa di S. Pietro in Vincoli, e distante dai luoghi frequentati: così, per la natura stessa della località, non vi ha pericolo di vibrazioni prodotte dal passaggio di veicoli o da altra causa disturbatrice.

Nel muro sopra indicato, furono praticate tre piccole finestre, due delle quali a circa 90^{cm} dal pavimento, la terza verticalmente al disopra di una delle altre due e a distanza da questa di circa un metro. Queste due ultime finestre servono a sostenere le armature di due microscopî micrometrici di forte ingrandimento (68

a 70 diametri), e nei quali circa tre parti del tamburo corrispondono ad un micron. L'armatura del microscopio più basso permette di trasportare l'asse di questo orizzontalmente e parallelamente ad una sua posizione, e l'armatura del microscopio superiore permette invece di muoverne l'asse parallelamente a sè stesso in un piano verticale (v. tav. I, fig. 16, e tav. II, fig. 4). A questo breve cenno descrittivo aggiungeremo soltanto che nella costruzione delle armature si è potuto ottenere una perfetta stabilità degli assi dei microscopî, quando questi sono stati condotti al loro posto normale.

La terza finestra praticata nel muro è destinata a mantenere un terzo microscopio in una posizione fissa qualunque, microscopio che serve alla lettura di un delicato termoscopio metallico. È superfluo di notare che i tre microscopî traversano il muro che li sorregge, e le letture vengono quindi fatte da una delle stanze, che d'ora innanzi chiameremo sala d'osservazione, mentre gli oggetti collimati si trovano al di là del muro nella seconda stanza, che chiameremo sala del pendolo.

Nei primi due di questi microscopî i cosidetti assi ottici, ossia gli assi di collimazione individuati dalle posizioni zero dei micrometri, debbono fare, nel nostro apparecchio, l'ufficio che in quello di Repsold fanno gli estremi della tesa campione: si dispongono perciò in modo che i corrispondenti punti di perfetta visione si trovino situati esattamente sulla stessa verticale, il che si ottiene per mezzo di un sottile filo a piombo. I due microscopî devono servire per misure comparative, giacchè è per loro mezzo che, dopo aver determinata la distanza fra i loro assi ottici, si misura la distanza verticale fra le due posizioni coniugate che prende il centro di una stessa palla durante le esperienze: così essi costituiscono un vero e proprio *comparatore verticale*, che è necessario di premunire contro tutte le note cause di errore inerenti alle usuali comparazioni di lunghezze.

Una di queste proviene dalla difficoltà di riportare sempre alla stessa distanza dagli obiettivi dei microscopî le graduazioni o le estremità degli oggetti che si debbono comparare. L'uso di piccole graduazioni da connettersi successivamente in prossimità dei punti o linee da collimare non è finora considerato come attuabile; ed in quanto ai tratti ausiliarî aggiunti alle divisioni dei prototipi, essi non sono sufficienti che per la ripetizione della misura di un' unica lunghezza. Le ricerche del prof. Förster e del prof. Hirsch (¹) mostrano che l'errore di cui qui parliamo limita assai la precisione di apprezzamento a cui gli attuali microscopî micrometrici potrebbero aspirare. Il prof. Förster trova che fra la variazione Δs che subisce l'immagine s (lineare) in corrispondenza ad un errore Δf nell'aggiustamento della distanza f fra l'oggetto e il centro angolare dell'obbiettivo (punto di conducecorrenza dei raggi refratti da questo) vi ha la relazione:

$$\frac{\Delta s}{s} = -\frac{\Delta f}{f}$$

che verifica sensibilmente e le sue proprie esperienze e quelle del sig. Hirsch. Nei nostri microscopî l'errore medio di aggiustamento a vista è di oltre $0^{mm},1$ che con-

(¹) Queste ricerche sono pubblicate in allegati ai processi verbali del Comitato internazionale dei pesi e misure (anno 1877), ed intitolate come segue: *Note sur l'influence de la mise au foyer et de l'inclinaison des microscopes sur les mesures micrométriques*, par W. Förster. Annexe VI. *De l'influence de la mise au foyer sur la valeur du micromètre d'un microscope*, par A. Hirsch. - Annexe V.

duce ad una variazione più che sensibile nel valore delle parti del micrometro. Il sistema da noi adottato ovvia del tutto un siffatto inconveniente; esso può in realtà essere applicato anche in comparatori orizzontali, ma la sua applicazione ha la massima semplicità in quelli verticali. D'altronde nei comparatori verticali, quando si adottano dei metodi di sospensione acconci per i prototipi da comparare, si evitano altresì le flessioni, e i contatti coi banchi di sostegno, e si lascia ai prototipi una completa libertà di dilatazione. L'importanza di questi ultimi vantaggi non può sfuggire per certo a coloro che hanno avuto occasione di fare comparazioni di alta precisione, e di notare in conseguenza certe anomalie nei risultati e certe irregolarità nelle dilatazioni, che per la maggior parte debbono essere ascritte al modo con cui i prototipi vengono di solito sostenuti. Nel nostro caso dunque abbiamo eliminato l'errore di aggiustamento a vista aggiungendo due nuovi microscopî micrometrici, che diremo microscopî di spia, e che vengono fissati cogli assi in un piano verticale, inclinato su quello che contiene gli assi di collimazione dei microscopî di misura: la inclinazione la più conveniente è di 90°. Tali nuovi microscopî, che nel nostro apparecchio sono sostenuti da armature fisse nel muro di sostegno dalla parte della sala del pendolo, vengono disposti in modo che i loro assi siano rispettivamente diretti sui due punti osservati coi microscopî di misura quando a questi viene data la posizione di visibilità perfetta; in tal modo la verticale su cui debbono essere poi condotte le estremità dei prototipi da comparare resta fisicamente individuata. Il collocamento dei microscopî di spia nella loro giusta posizione si fa per mezzo dell'osservazione dei due lembi dello stesso filo a piombo che ha servito a mettere in uno stesso piano verticale gli assi dei microscopî di misura.

Stabiliti così i microscopî di misura e di spia, riesce molto semplice il determinare la distanza verticale fra gli *zeri* dei *micrometri* di misura; basta infatti collocare verticalmente nella stanza del pendolo un metro campione, di cui gli estremi da collimare siano puntati rispettivamente da ciascuna coppia di microscopî: la somma delle letture fatte coi micrometri dei microscopî di misura sulle estremità suddette del campione, o la loro differenza, a seconda della disposizione data ai micrometri, dà appunto la differenza fra la lunghezza del campione (tenuto conto della temperatura di questo) e la distanza cercata, ammettendo che il valore delle parti dei micrometri sia stata preventivamente determinata, o si determini contemporaneamente alla distanza suddetta per mezzo delle suddivisioni note del prototipo di misura.

L'uso di metri a tratti richiede però, in generale, estreme precauzioni nell'illuminazione, giacchè col variare dell'angolo d'incidenza della luce illuminante varia altresì la posizione apparente dei tratti. Noi, non possedendo per il momento microscopî ad illuminazione centrale e abbiamo, dopo lunghi tentativi, dovuto rinunciare all'uso di prototipi a tratti: naturalmente però abbiamo escluso altresì i metri a testate che nel caso nostro non erano applicabili. Il prototipo di cui ci siamo serviti esclusivamente nelle esperienze che qui pubblichiamo è composto di una verga d'acciaio, di cui il coefficiente di dilatazione verrà determinato coll'apparecchio di Fizeau [1];

[1] Lo studio preliminare del nostro apparecchio di Fizeau è stato fatto dal dott. Ascoli, e viene allegato alla presente Memoria, ma non abbiamo avuto tempo di compiere la determinazione del coefficiente di dilatazione indicato nel testo, determinazione che sarà annessa alle successive pubblica-

gli estremi che individuano la lunghezza campione sono i vertici di due piccoli coni di *pakfong* nei quali l'angolo d' apertura è di circa 30° e l'altezza è di 1^{mm}; tali coni sono fissati stabilmente colla loro base sulle facce terminali della verga di acciaio sopra indicata. Questa viene sospesa per il suo centro di gravità e fissata nella noce di un'armatura, che si vede disegnata nella tavola II, fig. 5: questa armatura è foggiata per modo che, per mezzo dell'azione di tre viti micrometriche, è possibile di comunicare all'asse del prototipo (mantenuto verticale) dei movimenti di trasporto secondo tre direzioni ortogonali, l'una delle quali verticale, un' altra orizzontale nel piano che contiene gli assi dei microscopî di misura, ed una terza anch'essa orizzontale in un piano perpendicolare al precedente. Altre due viti micrometriche permettono di far ruotare l'asse del metro in due piani verticali, in modo che per mezzo di esse si possono condurre le due estremità del prototipo sopra una stessa verticale. Tutta questa armatura è fissata all'estremità di un robusto braccio di ghisa, che all'altra estremità porta la sede di un asse conico verticale d'acciaio, simile a quello di un teodolite, intorno al quale il braccio di ghisa può ruotare con dolce movimento: un tale movimento vien fatto a mano, ed un'altra vite, colla quale si può comprimere il braccio contro il piede dell' asse, permette di connettere invariabilmente questi due pezzi; però, pel perfetto aggiustamento del metro, è aggiunta un' ultima vite micrometrica, che in figura non è segnata, ma che comunica al braccio i piccoli movimenti intorno al suo asse di rotazione. Questo asse è solidamente fissato nel muro di sostegno dei microscopî di misura. È facile comprendere come, operando sulle sei viti di rettifica sopra menzionate, si possono stabilire le due punte del prototipo sulla verticale individuata dall'incontro degli assi delle due coppie di microscopî sopra descritte: così la determinazione della distanza fra gli assi dei microscopî di misura può essere fatta colla massima precisione e prestezza a diverse riprese, quando il procedimento delle esperienze lo richiede.

Non è superfluo di notare che l'uso delle punte per individuare le estremità del prototipo di misura permette altresì la loro perfetta illuminazione, e questo accresce di molto la precisione della misura. Esclusa la luce diffusa solare, a causa del disturbo che produrrebbe nella temperatura ambiente, ed a più forte ragione la luce diretta a causa della ben nota incertezza che produce nei puntamenti, dovevamo ricorrere ad un'illuminazione artificiale, che abbiamo ottenuta come segue. Una piccolissima fiamma a benzina viene disposta davanti all'obiettivo di ciascun microscopio alla distanza di circa tre metri e mezzo: fra questo e la fiamma è poi situata una grande lente biconvessa, in modo da riprodurre l'immagine della fiamma sull'obiettivo; un vetro smerigliato interposto diffonde la luce: così le mire a punte si distinguono perfettamente limitate e nere in campo chiaro, e il puntamento può esser fatto colla massima precisione. Per difendere l'apparecchio del pendolo dal calore irraggiante

zioni che ci proponiamo di fare sull'argomento che ci occupa. Però durante tutte le esperienze che qui pubblichiamo, essendosi mantenuta dentro pochi decimi di grado costante la temperatura della sala del pendolo, ove sono state fatte anche le comparazioni fra il nostro prototipo e il metro normale della Commissione Superiore di Pesi e Misure, la piccola incertezza che si ha nelle riduzioni adottando per coefficiente di dilatazione quello attribuito di solito all'acciaio non ha la menoma influenza sui nostri risultati.

dalla piccola fiamma a benzina vi ha un'ampia paratia, che s'innalza fino a tre metri al di sopra del pavimento della sala, ed in tale paratia sono praticati i fori necessarî al passaggio dei fasci illuminanti. Per diminuire poi ancora l'effetto delle fiamme abbiamo disposto le due lenti che illuminano il termoscopio metallico e il microscopio di misura inferiore in modo da usufruire per ambedue di un' unica fiamma.

§ XI.

Dobbiamo ora descrivere il pendolo oscillante ed il suo modo di sospensione.

Il pendolo oscillante è costituito di 8 o 6 parti distinte, a seconda che si tratta di un'esperienza con filo lungo o corto. Le otto parti di un pendolo lungo sono:

1° La parte A C (fig. 6, tav. III), variabile in lunghezza, di una lamina finissima di talco che, durante l'oscillazione, si avvolge intorno al costolo F F di un pezzo fisso (asse materiale di sospensione), costolo formato da una porzione di superficie cilindrica le cui generatrici divengono normali al piano di oscillazione: questa lamina ha per unico scopo di impedire il fenomeno di Foucault. Temevamo da principio che la possibile torsione di essa permettesse una sensibile rotazione di questo piano di oscillazione, almeno nelle prime ore di un'esperienza, e che quindi non bastasse a togliere totalmente la conicità del movimento: tuttavia le indagini fatte nelle osservazioni preliminari ci hanno dato la più grande certezza che la lamina è sufficiente allo scopo cui è destinata. D'altra parte la lamina di sospensione presenta dei notevoli vantaggi sul pendolo bifilare, fra i quali si deve indubitatamente porre quello di poter dare all'insieme del pendolo, meno che in prossimità dell'asse di sospensione, la forma di un solido di rivoluzione: ciò, oltre agevolare il calcolo dei momenti d' inerzia delle diverse parti oscillanti, toglie anche certi inconvenienti che si verificano nei pendoli che non hanno una tale forma, quando questi debbono oscillare in un mezzo resistente.

2° La saldatura B C della lamina col filo, fatta a stagno, il cui peso però è ridotto a 3 milligrammi per i fili che debbono sostenere le tre palle leggere e a 27 milligrammi per le due pesanti.

3° La porzione C D del filo, lunga circa 197 centimetri, che rimane comune ai due pendoli coniugati (lungo e corto) per ogni palla. I nostri fili sono in *pakfong*, ed abbiamo preferita questa lega perchè, presentando una sufficiente resistenza alla trazione, non si ossida e pesa assai poco, mentre, escluso l'argento e il rame come poco tenaci, il filo d' acciaio si ossida troppo facilmente presentando così variabilità di peso durante le esperienze, e il filo di platino, che avrebbe il vantaggio di un coefficiente di dilatazione assai piccolo, presenta poi lo svantaggio di un peso considerevole; però siamo intenzionati di valerci in una prossima occasione anche di quest' ultimo metallo. Il diametro dei nostri fili per le palle leggere non è che di $0^{mm},15$, quello per le palle pesanti di $0^{mm},23$.

4° Il cilindro D D, che serve di congiunzione fra la parte ora detta del filo e, la palla nei pendoli corti, o l'altra porzione del filo nei pendoli lunghi. Questo cilindro è formato d'una cappa a madrevite, in cui impana la vite di un altro pezzetto unito, secondo i casi, sia alla palla, sia all'estremità superiore della seconda porzione D E di filo: questo pezzetto riempie pressochè completamente il cavo praticato nella cappa stessa. La congiunzione dei due pezzi ora descritti coi relativi fili fu fatta introducendo

questi in un foro di diametro eguale a quello del filo, praticato sia nella parte superiore della cappa, sia nell'asse del cilindretto che la riempie, e saldando poi in argento alle estremità dei fili una piccolissima pallina pure d'argento: il peso delle palline e delle relative saldature è circa 3 milligrammi: tali palline vanno poi, quando il filo è in tensione, a riempire due piccolissime cavità, praticate in modo che, quando la congiunzione è stabilita, il pezzo intero di congiunzione forma un cilindro pieno, avente spazî nocivi affatto trascurabili.

5° Il filo inferiore D E, del tutto eguale a quello superiore salvo in lunghezza: questa seconda porzione di filo è lunga un metro, e serve a scorciare il pendolo, potendo essere rimossa, nel qual caso la palla viene fissata direttamente con la cappa D: l'estremità inferiore del filo D E poi è connessa ad una seconda cappa in modo simile a quello descritto poco sopra.

6° La seconda cappa E F, eguale in tutto a quella superiore D, e che serve a congiungere il filo D E colla palla. Per questo scopo alla palla fu lasciata una piccola appendice, a forma di cilindretto con base, e foggiato a vite in modo da impanare sia nella madrevite della cappa inferiore E F (pendolo lungo), sia in quella della cappa superiore D (pendolo corto).

7° La palla che, a seconda delle esperienze, è di ottone cava o piena, di alluminio o di una lega di piombo ed antimonio, pressochè perfettamente sferica e sempre dello stesso raggio. Le palle furono lavorate colla massima diligenza per mezzo di un apposito tornio da sfere della fabbrica di Goldmann di Berlino, e, quantunque nel sistema di misura ideato da Bessel non sia necessaria una densità uniforme, abbiamo nonostante posto la massima cura affinchè i metalli, in cui le palle venivano tornite, presentassero la massima compattezza ed omogeneità.

8° Finalmente la mira foggiata in una seconda appendice che, nella tornitura della palla, venne lasciata diametralmente opposta alla prima. Le prime mire usate erano piccoli cilindri leggermente ripianati da un lato; sulla faccia della ripianatura erano tracciate delle divisioni orizzontali di decimo in decimo di millimetro, e queste divisioni servivano poi per il puntamento che si faceva successivamente per mezzo dei due microscopî di misura. Ma la grande difficoltà di disporre perfettamente il piano delle divisioni in un azimut determinato e l'incertezza del puntamento, causata dall'illuminazione variabile dei suoi tratti, ci fecero tralasciare questo metodo di lettura e ci obbligarono a sostituire i cilindretti con dei piccoli coni, simili a quelli del nostro prototipo. Il vertice del cono serve nel puntamento come di tratto terminale e va poi nelle esperienze a sostituire uno di quelli del metro, venendo collocato perfettamente nella posizione che aveva questo, e che è individuata, come fu detto, dall'incontro degli assi di ciascuna delle coppie di microscopî. L'illuminazione della mira della palla si fa come quella del metro campione.

§ XII.

Rimane a parlare del sistema di sospensione del pendolo; in realtà questo sistema si connette in parte col modo di porre in movimento la palla; ma noi faremo pel momento astrazione da questa dipendenza, riservandoci ad indicare più tardi le modificazioni che a cagione di essa debbono farsi al seguente cenno descrittivo.

Un grosso parallelepipedo di legno compatto, bollito prima nell'olio, è fissato nella sala del pendolo, in alto del muro che porta i microscopî, con una delle sue facce disposta verticalmente e parallelamente alla superficie del muro: questo pezzo di legno serve a sostenere l'apparecchio di sospensione, che consiste in una spessa lastra metallica invariabilmente connessa al legno, sulla quale è fissato un asse conico orizzontale segnato in R nella fig. 7 della tav. IV, perfettamente tornito come quello di un teodolite. Tale asse conico penetra in un guscio portato da una seconda lastra, la quale viene adagiata con una delle sue facce sulla prima, in modo da poter prendere un movimento di rotazione intorno all'asse suddetto. Questo movimento di rotazione vien fatto a mano, salvo per i piccolissimi spostamenti, che si ottengono col mezzo della vite micrometrica H; una vite di pressione K permette poi di fissare invariabilmente le due lastre fra loro. Sulla seconda lastra sovrapposta sono fissati stabilmente due pezzi, indicati nella figura l'uno in $L L_1$, l'altro in D F. Il primo di questi consiste in un parallelepipedo di ottone, del quale la faccia superiore, perpendicolare al piano della lastra ed inclinata sull'orizzonte di circa 70°, serve come di superficie di scivolamento dall'alto al basso per il parallelepipedo C C, che vi si poggia sopra colla sua faccia inferiore. Un tale scivolamento, guidato dalle facce E, vien prodotto col mezzo della vite V_1; la vite di pressione V_4 serve per fissare invariabilmente il pezzo mobile C C al pezzo fisso $L L_1$ e quindi alla lastra fissa. All'estremità inferiore di CC è praticata una fessura G, in cui si introduce l'estremità superiore della lamina che sorregge il pendolo: la vite di pressione V_2 permette di serrare questa fessura in modo che la lamina vi resti chiusa come in una morsa. La vite V_3 serve a fare scivolare la faccia inferiore del parallelepipedo C C sul pezzo di sostegno A B in una direzione perpendicolare al movimento che gli comunica la vite V_1.

Il secondo pezzo D F fa, nel nostro apparecchio, le veci del cilindretto di avviluppo della lamina adottato da Bessel, togliendo qui però ogni possibilità di vibrazioni od oscillazioni isocrone od armoniche con quelle del pendolo, e prodotte dal movimento di questo: infatti esso è foggiato a guisa di prisma triangolare, di cui una base combacia colla seconda delle lastre sopra indicate, colla quale il pezzo intero D F è solidamente fissato; sopra uno degli spigoli del prisma, in figura segnato in F F, fu saldato un cilindretto di *pakfong* sul quale, come abbiamo già detto, viene ad addossarsi la lamina che sostiene il pendolo; il raggio del cilindro ora indicato è di un millimetro. La posizione relativa dei pezzi $L L_1$, D F è tale che, quando la lamina è stabilita a posto, la porzione di essa compresa fra i due pezzi sopra rammentati si trova in prolungamento dell'asse del parallelepipedo C, e quindi è inclinata di un angolo di circa 70° sull' orizzonte.

È facile rendersi ora conto dei diversi scopi delle parti del sostegno del pendolo fin qui descritte: fissata la lamina di sostegno nella fenditura G per mezzo della vite di pressione V_2, la vite V_1 permette di farla scivolare sulla superficie cilindrica di appoggio F F, in modo da condurre la mira della palla ad un' altezza conveniente, tale cioè che permetta la lettura col microscopio di misura inferiore se si tratta del pendolo lungo, o superiore nel caso del corto; per mezzo della vite V_3 poi si può spostare la mira orizzontalmente nel piano che contiene l'asse di collimazione del microscopio suddetto, fino a che non viene ad essere collimata

anche dal rispettivo microscopio di spia; la vite H, facendo ruotare tutta la lastra di sostegno intorno all'asse R, serve a produrre i movimenti della mira nel piano di oscillazione: coll'azione successiva delle tre viti suddette è possibile disporre dunque la mira della palla nella posizione che aveva prima una di quelle delle testate del prototipo di misura. È molto conveniente di fare un quasi perfetto aggiustamento anche in altezza, in modo che i micrometri dei microscopî di misura non debbano indicare notevoli differenze verticali fra la mira del metro e quella della palla; così viene infatti ad esser reso insensibile l'errore commesso nel determinare i valori delle parti dei micrometri, valori che d'altronde sono variabili colla temperatura.

§ XIII.

Abbiamo già accennato l'inconveniente che nell'apparecchio di Repsold si verificava nel mettere in oscillazione la palla, spostandola di un certo angolo dalla verticale nel piano del movimento, ed abbandonandola quindi all'azione del proprio peso. Per togliere le ondulazioni secondarie lamentate da Bessel noi avevamo prima immaginato di lasciare alla lastra di sostegno, descritta nel paragrafo precedente, la possibilità di ruotare intorno all'asse di precisione, che nella fig. 7 (tav. IV) è segnato in R. Una tale rotazione ha per effetto di spostare la palla con moto continuo dalla primitiva sua posizione di riposo; riconducendo allora, di concerto alla oscillazione discendente della palla, la lastra nella sua antica posizione, e fissandola colla vite di pressione K, il movimento oscillatorio che assume il pendolo è privo delle ondulazioni sopra ricordate; rimangono per altro quelle dovute alla flessibilità del filo e già considerate da Laplace e da Bessel, l'influenza delle quali è sottoposta a calcolo come fu detto precedentemente. A fine di ricondurre sempre la lastra mobile dopo la rotazione identicamente nella primitiva posizione, la prima lastra che serve ad essa di sostegno è munita di un costolo di arresto segnato nella fig. 7 della tav. IV in S S S; contro questo costolo la lastra ruotante resta compressa per la pressione esercitata dal pendolo contro la superficie cilindrica FF. Abbiamo voluto accertare sperimentalmente che in questo sistema non si hanno da temere spostamenti nè oscillazioni nell'asse materiale di sospensione: perciò abbiamo munito il pezzo D F di un piccolo specchio T da cui viene riflesso un raggio di luce che parte da circa dodici metri di distanza: il raggio riflesso cade poi sull'obiettivo di un cannocchiale micrometrico posto pure a dodici metri dallo specchio, producendo nel reticolo dei fili un punto luminoso simile ad una stella di terza o quarta grandezza vista in un cannocchiale astronomico. Collimato questo punto luminoso, si fa ruotare la lastra e si riconduce a posto e si osserva se la collimazione viene ristabilita. Questo esperimento serve inoltre a dimostrare la perfetta stabilità del nostro asse di sospensione durante il movimento oscillatorio del pendolo, stabilità che non avevamo trovata invece perfetta adottando un cilindretto di sospensione simile a quello di Bessel. È facile rendersi conto della sensibilità di questo metodo ottico di constatazione, che rende visibili anche dei movimenti estremamente piccoli dell'asse, dei quali certo l'influenza nel caso nostro sarebbe trascurabile.

Il metodo ora descritto di mettere in movimento il pendolo fu da noi usato soltanto nelle esperienze preliminari, e se qui si trova ricordato, non è solo a causa

dei buoni risultati che ne abbiamo ottenuti ma anche perchè, con alcune leggiere modificazioni noi intendiamo di usufruirlo nelle esperienze che faranno subito seguito a quelle che ora pubblichiamo. In queste abbiamo adoperato un altro metodo assai più semplice, di cui dobbiamo l'idea al dott. Moisè Ascoli. In tale metodo il movimento oscillatorio non è comunicato alla palla, ma bensì alla estremità superiore della laminetta che la sorregge, e pochissimo al disotto dell'asse FF di sospensione del pendolo. Una simile comunicazione si ottiene nel modo seguente: nella lastra metallica fissa al muro, più sopra descritta, e poco al di sotto della più bassa linea FF di contatto fra la lamina del pendolo e il pezzo D, è fissato normalmente un piccolo tronco di cono in acciaio, la cui proiezione si vede in M nella fig. 7 (tav. IV); questo tronco di cono è in posizione tale da rimanere distante dalla lamina almeno qualche millimetro, durante il movimento del pendolo, e serve come di perno ad un cilindro di ottone forato eccentricamente, che s' impernia sul primo al momento di porre in oscillazione il pendolo, ritraendolo subito, dopo che il movimento è stato comunicato. La proiezione del cilindro è indicata con N nella fig. 7 sopra citata. Il cilindro fa qui le funzioni di un eccentrico, ed il suo raggio è calcolato per modo che durante la rotazione intorno all'asse conico le generatrici del cilindro vengono a spostare leggermente la lamina dalla sua posizione di riposo, imprimendo una leggiera oscillazione al pendolo. Se si ha cura di far fare al cilindro, con moto più regolare che è possibile, una rivoluzione intorno all'asse conico nel tempo in cui il pendolo fa un' oscillazione, le azioni successive dell'eccentrico sulla lamina si sommano, e si ottiene un movimento di oscillazione del pendolo più ampio di quanto è necessario per il caso nostro, senza che nella palla si verifichino movimenti ondulatorî secondarî. Allora l'eccentrico viene tolto: prima di incominciare la misura delle durate delle oscillazioni deve però lasciarsi al filo ed alla palla tutto il tempo necessario per ritornare al primitivo equilibrio di temperatura: abbiamo constatato che per tale scopo, sono sufficienti dieci minuti.

§ XIV.

La distanza fra le due posizioni che prende il baricentro di una stessa palla nelle due esperienze coniugate deve essere determinata per mezzo delle letture che i due microscopî di misura fanno successivamente sulla mira della palla stessa, giacchè la distanza fra le collimazioni zero dei microscopî si suppone nota per mezzo delle osservazioni sulle mire dol prototipo fatte prima, dopo e durante l'esperienza. Ma le delicate precauzioni descritte nel § X, ed ideate allo scopo di determinare colla massima precisione possibile la distanza suddetta, diverrebbero illusorie se il filo che sostiene la palla durante le esperienze presentasse delle torsioni o degli allungamenti sensibili. Infatti nel caso della torsione, la palla, ruotando intorno al diametro di sospensione, presenterebbe successivamente diversi dei suoi meridiani nel piano di mira del microscopio di misura; d'altra parte è pressochè impossibile di ottenere fisicamente che la punta, che nel caso nostro serve di mira, si trovi giusto sull'asse di sospensione (prolungamento del filo di sostegno) ed in conseguenza il punto osservato si troverebbe nelle diverse misure successive a diverse distanze dall'obiettivo del microscopio e, per lo più, non a visione perfetta e fuori del piano di

collimazione (azimut del microscopio). Gli inconvenienti di un allungamento continuo o saltuario del filo poi sono di per sè troppo evidenti per meritare qui una speciale menzione. Ma la misura della distanza che ci occupa è fondamentale nel metodo di determinazione che abbiamo prescelto; era quindi indispensabile ottenere dei fili in cui i fenomeni dell'allungamento e della torsione fossero completamente evitati, od almeno ridotti insensibili per lunghi intervalli di tempo, ed anche sotto dei microscopî di forte ingrandimento, quali sono quelli da noi usati.

È noto come l'allungamento successivo osservato nei fili e nelle verghe sospese ad una loro estremità ha dato origine alla considerazione della cosidetta elasticità di seconda specie (*elastische Nachwirkung*). Ciò non di meno noi siamo giunti ad ottenere dei fili di lunghezza perfettamente costante e senza torsione, sottoponendoli ad un trattamento speciale, informato all'idea di ridurli in uno stato elastico normale e di togliere ad essi tutte le numerose sinuosità che presentano quasi sempre quando sono preparati alla trafila nel modo ordinario: sicchè, se pur si vuole ammettere l'elasticità di seconda specie, è d'uopo concludere che il suo effetto non è sensibile ai nostri strumenti di misura, e che la maggior parte dei fenomeni ascritti ad essa sono invece una conseguenza diretta della preparazione del filo. Il trattamento cui furono sottoposti i nostri fili è il seguente: si sospende il filo assoggettandolo ad una forte trazione e si porta ad alta ed a bassa temperatura alternativamente, mentre lo si obbliga a torcersi e storcersi intorno al proprio asse, comunicandogli, per mezzo del peso che lo stira, una eccezionale e forte torsione, per esempio di una ventina di giri. Dopo alcuni giorni, durante i quali il filo ha così lavorato, esso diviene perfettamente diritto e disteso e non presenta più i fenomeni lamentati, a meno che non si porti presso od oltre i limiti di temperatura stati tenuti nel trattamento. Le nostre esperienze non ci lasciano dubbio sulla bontà di questo sistema, ed, in quanto all'allungamento, le lunghezze dei fili adottati per il pendolo si sono trovate sempre invariabili anche sotto cariche molto forti [1], quando, ben inteso, la costanza della temperatura e della carica è stata ben mantenuta: eppure si trattava di 2 o 3 metri di filo, e nei nostri microscopî tre parti del micrometro equivalgono ad un micron, e questa ultima quantità è nettamente apprezzabile. In quanto alla torsione accidentale poi, noteremo che nelle mire a cilindro descritte più sopra ed adottate nelle prime nostre esperienze la più leggera rotazione della palla intorno al suo diametro di sospensione avrebbe inclinato, rispetto al piano di mira, la ripianatura graduata del cilindro, ripianatura che non aveva che la larghezza di $0^{mm},5$; sarebbe quindi riuscito impossibile ogni puntamento ulteriore. Da questo lato abbiamo dunque potuto riporre nei nostri fili una completa fiducia, e tale fiducia è stata confermata dalle numerose verifiche che le esperienze definitive sono necessariamente venute a darci.

§ XV.

Accenneremo ora brevemente il modo di determinare le quantità lineari h_1 ed h_2 che entrano nelle formule (9), e che costituiscono uno dei principali elementi della determinazione della gravità col sistema del pendolo differenziale.

[1] Un filo di pakfong del diametro di mm. 0,23 portava una palla pesante più di 1400 grammi.

Stabilita nella sala di osservazione ed in quella del pendolo la temperatura normale che deve rimanere invariata durante due esperienze coniugate, e lasciato il tempo al muro interposto fra le due sale di mettersi in equilibrio di temperatura (per ciò sono necessarî molti giorni), si dispone il metro campione dinanzi ai microscopî nella sua posizione normale, e si determina la distanza fra le letture *zero* dei micrometri di misura col noto metodo e colle note precauzioni necessarie in tutte le comparazioni lineari. In seguito si toglie il metro campione senza rimuoverlo dal suo sostegno, facendo ruotare il braccio che lo sostiene intorno all' asse conico di precisione indicato a suo luogo, e si stabilisce uno dei due pendoli coniugati, che qui supporremo essere il pendolo lungo. Abbiamo già notato come in questo collocamento si deve aver cura di condurre la punta della mira esattamente sulla stessa verticale che era individuata dalla punta corrispondente del metro, e pressochè all'altezza che aveva tale punta, affinchè l' uso del micrometro sia limitato alla lettura differenziale di poche parti del suo tamburo. Noi qui intenderemo che lo zero del micrometro del microscopio inferiore costituisca il punto di riferimento indicato con C al § VII; la lettura che il micrometro inferiore fa sulla mira della palla darà pertanto un valore di h_1. Quindi si pone in movimento il pendolo e si misura, col metodo che diremo, la durata delle oscillazioni: fermato poi il pendolo si torna successivamente a rileggere sulla mira della palla, a togliere il pendolo e a disporre e collimare di nuovo il metro: il valore di h_1 da introdursi nei calcoli è la media delle determinazioni fatte prima e dopo l' esperienza e naturalmente s'intende che queste determinazioni si compongono di un certo numero di osservazioni ciascuna. Prima però di togliere il pendolo è necessario di misurare la porzione oscillante della lamina di sospensione, giacchè questa porzione varia da esperienza ad esperienza. La misura si fa per mezzo di un compasso di precisione, munito di vite micrometrica, fissandone una punta al centro di oscillazione apparente, che è appositamente individuato per mezzo di un piccolo foro conico fatto col tornio sull'estremità dell'asse del cilindretto F F durante la sua tornitura, e l'altra punta all'estremità inferiore della lamina. Del resto un piccolo errore in questa misura è affatto insensibile nei risultati.

Costituito in seguito il pendolo corto (colle stesse precauzioni del lungo), la lettura fatta col micrometro superiore sulla mira nella nuova posizione della palla, aumentata della distanza fra gli zeri dei micrometri dà un valore di h_2, quantità che, finita l' esperienza col pendolo corto, si torna poi a determinare in modo analogo a quello già indicato per h_1: solo è da notare che per il valore della distanza fra gli zeri dei micrometri deve assumersi la media dei valori ottenuti per essa prima, dopo e nell' intervallo fra le due esperienze coniugate.

Se la temperatura potesse essere mantenuta perfettamente costante nelle due sale di esperienza, le diverse determinazioni fatte per ciascuna delle quantità sopra indicate non differirebbero che per gli errori di apprezzamento: in pratica però l'invariabilità della temperatura è molto difficile ad ottenersi: nelle esperienze che pubblichiamo la temperatura presenta delle oscillazioni, che sono invero molto piccole, giacchè in nessun caso sorpassano un decimo e mezzo di grado rispetto alla media, ma che rendono tuttavia necessario di fare delle correzioni alle quantità

osservate a fine di ridurle tutte comparabili fra loro. Per ottenere tali correzioni, che sono del resto estremamente tenui, dovemmo anzitutto occuparci della ricerca del coefficiente di dilatazione del muro, in cui i microscopî sono fissati. Potrà far meraviglia che, dovendo poi porre in calcolo la dilatazione del sostegno dei microscopî, non si sia prescelto per la costruzione di tale sostegno un corpo di dilatazione equabile e nota: però la scelta non fu fatta senza una lunga e particolareggiata discussione. Il muro usufruito nelle nostre esperienze presenta infatti dei grandi vantaggi, tra i quali noteremo i seguenti:

1° La perfetta stabilità dell'apparecchio.

2° L'indipendenza delle sale di osservazione e di esperimento.

3° La grande lentezza di trasmissione del calore, cosa capitale, per la bontà dei risultati cui aspiravamo.

È d'altronde superfluo il notare che la inequabilità di dilatazione nelle diverse parti del muro è per noi affatto innocua, bastando al caso nostro di conoscere approssimativamente la dilatazione media del collegamento fra i microscopî di misura: è questa dilatazione media che intendiamo indicare quando parliamo del coefficiente di dilatazione del muro.

Per determinare il coefficiente di dilatazione del muro fu stabilita la temperatura pressochè costante per molti giorni nelle due sale di esperimento, e fu disposto il prototipo di misura dinanzi ai microscopî, i quali, in questo caso, collimando le punte del metro, servivano come di spia ai movimenti interni del muro: quando fummo sicuri della stabilità nella temperatura di questo si determinò la distanza fra gli zeri dei micrometri, estendendo le osservazioni ad un periodo di quattro giorni. Si ottennero per tal modo i risultati seguenti:

Data	Temperatura	Distanza fra gli zeri dei micrometri
13 luglio	23°,05	$1^m + 238^\mu,7$ 237, 8
14 »	22, 95	238, 4 236, 9
» »	22, 96	239, 5 238, 0
15 »	22, 97	240, 5 238, 8
» »	22, 99	241, 7 240, 6
17 »	23, 09	239, 9 239, 4
Medie	23°,00	$1^m + 239^\mu,2$

Il giorno 18 luglio fu alterata la temperatura normale, portandola a circa 24° 5, e in seguito, mantenuta costante questa nuova temperatura, il giorno 25, quando già

i termometri di spia avevano da molto annunziato lo stabilimento definitivo del muro, furono incominciate le seguenti osservazioni:

Data	Temperatura	Distanza fra gli zeri dei micrometri
25 luglio	24°,44	$1^m + 254^\mu,1$ 253, 2
» »	24, 44	253, 7 253, 2
26 »	24, 47	254, 2 253, 1
» »	24, 51	256, 8 254, 7
27 »	24, 44	252, 1 251, 8
» »	24, 49	253, 2 253, 6
Medie	24°,465	$1^m + 253^\mu,65$

È inutile avvertire che l'indice μ indica i micron. Dal confronto di queste due serie di osservazioni si deduce per il valore del coefficiente di dilatazione del muro:

0,000 009 87

Altre due serie di osservazioni, fatte a temperature assai più basse (15° e 20°), e che qui crediamo inutile riportare, hanno pienamente confermato questo valore. La piccola differenza di temperatura usata nella determinazione suddetta, ed impostaci dallo stato delle cose, è più che sufficiente del resto a dare un valore del coefficiente cercato coll'approssimazione abbisognevole a noi, giacchè tale coefficiente non deve servire in realtà che a riduzioni per differenze di temperatura minori di due decimi di grado. Le serie di valori sopra citate e le analoghe da noi successivamente ottenute hanno d'altronde un altro significato molto importante nel caso nostro, giacchè esse dimostrano la perfetta stabilità dei microscopî rispetto al muro, e rispetto alle proprie armature, anche durante non lievi variazioni di temperatura.

Ottenuto pertanto il coefficiente di dilatazione del muro, le diverse determinazioni delle distanze fra i microscopî possono essere ridotte alla temperatura media dell'esperienza coniugata cui si riferiscono. Un' analoga riduzione deve essere introdotta anche nella misura fatta sulle mire dei pendoli: ma in questo caso è conveniente di notare che un'alterazione nella lunghezza di un pendolo oscillante equivale ad una alterazione perfettamente definita nella durata di oscillazione, e la corrispondenza fra tali quantità si può nel caso nostro determinare con tutta la desiderabile approssimazione considerando il pendolo come semplice, ed usufruendo della nota formula:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

In conseguenza il modo di ridurre le lunghezze dei pendoli coniugati alla media temperatura dell'esperimento sarà indicata più tardi parlando della misura della durata di oscillazione.

§ XVI.

Le correzioni indicate nel paragrafo precedente implicano la conoscenza esatta delle temperature sia del muro sia degli ambienti delle esperienze. Tali temperature hanno due periodi di variazione ben distinti, di cui l'uno è continuo e molto lento, e dipende dall' andamento delle temperature artificiali con cui abbiamo circondato le sale di esperimento, mentre l'altro è oscillatorio e, diremmo quasi, casuale, ed è prodotto sia dalla momentanea presenza degli osservatori nelle sale, sia dalle irregolarità inevitabili nel riscaldamento di queste. Tali due generi di variazioni quantunque anche quando le loro fasi si sommano, non abbiano per noi che degli effetti molto piccoli (circa 2 decimi di grado), tuttavia debbono esser sottomessi a calcolo in modo differente, giacchè, mentre il secondo non influisce sensibilmente che sulle parti metalliche dell'apparecchio, e tanto più quanto più piccole sono le dimensioni di queste, il primo influenza altresì il muro di sostegno, e così essi corrispondono ad effetti notevolmente diversi. Dovemmo dunque pensare a misurarli ciascuno separatamente, il primo per mezzo di termometri di precisione a mercurio, provvisti di serbatoî sufficientemente voluminosi e difesi con appositi inviluppi dalle irradiazioni subitanee, ed il secondo per mezzo di un termoscopio metallico che accennasse le repentine variazioni nella lunghezza del filo del pendolo. I termometri di precisione a mercurio furono distribuiti come segue: uno nella sala di osservazione; uno accanto alla parte superiore del filo del pendolo; uno a fianco della parte inferiore del filo; uno nel mezzo della stanza del pendolo.

Tali termometri sono graduati di decimo in decimo di grado e furono ripetutamente comparati con un buon termometro campione, di cui le costanti erano state determinate preventivamente: del resto conviene notare che l'uso dei termometri era limitato alla determinazione di piccole differenze di temperatura dentro piccoli intervalli di tempo, dimodochè gli spostamenti degli zeri non hanno veruna influenza sui nostri risultati.

Il termoscopio metallico, che nelle ulteriori prossime esperienze ridurremo ad un vero e proprio termometro di precisione, si compone essenzialmente di due fili di metalli diversi, dei quali i coefficienti di dilatazione sono molto differenti: questi fili sono attaccati per un'estremità ad un sostegno metallico fissato in alto nel muro dei microscopî, e sono mantenuti in trazione da due pesi attaccati all' altra loro estremità: la differenza di lunghezza dei due fili misura la temperatura media propria al loro sistema comune.

Nel nostro termoscopio uno dei fili è di platino, l'altro è di alluminio: essi sono lunghi circa tre metri ed appesi ad un pezzo metallico A (fig. 8, tav. III) che è incastrato dentro due guide CG, CG, lungo le quali esso può scorrere, sotto l'azione della vite di richiamo V: le due viti V_2, V_3 servono a dare al sistema dei fili un movimento trasversale, che riesce parallelo al piano del muro di sostegno. All'estremità inferiore dei fili sono fissati due cilindretti II, $I_1 I_1$, ed a questi i pesi di trazione. Uno dei cilindretti porta un piccolo pezzo traversato dall'altro cilindretto, che può scorrervi dentro liberamente: la differenza di lunghezza fra le porzioni dei fili

che costituiscono il termoscopio è individuata dalla distanza fra due punte K, K di cui ciascuna è collegata stabilmente con uno dei cilindretti, e tale distanza viene osservata per mezzo del già ricordato microscopio micrometrico fisso nel muro di sostegno. Sieno a_0, p_0 le lunghezze dei fili alla temperatura di zero gradi; a, p le lunghezze stesse alla temperatura θ; sia inoltre ζ la temperatura a cui si ha $a = p = \Lambda$, supposta protratta la legge lineare di dilatazione oltre i limiti di temperatura dentro i quali essa viene sensibilmente verificata, ipotesi che non ha influenza sulle seguenti deduzioni; rappresentando con α e β i coefficienti di dilatazione dei metalli a, p rispettivamente, avremo:

$$a = a_0 (1 + \alpha\theta),$$
$$p = p_0 (1 + \beta\theta),$$
$$\Lambda = a_0 (1 + \alpha\zeta) = p_0 (1 + \beta\zeta):$$

da cui, indicando con I_θ l'indicazione del termometro metallico alla temperatura θ, si trae:

$$I_\theta = \Lambda \left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\zeta} - \frac{1+\beta\theta}{1+\beta\zeta}\right),$$
$$= \frac{\Lambda (\beta - \alpha)(\zeta - \theta)}{(1+\alpha\zeta)(1+\beta\zeta)}.$$

Ponendo

$$\omega = \frac{\Lambda (\beta - \alpha)}{(1+\alpha\zeta)(1+\beta\zeta)},$$

ω sarà una costante il cui valore dipenderà dalla natura dei fili del termoscopio e dalla differenza delle loro lunghezze: tale valore deve essere determinato con dirette apposite esperienze, in modo da tener conto delle condizioni peculiari dell'istrumento: si avrà dunque in generale:

$$I_\theta = \omega\,(\zeta - \theta):$$

da cui è facile vedere che, scegliendo convenientemente le lunghezze e la natura dei fili metallici, il termoscopio diventa uno degli istrumenti più precisi per determinare le differenze di temperatura: quando poi, come nel caso nostro, la temperatura si riferisce allo stato medio dei diversi strati d'aria di un ambiente, tale istrumento, che è estremamente pronto ad accusare le variazioni repentine di temperatura, può altresì servire di indicatore nel mantenere l'ambiente a temperatura costante.

§ XVII.

Le misure micrometriche da farsi sulle mire delle palle dei pendoli richiederebbero un tempo lunghissimo se non fosse possibile di smorzare artificialmente le oscillazioni delle palle, quando queste sono state disturbate dalla loro posizione di equilibrio. Le nostre palle pesanti continuerebbero infatti in tal caso il loro movimento oscillatorio di piccola ampiezza per molte e molte ore, senza contare che, anche quando fossero fermate, il più leggero tremito del muro di sostegno o dell'aria circostante tornerebbe a comunicare loro il movimento. È sorprendente anzi sotto questo punto di vista la distanza a cui i tremiti vengono comunicati: così, quantunque le nostre sale di osservazione sieno molto lontane da ogni causa di disturbo, abbiamo dovuto

rassegnarci a fare la maggior parte delle nostre esperienze durante la notte, a fine di ottenere una quiete perfetta nella sospensione del pendolo. Siamo spesso rimasti meravigliati di vedere di giorno, sotto l'ingrandimento dei nostri microscopî, tremare sentitamente i pendoli mentre tutto era tranquillo d'intorno, non solo nelle stanze attigue e sopra e sotto il muro di sostegno, ma anche nella vicinanza del fabbricato: durante la sera e la notte soltanto abbiamo potuto trovare la quiete perfetta che cercavamo. Ora i tremiti e le oscillazioni toglierebbero la possibilità di ogni esattezza nella misura lineare che abbiamo descritta in questi ultimi paragrafi.

Per fermare dunque prontamente il pendolo nella sua posizione di riposo fu pensato di circondarlo di frangie di seta appese a due bracci formati a guisa di tanaglia (fig. 9, tav. IV): questi bracci, situati in un piano orizzontale, sono imperniati ad un asse fisso nel muro di sostegno poco sopra la palla del pendolo, e possono girare intorno a tale asse sotto l'azione di quattro tiranti, due per ciascun braccio, che servono ad aprire od a chiudere le morse della tanaglia. I tiranti traversano il muro, passando per dei piccoli fori praticati in esso, e così l'osservatore mette in azione le frangie e le toglie operando sui tiranti dalla sala attigua a quella del pendolo.

Allorchè le morse della tanaglia formata dai bracci mobili suddetti sono chiuse, le frangie pendono toccando e circondando da ogni parte il pendolo e ne smorzano le oscillazioni e le vibrazioni dentro piccolo intervallo di tempo: allora le frangie vengono tolte per evitare qualunque possibile spostamento della mira dovuto al loro peso, e viene cominciata la misura micrometrica. Durante il movimento del pendolo poi i bracci delle frangie rimangono aderenti al muro, abbastanza lontani dal corpo oscillante per non lasciar dubbio sulla loro innocuità.

§ XVIII.

Descritto sommariamente l'apparecchio per la misura della gravità, dobbiamo ora parlare del metodo con cui si sono determinate le durate delle oscillazioni dei pendoli, relative ad archi infinitamente piccoli. La misura del tempo fu fatta per mezzo di un pendolo siderale costruito da W. Dent di Londra, e regolato astronomicamente durante la primavera e l'estate di quest'anno. A fine di rendere interamente trascurabili gli effetti del possibile errore di compensazione, questo eccellente regolatore astronomico fu stabilito nella sala dell'apparecchio per la gravità, fissato quivi ad un grosso muro maestro in una sporgenza che fa parte di un arco in muratura. L'orologio di Dent è munito di contatti elettrici indipendenti dai congegni e dall'asta del pendolo, e che trasmettono le indicazioni di secondo in secondo ad un cronografo di Hipp, che le registra insieme alle osservazioni, per mezzo di penne a tratto continuo. Una leggera modificazione a quest'ultimo istrumento ha permesso di risparmiare lo studio delle parallassi delle penne l'una connessa col pendolo, l'altra col tasto a mano o cogli apparecchi automatici che devono produrre il registramento delle osservazioni: una tale modificazione, che consiste nell'obbligare la penna delle osservazioni a tracciare nello stesso tempo in cui la penna dei secondi nota i suoi punti un piccolo segno, essenzialmente diverso da quelli di osservazione, agevola molto le letture e le rende assai più precise.

I contatti del pendolo siderale sono naturalmente regolati in guisa da registrare altresì i minuti primi; inoltre l'apparecchio elettrico è munito di viti di correzione, in modo che si può fare coincidere esattamente il battito del pendolo con quello del cronografo togliendo la cosidetta parallasse di tempo. Però fra il cronografo ed il pendolo è interposta una tavoletta telegrafica di Oppolzer (costruita dai sigg. Meyer e Wolff di Vienna), affinchè le intensità e le direzioni delle correnti che producono la registrazione tanto delle osservazioni astronomiche quanto di quelle relative all'apparecchio per la gravità, siano sempre costanti.

Il pendolo siderale, che ci serve come di regolatore astronomico, fu ed è regolato per mezzo dei passaggi delle stelle, osservati (per ora, ed in attesa di uno strumento a passaggi portatile che è in costruzione) con un eccellente universale di grandi dimensioni (apertura dell'obbiettivo 54 mm., distanza focale 65 cm., ingrandimento di circa 72 diametri) a cannocchiale spezzato e munito dell'apparecchio d'inversione; questo istrumento, costruito da Carl Bamberg di Berlino, è montato fisso in una terrazza prossima alle sale di esperienza; gli serve di sostegno un pilastro innalzato su di un grosso muro maestro, mentre un palco levatoio in legno, appoggiato ad altri muri, rende l'istrumento indipendente dall'osservatore. Le buone livelle dell'universale (livella azimutale, $1^p = 1'', 633$, livella zenitale $1^p = 0'' 93$) ci hanno mostrato la sua perfetta stabilità.

In quanto al sistema di osservazione e di calcolo si può vedere l'annesso n. 1: qui ci limitiamo a riportare i soli risultati delle determinazioni di tempo ottenute tutti i giorni che la stagione l'ha permesso nel periodo delle esperienze che pubblichiamo. Gli avanzi sono ridotti a 22^{or} di tempo siderale.

	Avanzo del pendolo	Andamento diurno	Errore medio della deter.ne
18 novembre	$+ 6^m.12^s,60$		
		$+ 1^s,335$	$\pm 0^s, 011$
22 »	+ 6. 17, 94		
		+ 1, 303	± 0, 015
25 »	+ 6. 21, 85		
		+ 1, 317	± 0, 004
6 dicembre	+ 6. 36, 33		
		+ 1, 228	± 0, 007
12 »	+ 6. 43, 70		
		+ 1, 140	± 0, 040
13 »	+ 6. 44, 84		
		+ 1, 063	± 0, 004
19 »	+ 6. 51, 22		

Gli errori medî degli andamenti diurni sono calcolati in base a quelli degli avanzi assoluti; gli errori medî di questi ultimi sono tutti pressochè eguali a $0^s,03$. Le notevoli oscillazioni barometriche saltuarie che successero dal 18 novembre al 13 dicembre renderebbero poi illusoria la correzione degli andamenti per la costante del barometro e per quella che si potrebbe dedurre dalla loro diminuzione apparentemente regolare, quindi essi sono stati introdotti in calcolo come stanno. Abbiamo dunque posto nell'intervallo

fra il 18 Nov. ed il 22 Nov.	1^s del pendolo $= 0^s,999$ 984.6	tempo siderale
» 22 » » 25 »	1^s del pendolo = 0, 999 985.0	»
» 25 » » 6 Dec.	1^s del pendolo = 0, 999 984.8	»
» 6 Dec. ed il 12 »	1^s del pendolo = 0, 999 985.8	»
» 12 » » 13 »	1^s del pendolo = 0, 999 986.8	»
» 13 » » 19 »	1^s del pendolo = 0, 999 987.7	»

§ XIX.

Il sistema oggidì comunemente adottato per l'apprezzamento di un intervallo di tempo che comprenda un certo numero intero di oscillazioni di un pendolo è il sistema delle coincidenze, dovuto a Mairan (1735), e che certamente era il migliore prima dell'applicazione dell'elettricità alla misura del tempo. A noi sembra che esso abbia, rispetto al tempo, una notevole analogia col nonio rispetto alle misure lineari, inquantochè gli errori che si commettono in questi due sistemi di apprezzamento hanno un valore per dir così definito, e debbono essere trattati coi concetti della ripetizione delle osservazioni, anzichè con quelli della reiterazione, che sono tanto più consentanei col fecondo principio di probabilità, su cui si fonda la teoria dei minimi quadrati. Per indagare un po' più nettamente l'errore nell'apprezzamento delle coincidenze rappresentiamo con ϑ la durata dell'oscillazione di un regolatore astronomico, con l la lunghezza di un pendolo semplice oscillante nell'aria, e coincidente col regolatore astronomico al momento in cui l'ampiezza di oscillazione del pendolo è α, e quindi la durata è sensibilmente:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Sia ancora ω il rapporto, supposto costante, fra due ampiezze successive di questo pendolo: affinchè dopo n oscillazioni del regolatore astronomico, contate a partire dalla coincidenza suddetta, si verifichi una nuova coincidenza è sufficente e necessario che si abbia:

$$n\vartheta = m\pi \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\alpha^2 \pi}{16} \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{1 - \omega^{2m}}{1 - \omega^2}\right)$$

essendo m un numero intero. Poniamo

$$k = \frac{\pi}{\vartheta} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

e l'equazione precedente diverrà:

$$n = mk + \frac{\alpha^2 k}{16} \left(\frac{1 - \omega^{2m}}{1 - \omega^2}\right)$$

dove k è una costante il cui valore dipende dalla lunghezza del pendolo considerato e può essere anche incommensurabile. Ne risulta che, matematicamente parlando, non possono esistere due coincidenze successive se k non è tale che vi siano dei valori interi di m che rendano intiero il secondo membro della precedente equazione.

Non bisogna dimenticare inoltre che l'apprezzamento delle coincidenze diviene man mano più difficile ed incerto a misura che le ampiezze diminuiscono: pure è noto, e più tardi avremo occasione di fermarci su questo argomento, come sia di prima necessità di esperimentare con archi di oscillazione molto piccoli: infine un'altra circostanza, che deve essere pure notata, si è che nella massima parte dei casi l'osservazione delle coincidenze richiede l'uso di un'orologio speciale a pendolo, essenzialmente diverso dal regolatore astronomico, e che deve esser poi confrontato separatamente con questo. Per tal modo si viene ad introdurre, oltre l'errore del

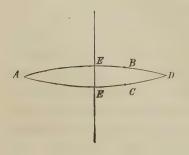
confronto, anche l'errore dell'andamento di questo nuovo misuratore del tempo, che deve supporsi di precisione minore di quella del regolatore.

Abbiamo voluto paragonare i risultati di alcuni altri sistemi atti a misurare gli intervalli con quelli ottenuti da altri osservatori per mezzo delle coincidenze. I due sistemi a cui ci siamo arrestati di preferenza sono quello della registrazione automatica elettrica e quello, certo più semplice di tutti, dell' osservazione diretta dei passaggi del filo oscillante per la verticale. La registrazione automatica è stata adoperata già diverse volte, e spesso con risultato soddisfacente, quantunque non sia priva di notevoli difetti. Nell'applicarla al caso nostro volevamo naturalmente evitare che la corrente elettrica passasse per il filo di sospensione del pendolo: perciò avevamo aggiunto al di sotto della palla, o, più precisamente, annesso alla mira di questa un piccolo cilindretto di avorio, che era traversato da un esile filo di platino piegato a guisa di forcella colle punte rivolte al basso. Questo cilindretto era imperniato alla mira, in modo da poterlo far ruotare intorno al proprio asse per disporre le punte del filo di platino in un azimut determinato.

Nel muro di sostegno del pendolo fu praticato, in sito conveniente, un foro, ed in questo fu stabilita una guida in cui poteva scorrere il braccio metallico G (fig. 10, tav. IV), e che portava all'estremità corrispondente nella sala del pendolo una armatura metallica, indicata in figura con N M: questa armatura sosteneva un pezzo piano orizzontale P Q di avorio, la cui posizione poteva venire stabilita e corretta per mezzo della vite V_2 e del pezzo N N scorrevole tra le guide S S. Un arresto mobile K, portato dal pezzo fisso MM, permetteva di regolare altresì la massima distanza fra il muro ed il piano P Q: sopra questo piano erano praticati due piccoli pozzetti, che, per mezzo di due spirali di filo metallico fasciato di seta, erano in comunicazione coi due poli di una pila coll' intermedio della tavoletta di Oppolzer. Naturalmente le due estremità delle spirali metalliche rimanevano così elettricamente isolate. I due pozzetti erano poi riempiti ridondantemente di mercurio in modo da formare due goccie, di cui il culmine superiore soprastava al livello del piano P Q. Dal cenno descrittivo precedente e dall'ispezione della figura 10, tav. IV, è facile comprendere come agendo sulle viti di correzione V_1, V_2, sul pezzo NN, e sul manubrio del braccio G, e regolando convenientemente l'azimut della forcella della mira, era possibile di disporre il piano P Q in modo che durante l' oscillazione del pendolo le estremità della forcella s'immergessero nelle due goccie di mercurio nel momento prossimo del passaggio del filo per la verticale e chiudessero il circuito elettrico, producendo la registrazione automatica per mezzo del cronografo. Appena ottenuta la registrazione del primo istante di un intervallo il piano delle gocce veniva rimosso traendo indietro il braccio G, e il pendolo rimaneva pienamente libero nel suo movimento fino al momento di registrare l' ultimo istante dell'intervallo cercato, quando il piano delle goccie era ricondotto al posto primitivo, per ottenere l' altra immersione delle punte della forcella. Per stabilire poi le goccie di mercurio in guisa che il circuito venisse chiuso nel preciso momento del passaggio del pendolo per la verticale era sufficiente disporre il piano P Q per modo che l' intervallo fra due passaggi successivi, registrato dal cronografo, fosse sempre lo stesso durante un certo numero di oscillazioni; è facile infatti comprendere che se la condizione

suddetta non è verificata la differenza fra due intervalli consecutivi T_1, T_2 del cronografo rappresenta il quadruplo dell' errore θ commesso nell' apprezzamento del primo passaggio effettivo per la verticale [1].

Però si deve notare che le registrazioni nel nostro cronografo non sono rappresentate da punti ma da tratti più o meno lunghi, a seconda del tempo in cui il circuito rimane chiuso: questo sistema di registrazione, che non presenta nessuno svantaggio rispetto a quello per punte, ha poi il vantaggio, importantissimo in certe esperienze fisiche, di dare il modo di tener conto della durata del fenomeno di registrazione: nel caso del pendolo, per esempio, ciò è indispensabile giacchè l'immersione delle punte della forcella del pendolo è più o meno prolungata a seconda dell'ampiezza dell'oscillazione. Si poteva temere che l'azione delle extracorrenti, ritardando il momento di chiusura e quello di apertura del circuito, influisse sensibilmente sull'intervallo di tempo misurato; in realtà è facile però rendersi conto come questa influenza può esser considerata come costante sia nell' apprezzamento del principio sia in quello della fine dell' intervallo, giacchè è eguale alla semisomma dei tempuscoli in cui le azioni delle due extracorrenti paralizzano quella della corrente principale, cosicchè essa si risolve in una parallasse di registrazione, il cui valore può essere determinato per mezzo del tasto a parallassi della tavoletta di Oppolzer. È chiaro che tale determinazione è del resto superflua nel nostro caso.

Si può constatare esperimentalmente che nei segni cronografici sono i punti di mezzo degli intervalli in cui il circuito è rimasto chiuso che debbono essere scelti a rappresentare i passaggi per la verticale, salvo almeno gli errori di carattere costante che sono possibili e forse anche probabili, ma che sono risultati insensibili nelle molte nostre esperienze fatte per determinarli. La constatazione suddetta si fa notando che, regolata la posizione delle goccie quando le lunghezze dei segni di registrazione sono molto piccole a causa di una grande ampiezza di oscillazione del pendolo, allorchè poi le ampiezze sono assai impicciolite e quindi le lunghezze delle registrazioni sono assai accresciute e divenute variabili sensibilmente dentro un piccol numero di oscillazioni, affinchè due durate successive di oscillazione registrate dal cronografo seguitino a rimanere eguali è necessario considerare i punti di mezzo delle registrazioni stesse. Potrebbe supporsi che la reiterazione delle osservazioni di uno stesso intervallo, fatta prendendo diversi punti di registrazione al principio ed alla fine dell'esperienza presentasse qualche incertezza a causa della resistenza delle goccie durante l'immersione, e di quella specie di urto che tali goccie producono sulle punte della forcella, aumentando così sensibilmente la durata di oscillazione quando l'immersione è mantenuta ad ogni passaggio. Tale alterazione dipende naturalmente sia

[1] Sia E, E la verticale, e la chiusura del circuito avvenga in B e C, il pendolo movendosi da B in A, C, D: è chiaro che l'errore θ della registrazione del passaggio in E è dato da $\theta = -$ BE e d'altronde in figura l'intervallo T_1 è rappresentato da BA + AC e T_2 da CD + DB. Ora evidentemente si può porre.

$$T_1 - T_2 = 4\,\theta$$

e quindi
$$\theta = \frac{T_1 - T_2}{4}.$$

dalla quantità di moto della palla nel momento dell'urto, sia dalla quantità di forcella che s'immerge, sia da altre circostanze troppo variabili perchè essa possa venire sottoposta a calcolo: si può però avere un' idea della sua entità dai due risultati seguenti che togliamo da una serie di esperienze fatte in proposito. Con una palla pesante grammi 1134 si è dedotto da un intervallo di circa 10000 oscillazioni con un pendolo lungo circa $3^m,50$ il valore medio di una durata di oscillazione

senza goccie	$1^s,874818.6$
colle goccie	$1^s,874836.7$
aumento per la presenza delle goccie	18.1

Così pure per un pendolo di circa $2^m,50$

senza le goccie	$1^s,581679.5$
colle goccie	$1^s,581689.0$
aumento per la presenza delle goccie	9.5

È facile vedere che questi aumenti sono così piccoli che l'errore conseguente nella media di un piccolo numero di oscillazioni osservate al principio ed alla fine di un intervallo di qualche ora non è sensibile minimamente sulla durata dell'oscillazione che da questo intervallo si deduce.

Quantunque la registrazione automatica presenti una grande comodità, giacchè a determinare un intervallo con tutta precisione non si richieggono che due osservazioni, e in pari tempo sia, in massima, il sistema meno soggetto ad errori di apprezzamento, essa ha tuttavia dei notevoli difetti, di cui ci limiteremo a notare i due principali.

1° Non si presta con eguale precisione all'apprezzamento dei passaggi di ampiezza molto diversa, e non è possibile di applicarla nelle ampiezze molto piccole, giacchè non si può ridurre in pari tempo dell'ampiezza l'immersione delle punte della forcella nelle goccie di mercurio, immersione in cui vi ha bisogno di un contatto molto intimo perchè la corrente possa stabilirsi, tanto più che la superficie delle goccie di mercurio è di solito ossidata a causa del passaggio reiterato della corrente stessa. Nelle oscillazioni molto ampie poi la registrazione dei passaggi si riduce a dei punti assai incerti, i quali ben presto, crescendo ancora l' ampiezza, scompariscono poi completamente.

2° Quantunque nei pendoli molto pesanti la resistenza delle goccie durante l'immersione non alteri in modo visibile la natura del movimento, nei pendoli leggieri invece essa produce un movimento ondulatorio della palla intorno al suo punto di congiunzione col filo, movimento identico a quello che abbiamo discusso trattando del sistema con cui Bessel metteva in moto i pendoli. Per pendoli molto leggieri la chiusura automatica non sarebbe dunque possibile.

§ XX.

Senza rinunziare del tutto al sistema di registrazione automatica, abbiamo voluto vedere se anche in questo caso, come avviene in quello della misura degli angoli e delle lunghezze, non era preferibile un sistema che permettesse la reiterazione delle osservazioni anche a scapito della precisione di ogni singola di queste. Però era necessario distinguere l' errore variabile di misura, che viene eliminato colla reiterazione, dall' errore sistematico, intendendo, come si deve, per errore

matico quello che è funzione della grandezza stessa della quantità misurata. Nel nostro caso la quantità misurata è il tempo assoluto, in quantochè da esso dipende l'ampiezza di oscillazione, e con questa è definitamente collegato l'errore costante di apprezzamento del principio e della fine di un intervallo.

Per determinare pertanto reiteratamente il momento del passaggio del filo del pendolo per la verticale fu stabilita fra il filo ed il muro di sostegno una scala orizzontale di vetro, graduata in millimetri, e che nello stesso tempo serviva alla misura delle ampiezze delle oscillazioni. Per illuminare la graduazione è praticata nel muro di sostegno del pendolo un'apertura, dentro cui si adatta una lente cilindrica orizzontale che proietta sulla scala di cristallo uno strato di raggi paralleli provenienti da una piccola fiamma a benzina situata nella sala di osservazione. Per tal modo dalla sala del pendolo si distinguono le graduazioni della scala di cristallo come tratti verticali neri in campo chiaro; su questo campo si proietta in nero il filo del pendolo oscillante ([1]). L'armatura della scala è provvista naturalmente di viti di richiamo e di correzione, cosicchè la scala può essere collocata e fissata in modo che il filo del pendolo nella sua posizione di riposo, visto da un certo punto della sala del pendolo, si proietti esattamente sopra uno dei tratti della scala. Nel punto della sala ora indicato è collocato un cannocchiale terrestre di discreto ingrandimento, ed è per suo mezzo che si osserva l' istante in cui, durante il movimento del pendolo, il filo passa al di sopra del tratto suddetto: un tasto elettrico a mano è destinato a trasmettere l'indicazione alla tavoletta di Oppolzer, e quindi al cronografo ([2]).

L'entità dell'errore casuale di osservazione di un passaggio fu determinata come segue: reiterata l'osservazione per un gran numero di passaggi consecutivi al principio ed alla fine di un intervallo, furono calcolati i due tempi che lo limitavano, e la durata media dell'oscillazione col metodo usuale. L'errore dell'intervallo e la riduzione di questa durata media ad archi infinitamente piccoli, quando si tratta di ampiezze comprese dentro un grado, sono così tenui che le prime quattro cifre della durata media suddetta possono essere senz'altro considerate come esatte: quindi, partendo dall'istante medio osservato sia per il principio sia per la fine dell'intervallo, è possibile di ricostruire i valori che dovrebbero essere stati ottenuti per le singole osservazioni. Calcolati allora gli scostamenti se ne deduce l'errore medio di un'osservazione per mezzo della solita formula.

Riportiamo le osservazioni fatte per determinare il principio e la fine di un intervallo sia con un pendolo lungo sia con uno corto, e la deduzione degli errori medî relativi. Queste osservazioni si riferiscono a due delle nostre esperienze finali.

([1]) Questo modo di illuminazione presenta due vantaggi notevoli; il primo si è che la fiamma illuminante non è nella sala del pendolo e non può alterare la temperatura del filo oscillante se non in una piccola parte di esso: il secondo è che si ovvia così all'ombra che vien proiettata dal filo sulla scala nel caso dell'illuminazione diretta, ombra che, essendo più nera dell' apparente immagine del filo, a causa della riflessione dei raggi luminosi che cadono direttamente su di questo, spesso imbarazza l'apprezzamento del fenomeno dei passaggi per la verticale.

([2]) Per ovviare alle conseguenze della presenza dell' osservatore nella stanza del pendolo nei pochi minuti necessarî alla determinazione del principio e della fine dell'esperienza, la disposizione del sistema ora indicato sarà fra breve essenzialmente variata, e le osservazioni dei passaggi verranno fatte dalla sala attigua a quella del pendolo.

Palla piena d'ottone N.° 2 — Pendolo corto.
(principio dell' intervallo)

Passaggi	I. (1a serie)				II. (2a seria)				III. (3a serie)			
	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati
	or m 16.30+ s	or m 16.30+ s	s		or m 16.30+ s	or m 16.30+ s	s		or m 16.30+ s	or m 16.30+ s	s	
0	122,58	122,58	0,00	0,0000	241,18	241,20	+ 0,02	0,0004	382,41	382,42	+ 0,01	0,0001
1	125,39	125,40	+ 0,01	1	244,00	244,07	+ 0,07	49	385,23	385,23	0,00	0
2	128,22	128,19	— 0,03	9	246,83	246,78	— 0,05	25	388,06	388,07	+ 0,01	1
3	131,04	131,06	+ 0,02	4	249,65	249,69	+ 0,04	16	390,88	390,82	— 0,06	36
4	133,87	133,90	+ 0,03	9	252,48	252,43	— 0,05	25	393,71	393,62	— 0,09	81
5	136,70	136,76	+ 0,06	36	255,31	255,29	— 0,02	4	396,54	396,45	— 0,09	81
6	139,52	139,58	+ 0,06	36	258,13	258,12	— 0,01	1	399,37	399,39	+ 0,02	4
7	142,35	142,33	— 0,02	4	260,96	260,99	+ 0,03	9	402,19	402,19	0,00	0
8	145,07	145,10	+ 0,03	9	263,78	263,80	+ 0,02	4	405,01	404,97	— 0,04	16
9	148,00	148,09	+ 0,09	81	266,61	266,60	— 0,01	1	407,84	407,90	+ 0,06	36
10	150,82	150,80	— 0,02	4	269,43	269,42	— 0,01	1	410,66	410,61	— 0,05	25
11	153,65	153,61	— 0,04	16	272,26	272,28	+ 0,02	4	413,49	413,44	— 0,05	25
12	156,47	156,49	+ 0,02	4	275,08	275,00	— 0,08	64	416,31	416,29	— 0,02	4
13	159,29	159,31	+ 0,02	4	277,90	277,90	0,00	0	419,13	419,13	0,00	0
14	162,12	162,11	— 0,01	1	280,73	280,70	— 0,03	9	421,96	421,90	— 0,06	36
15	164,94	164,95	+ 0,01	1	283,56	283,49	— 0,07	49	424,78	424,72	— 0,06	36
16	167,76	167,77	+ 0,01	1	286,38	286,32	— 0,06	36	427,60	427,60	0,00	0
17	170,69	170,58	— 0,11	121	289,21	289,20	— 0,01	1	430,33	430,39	+ 0,06	36
18	173,41	173,40	— 0,01	1	292,03	292,05	+ 0,02	4	433,25	433,26	+ 0,01	1
19	176,24	176,22	— 0,02	4	294,86	294,98	+ 0,12	144	436,08	436,08	0,00	0
20	179,07	179,00	— 0,07	49	297,68	297,70	+ 0,02	4	438,90	438,88	— 0,02	4
21	181,89	181,84	— 0,05	25	300,51	300,50	— 0,01	1	441,73	441,72	— 0,01	1
22	184,71	184,67	— 0,04	16	303,33	303,38	+ 0,05	25	444,55	444,52	— 0,03	9
23	187,53	187,57	+ 0,04	16	306,15	306,19	+ 0,04	16	447,37	447,32	— 0,05	25
24	190,36	190,30	— 0,06	36	308,98	309,00	+ 0,02	4	450,20	450,32	+ 0,12	144
25	193,18	193,18	0,00	0	311,80	311,82	+ 0,02	4	453,02	452,99	— 0,03	9
26	196,02	196,07	+ 0,05	25	314,62	314,70	+ 0,08	64	455,84	455,88	+ 0,04	16
27	198,83	198,89	+ 0,06	36	317,45	317,47	+ 0,02	4	458,67	458,60	— 0,07	49
28	201,65	201,68	+ 0,03	9	320,27	320,24	— 0,03	9	461,49	461,49	0,00	0
29	204,48	204,45	— 0,03	9	323,10	323,10	0,00	0	464,32	464,31	— 0,01	1
30	207,30	207,27	— 0,03	9	325,93	325,94	+ 0,01	1	467,15	467,12	— 0,03	9
				0,0576				0,0582				0,0686

Errore medio dell'osservazione di un passaggio = 0s,044
» » della media. . . . . = 0,s005

Palla piena d'ottone N.° 2 — Pendolo corto.

(fine dell'intervallo)

Passaggi	IV (1ª serie)				V (2ª serie)				VI (3ª serie)			
	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati
	or 23+ s	or 23+ s	s		or 23+ s	or 23+ s	s		or 23+ s	or 23+ s	s	
0	187,30	187,40	+ 0,10	0,0100	317,22	317,20	— 0,02	0,0004	441,49	441,38	— 0,11	0,0121
1	190,12	190,11	— 0,01	1	320,04	320,10	+ 0,06	36	444,31	444,32	+ 0,01	1
2	192,95	192,88	— 0,07	49	322,87	322,89	+ 0,02	4	447,14	447,10	— 0,04	16
3	195,77	195,81	+ 0,04	16	325,69	325,70	+ 0,01	1	449,96	449,99	+ 0,03	9
4	198,60	198,60	0,00	0	328,51	328,53	+ 0,02	4	452,79	452,77	— 0,02	4
5	201,42	201,43	+ 0,01	1	331,34	331,37	+ 0,03	9	455,61	455,57	— 0,04	16
6	204,24	204,29	+ 0,05	25	334,16	334,20	+ 0,04	16	458,43	458,48	+ 0,05	25
7	207,07	207,10	+ 0,03	9	336,99	336,98	— 0,01	1	461,26	461,25	— 0,01	1
8	209,89	209,87	— 0,02	4	339,81	339,88	+ 0,07	49	464,08	464,00	— 0,08	64
9	212,71	212,75	+ 0,04	16	342,64	342,52	— 0,12	144	466,91	466,89	— 0,02	4
10	215,54	215,50	— 0,04	16	345,46	345,43	— 0,03	9	469,73	469,70	— 0,03	9
11	218,37	218,39	+ 0,02	4	348,29	348,27	— 0,02	4	472,56	472,60	+ 0,04	16
12	221,19	221,12	— 0,07	49	351,11	351,14	+ 0,03	9	475,38	475,43	+ 0,05	25
13	224,01	223,98	— 0,03	9	353,93	353,90	— 0,03	9	478,20	478,20	0,00	0
14	226,84	226,81	— 0,03	9	356,76	356,75	— 0,01	1	481,03	480,97	— 0,06	36
15	229,66	229,74	+ 0,08	64	359,58	359,60	+ 0,02	4	483,85	483,80	— 0,05	25
16	232,48	232,45	— 0,03	9	362,40	362,39	— 0,01	1	486,67	486,52	— 0,15	225
17	235,31	235,30	— 0,01	1	365,23	365,20	— 0,03	9	489,50	489,40	— 0,10	100
18	238,13	238,08	— 0,05	25	368,05	367,80	— 0,25	625	492,32	492,31	— 0,01	1
19	240,96	240,98	+ 0,02	4	370,88	370,88	0,00	0	495,15	495,16	+ 0,01	1
20	243,78	243,82	+ 0,04	16	373,70	373,78	+ 0,08	64	497,97	498,05	+ 0,08	64
21	246,61	246,62	+ 0,01	1	376,53	376,52	— 0,01	1	500,80	500,78	— 0,02	4
22	249,43	249,40	— 0,03	9	379,35	379,40	+ 0,05	25	503,62	503,59	— 0,03	9
23	252,25	252,29	+ 0,04	16	382,17	382,19	+ 0,02	4	506,44	506,42	— 0,02	4
24	255,08	255,12	+ 0,04	16	385,00	385,00	0,00	0	509,27	509,33	+ 0,06	36
25	257,90	257,90	0,00	0	387,82	387,83	+ 0,01	1	512,09	512,05	— 0,04	16
26	260,72	260,55	— 0,17	289	390,64	390,62	— 0,02	4	514,91	514,88	— 0,03	9
27	263,55	263,55	0,00	0	393,47	393,55	+ 0,08	64	517,74	517,70	— 0,04	16
28	266,37	266,43	+ 0,06	36	396,29	396,32	+ 0,03	9	520,56	520,55	— 0,01	1
29	269,20	269,19	— 0,01	1	399,12	399,11	— 0,01	1	523,39	523,40	+ 0,01	1
30	272,02	271,99	— 0,03	9	401,94	401,94	0,00	0	526,21	526,20	— 0,01	1
				0,0804				0,1112				0,0860

Errore medio dell'osservazione di un passaggio = 0ˢ,054

» » della media. . . . . = 0ˢ,006

Palla piena d'ottone N.° 2 — Pendolo lungo.
(principio dell'intervallo)

Passaggi	I. (1ª serie)				II. (2ª serie)				III (3ª serie)			
	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati
	or 17+ s	or 17+ s	s		or 17+ s	or 17+ s	s		or 17+ s	or 17+ s	s	
0	153,77	153,89	+ 0,12	0,0144	289,01	288,98	— 0,03	0,0009	438,13	438,11	— 0,02	0,0004
1	157,24	157,30	+ 0,06	36	292,48	292,50	+ 0,02	4	441,60	441,58	— 0,02	4
2	160,71	160,70	— 0,01	1	295,95	295,92	— 0,03	9	445,07	445,00	— 0,07	49
3	164,17	164,20	+ 0,03	9	299,41	299,39	— 0,02	4	448,53	448,51	— 0,02	4
4	167,64	167,69	+ 0,05	25	302,88	302,89	+ 0,01	1	452,00	452,08	+ 0,08	64
5	171,11	171,18	+ 0,07	49	306,35	306,38	+ 0,03	9	455,47	455,41	— 0,06	36
6	174,58	174,57	— 0,01	1	309,82	309,88	+ 0,06	36	458,94	458,91	— 0,03	9
7	178,04	178,10	+ 0,06	36	313,29	313,27	— 0,02	4	462,30	462,36	+ 0,06	36
8	181,51	181,59	+ 0,08	64	316,75	316,75	0,00	0	465,87	465,91	+ 0,04	16
9	184,98	184,98	0,00	0	320,22	320,20	— 0,02	4	469,34	469,37	+ 0,03	9
10	188,45	188,48	+ 0,03	9	323,69	323,64	— 0,05	25	472,80	472,79	— 0,01	1
11	191,92	191,95	+ 0,03	9	327,10	327,09	— 0,01	1	476,27	476,18	— 0,09	81
12	195,39	195,40	+ 0,01	1	330,62	330,65	+ 0,03	9	479,74	479,68	— 0,06	36
13	198,85	198,88	+ 0,03	9	334,09	334,18	+ 0,09	81	483,20	483,25	+ 0,05	25
14	202,32	202,30	— 0,02	4	337,56	337,60	+ 0,04	16	486,67	486,62	— 0,05	25
15	205,78	205,72	— 0,06	36	341,03	341,07	+ 0,04	16	490,14	490,12	— 0,02	4
16	209,26	209,33	+ 0,07	49	344,50	344,49	— 0,01	1	493,61	493,61	0,00	0
17	212,72	212,76	+ 0,04	16	347,97	347,90	— 0,07	49	497,07	497,09	+ 0,02	4
18	216,19	216,14	+ 0,05	25	351,43	351,43	0,00	0	500,54	500,54	0,00	0
19	219,66	219,67	+ 0,01	1	354,90	354,85	— 0,05	25	504,01	504,00	— 0,01	1
20	223,13	223,12	— 0,01	1	358,37	358,39	+ 0,02	4	507,48	507,42	— 0,06	36
21	226,60	226,54	— 0,06	36	361,84	361,90	+ 0,06	36	510,95	510,93	— 0,02	4
22	230,07	230,10	+ 0,03	9	365,31	365,35	+ 0,04	16	514,32	514,36	+ 0,04	16
23	233,53	233,45	— 0,08	64	368,77	368,70	— 0,07	49	517,88	517,87	— 0,01	1
24	237,00	237,00	0,00	0	372,24	372,29	+ 0,05	25	521,35	521,30	— 0,05	25
25	240,47	240,48	+ 0,01	1	375,71	375,68	— 0,03	9	524,82	524,80	— 0,02	4
26	243,94	243,93	— 0,01	1	379,18	379,20	+ 0,02	4	528,29	528,20	— 0,09	81
27	247,40	247,35	— 0,05	25	382,65	382,62	— 0,03	9	531,75	531,69	— 0,06	36
28	250,87	250,89	+ 0,02	4	386,11	386,13	+ 0,02	4	535,22	535,13	— 0,09	81
29	254,34	254,40	+ 0,06	36	389,58	389,50	— 0,08	64	538,69	538,61	— 0,08	64
30	257,80	257,83	+ 0,03	9	393,05	393,00	— 0,05	25	542,16	542,15	— 0,01	1
				0,0710				0,0548				0,0757

Errore medio dell'osservazione di un passaggio = 0ˢ,047
» » della media . . = 0ˢ,005

Palla piena d'ottone N.° 2 — Pendolo lungo.
(fine dell'intervallo)

Passaggi	IV. (1ª serie)				V. (2ª serie)				VI. (3ª serie)			
	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati	Tempi calcolati	Tempi osservati	Differenze	Quadrati
	or m 22.39	or m 22.39			or m 22.39	or m 22.39			or m 22.39	or m 22.39		
	s	s	s		s	s	s		s	s	s	
0	16,82	16,81	— 0,01	0,0001	186,74	186,75	+ 0,01	0,0001	349,72	349,72	0,00	0,0000
1	20,29	20,30	+ 0,01	1	190,21	190,17	— 0,04	16	353,19	353,11	— 0,08	64
2	23,76	23,70	— 0,06	36	193,68	193,72	+ 0,04	16	356,66	356,66	0,00	0
3	27,42	27,29	— 0,13	169	197,14	197,20	+ 0,06	36	360,12	360,25	+ 0,13	169
4	30,69	30,76	+ 0,07	49	200,61	200,67	+ 0,06	36	363,59	363,62	+ 0,03	9
5	34,16	34,21	+ 0,05	25	204,08	204,08	0,00	0	367,06	367,15	+ 0,09	81
6	37,63	37,61	— 0,02	4	207,55	207,45	— 0,10	100	370,53	370,68	+ 0,15	225
7	41,10	41,20	+ 0,10	100	211,02	211,04	+ 0,02	4	374,00	374,00	0,00	0
8	44,56	44,65	+ 0,09	81	214,48	214,50	+ 0,02	4	377,46	377,44	— 0,02	4
9	48,03	47,95	— 0,08	64	217,95	217,99	+ 0,04	16	380,93	381,00	+ 0,07	49
10	51,50	51,58	+ 0,08	64	221,42	221,43	+ 0,01	1	384,40	384,38	— 0,02	4
11	54,97	54,99	+ 0,02	4	224,89	224,88	— 0,01	1	387,87	387,83	— 0,04	16
12	58,43	58,41	— 0,02	4	228,35	228,40	+ 0,05	25	391,33	391,38	+ 0,05	25
13	61,90	61,80	— 0,10	100	231,82	231,93	+ 0,11	121	394,80	394,85	+ 0,05	25
14	65,37	65,42	+ 0,05	25	235,29	235,30	+ 0,01	1	398,27	398,40	+ 0,13	169
15	68,84	68,84	0,00	0	238,76	238,80	+ 0,04	16	401,74	401,67	— 0,07	49
16	72,31	72,30	— 0,01	1	242,23	242,20	— 0,03	9	405,21	405,23	+ 0,02	4
17	75,78	75,80	+ 0,02	4	245,70	245,63	— 0,07	49	408,68	408,62	— 0,06	36
18	79,24	79,31	+ 0,07	49	249,16	249,13	— 0,03	9	412,14	412,09	— 0,05	25
19	82,71	82,75	+ 0,04	16	252,63	252,58	— 0,05	25	415,61	415,59	— 0,02	4
20	86,18	86,21	+ 0,03	9	256,10	256,04	— 0,06	36	419,08	419,12	+ 0,04	16
21	89,65	89,57	— 0,08	64	259,57	259,62	+ 0,05	25	422,55	422,53	— 0,02	4
22	93,11	93,09	— 0 02	4	263,03	262,98	— 0,05	25	426,01	426,06	+ 0,05	25
23	96,58	96,50	— 0,08	64	266,50	266,50	0,00	0	429,48	429,50	+ 0,02	4
24	100,05	99,99	— 0,06	36	269,97	270,00	+ 0,03	9	432,95	432,95	0,00	0
25	103,52	103,52	0,00	0	273,44	273,40	— 0,04	16	436,42	436,40	— 0,02	4
26	106,99	107,05	+ 0,06	36	276,91	276,81	— 0,10	100	439,89	439,87	— 0,02	4
27	110,46	110,51	+ 0,05	25	280,38	280,41	+ 0,03	9	443,36	443,30	— 0,06	36
28	113,92	113,80	— 0,12	144	283,84	283,80	— 0,04	16	446,82	446,69	— 0,13	169
29	117,39	117,49	+ 0,10	100	287,31	287,38	+ 0,07	49	450,29	450,33	+ 0,04	16
30	120,86	120,79	— 0,07	49	290,78	290,68	— 0,10	100	453,76	453,80	+ 0,04	16
				0,1328				0,0871				0,1252

Errore medio dell'osservazione di un passaggio = 0,062
» » della media . . . . = 0,006

Sarebbe inutile di riportare qui altre tabelle consimili con cui abbiamo ottenuto altri errori medî di un passaggio. Dall'insieme delle nostre ricerche si ricava che l'errore medio di una singola osservazione di un passaggio per ambedue gli osservatori che hanno fatto l'esperienze è di $0^s,06$. La media di 100 osservazioni successive, per le quali del resto non si richiedono in ogni caso che pochi minuti, ha pertanto un errore medio di 0,006 ed un errore probabile di 0,004, che evidentemente corrisponde alla massima precisione cui si potrebbe aspirare anche con un sistema di registrazione automatico istantaneo e perfetto, poichè nel detto errore sono comprese naturalmente le leggere incertezze dovute alla registrazione dei secondi del regolatore astronomico.

§ XXI.

Rimane la ricerca dell'errore costante, che in realtà può essere diverso al principio e alla fine dell'esperienza a causa della diversa rapidità con cui nei due casi si produce il fenomeno del passaggio. Però nel caso nostro anzichè i valori assoluti dei due errori era solo importante di determinare la loro differenza, corrispondente all'errore definitivo che producono in un intervallo di tempo; così solo a questo scopo abbiamo indirizzato le nostre ricerche.

Fu dunque pensato di determinare la durata di oscillazione d'un medesimo pendolo (tenuto naturalmente a temperatura costante) sia per mezzo della registrazione automatica, sia per mezzo delle osservazioni dirette dei passaggi, a fine di comparare i due risultati fra loro. Nell'ultima di tali determinazioni abbiamo seguìto lo stesso sistema che fu poi adottato nella determinazione della gravità e che è il seguente. Al principio dell'intervallo da misurare si osservavano tre serie di passaggi per la verticale, ciascuna composta di 31 osservazioni ed a piccolo intervallo di tempo l'una dall'altra. Una determinazione analoga si faceva per la fine dell'intervallo; le 6 serie corrispondono a 6 tempi che rappresenteremo sempre con I, II, III, IV, V, VI. È agevole di vedere che facendo astrazione dagli intervalli I-II, II-III, I-III, IV-V, V-VI, IV-VI, che sono troppo brevi per poterne dedurre con una certa fiducia la durata delle oscillazioni, le combinazioni di tempo che debbono considerarsi nella determinazione della durata suddetta sono tre sole, scelte per modo da essere indipendenti completamente l'una dall'altra [1]. Noi abbiamo sempre scelto le combinazioni I-IV, II-V, III-VI, calcolandone però anche altre tre, cioè le V-I, VI-II, IV-III per riprova dell'esattezza dell'operazione aritmetica. Ciò posto, è facile intendere il significato della

[1] Sia in generale θ l'errore commesso nell'apprezzamento del tempo T; i diversi intervalli possibili nel nostro caso fra i tempi osservati sono i seguenti:

$$T_4 - T_1 + \theta_4 - \theta_1 = I_1 \qquad T_5 - T_1 + \theta_5 - \theta_1 = I_4 \qquad T_6 - T_1 + \theta_6 - \theta_1 = I_7$$
$$T_4 - T_2 + \theta_4 - \theta_2 = I_2 \qquad T_5 - T_2 + \theta_5 - \theta_2 = I_5 \qquad T_6 - T_2 + \theta_6 - \theta_2 = I_8$$
$$T_4 - T_3 + \theta_4 - \theta_3 = I_3 \qquad T_5 - T_3 + \theta_5 - \theta_3 = I_6 \qquad T_6 - T_3 + \theta_6 - \theta_3 = I_9$$

da cui si deduce per la media I_m degli intervalli;

$$I_m = \frac{T_4 + T_5 + T_6 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - T_1 - T_2 - T_3 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{3}$$

che dimostra il principio di calcolo indicato nel testo.

tavola seguente, che contiene la determinazione fatta il 9 agosto con uno dei nostri pendoli d'esperienza, ed i risultati dei calcoli relativi.

Col tasto a mano

Combinazioni	Ampiezza iniziale di oscillazione	Ampiezza finale di oscillazione	Numero delle oscillazioni	Durata calcolata
I - IV	0°.48'.00"	0°.07'.00"	22214	1s,412 215.7
II - V	0°.47'.00"	0°.06'.50"	22234	1, 412 213.7
III - VI	0°.46'.00"	0°.06'.30"	22230	1, 412 216.0
			Media	1, 412 215.1

Per mezzo della registrazione automatica si ottenne da un numero di 22568 oscillazioni fra le ampiezze 48'. 30" e 6'.50" il valore della durata di un'oscillazione:

1s,412 215.0

Così pure un'altra esperienza fatta il giorno successivo ha dato:

Col tasto a mano

Combinazioni	Ampiezza iniziale di oscillazione	Ampiezza finale di oscillazione	Numero delle oscillazioni	Durata calcolata
I - IV	1°.00'.20"	0°.08'.30"	23288	1s,412 218.8
II - V	0. 59. 45	0. 08. 20	23280	1, 412 218.2
III - VI	0. 57. 45	0. 08. 10	23864	1, 412 217.1
			Media	1,412 218.0

La registrazione automatica in un intervallo di tempo di 23792 oscillazioni fra le ampiezze 1°.00'.45" e 0°.08'20" dette pure per il valore della durata di un'oscillazione

1s,412218.0.

Le molte esperienze di confronto ci hanno perfettamente convinti che la precisione del tasto a mano, adottando un centinaio di osservazioni per determinare il principio e la fine di un intervallo, non lascia nulla a desiderare, ed è pari a quella della registrazione automatica e che inoltre è del tutto esente da ogni errore sistematico nell'apprezzamento dell'intervallo (1).

(1) È utile di notare che il confronto del tasto a mano col risultato della registrazione automatica porge uno dei sistemi più comodi e precisi per determinare il valore assoluto dell'equazione personale degli osservatori, se si ha cura di stabilire l'apparecchio della registrazione automatica perfettamente nella stessa verticale del filo del pendolo, e si leggono le registrazioni cronografiche con una macchina a dividere.

§ XXII.

La riduzione della durata media di un'oscillazione osservata alla durata corrispondente in archi infinitesimi implica la misura delle ampiezze iniziali e finali, e la conoscenza della legge secondo cui tali ampiezze vanno successivamente diminuendo nel mezzo in cui le oscillazioni si compiono.

Abbiamo già indicato nel paragrafo precedente la disposizione che adottammo per la misura di tali ampiezze; la piccolezza della distanza fra il filo oscillante e la scala graduata rispetto alla distanza fra la scala ed il cannocchiale di lettura permettevano nel nostro caso di far completamente astrazione dalla parallasse fra un' ampiezza reale e la apprezzata. La scala essendo lineare, in realtà anzichè gli angoli di ampiezza si lessero le loro tangenti, relative ad un cerchio di $1^m,720$ di raggio, giacchè tale era la distanza fra l'asse di sospensione del pendolo ed il lembo orizzontale della scala (lembo superiore) su cui le ampiezze vennero lette, e ciò tanto per i pendoli corti quanto per i lunghi. Anzichè ridurre in gradi tali tangenti abbiamo preferito d'introdurle direttamente nei calcoli, modificando in conseguenza le formule di riduzione ad archi infinitesimi. Le letture furono fatte subito prima e dopo ogni serie di passaggi, ed a ciascuna di queste serie è stata attribuita l'ampiezza media di quelle che la comprendevano.

Il sistema di lettura ora descritto può sembrare piuttosto grossolano rispetto alle delicate previgenze che abbiamo adottate per tutte le altre misure. In realtà nel delineare il piano del nostro lavoro ci eravamo prefissi d'istituire anche alcune ricerche di grande precisione sulla legge di decrescimento delle ampiezze, ma poi siamo stati distolti dal mettere in esecuzione il nostro progetto cui torneremo più tardi ([1]). Si deve però notare che dentro i limiti di ampiezza da noi tenuti nelle nostre esperienze una maggiore precisione nella misura delle ampiezze sarebbe stata interamente superflua.

È noto che Sabine ([2]), dalle proprie osservazioni fatte con un pendolo invertibile nel vuoto (pendolo di Kater, modificato), concluse che la formula comunemente adottata per la riduzione ad archi infinitamente piccoli, fondata sull'ipotesi del decremento dell'ampiezza secondo una progressione geometrica, non poteva venire accettata neppure per ampiezze assai piccole, come per esempio per quelle dentro 40′. In realtà la conclusione di Sabine si riferisce essenzialmente ai pendoli a coltello, come facilmente si comprende dal metodo d'esperimento da lui adottato: del resto più tardi Baily ([3]) nelle sue ricerche sul pendolo, qui altre volte ricordate, ripetendo le esperienze di Sabine giunse a tutt'altro risultato, e mostrò che le anomalie notate da Sabine, e che questi aveva attribuite alla insussistenza dell'ipotesi suindicata, erano di carattere del tutto accidentale e dovevano essere ascritte all'influenza del modo

([1]) Durante il tempo richiesto per la stampa di questo lavoro le ricerche cui si allude nel testo sono state spinte innanzi, ed i risultati saranno pubblicati fra breve.

([2]) Captain Edw. Sabine, *Experiments on the Length of the Seconds Pendulum at the Royal Observatory of Greenwich*. Phil. Trans. 1831. Vol. 121, pag. 461.

([3]) Phil. Trans. anno 1832, pag. 468, 469.

di sospensione. Tuttavia Baily fa notare che nello stato attuale della quistione, e nella ignoranza in cui siamo ancora sulla legge di decremento delle ampiezze, è necessario esperimentare dentro archi di oscillazione molto piccoli, ma che dentro un grado la correzione usuale suindicata dà risultati completamente soddisfacenti. Queste considerazioni di Baily non sono del resto prive di rigoroso fondamento scientifico; così Stokes e Meyer, nei loro lavori sul movimento pendolare di una sfera in un fluido resistente più volte ricordati in questa Memoria, osservano che negli archi di oscillazioni infinitamente piccoli la legge logaritmica di decrescenza dovrebbe essere esattamente verificata e quindi una tale legge può esser considerata come una legge limite, a cui più e più si accosta la vera legge di decrescenza per ampiezze finite quanto più queste sono piccole. Nel 1850 fu poi pubblicata una Memoria di Gronau [1] in cui egli propone la legge di decrescimento:

$$\log\left(\frac{\Phi}{\varphi}\,\frac{1+\delta\varphi}{1+\delta\Phi}\right)=n\varepsilon$$

ove Φ rappresenta l'ampiezza iniziale, φ la finale dopo n oscillazioni, δ ed ε delle costanti. È agevole di vedere che quando Φ e φ sono assai piccoli questa legge non differisce sensibilmente dalla solita legge logaritmica, giacchè in questo caso $\delta\Phi$ e $\delta\varphi$ divengono trascurabili rispetto all'unità. Negli Annali di Poggendorff del 1871 si trovano poi riportate le esperienze che fece O. E. Meyer per constatare la legge di Gronau, e che sono in soddisfacente accordo con questa [2].

Dal sin qui detto concluderemo:

1° Che nello stato attuale delle cognizioni nostre sul decremento delle amplitudini è necessario esperimentare dentro ampiezze molto piccole, per le quali si può stabilire con Baily come limite massimo 1°.

2° Che dentro questo limite la correzione ad archi infinitamente piccoli può essere calcolata nell'ipotesi di un decremento logaritmico nelle ampiezze.

Con tuttociò, senza intendere per certo di giungere pel momento a una conclusione definitiva su questo proposito, abbiamo creduto opportuno di usufruire delle facilità con cui il metodo di osservazione col tasto a mano si presta alla determinazione della durata di oscillazione sia per grandi sia per piccole ampiezze, per constatare se realmente la usuale correzione ad archi infinitamente piccoli era abbastanza precisa per ampiezze minori d'un grado.

L'osservazione dei passaggi per la verticale fatta per mezzo del solito cannocchiale di lettura sopra descritto quando le ampiezze sono molto piccole (per esempio dentro 5′) riesce per altro troppo incerta, ed è necessario sostituire a questo cannocchiale un mezzo ottico molto più potente. Ma per ampiezze piccolissime a ciò si prestano egregiamente i nostri microscopî di misura fissati nel muro, e dei quali gli assi ottici sono già di per sè stabiliti nel piano verticale che contiene l'asse del filo del pendolo nella sua posizione di riposo. Abbiamo dunque potuto determinare con tutta precisione sia la durata delle oscillazioni con ampiezze assai

[1] *Ueber die Bewegung Schwingender Körper in widerstehenden Mittels.* Danzig-Programm.
[2] *Pendelbeobachtungen* von Oskar Emil Meyer. Annalen der Physik und Chemie. Band CXLII.

grandi, sia quella corrispondente ad ampiezze piccolissime. Riportiamo qui sotto i risultati d'una esperienza.

Ampiezze grandi. Osservazioni col cannocchiale di mira.

Combinazioni	Ampiezza iniziale di oscillazione	Ampiezza finale di oscillazione	Numero delle oscillazioni	Durata dell'oscillazione
I - IV	0°.48'.00"	0°.07'.00"	22214	1^s,412 215.7
II - V	0°.47'.30"	0°.06'.50"	22234	1,412 213.7
III - VI	0°.46'.30"	0°.06'.40"	22230	1,412 216.0
			Media	1,412 215.1

Ampiezze piccolissime. Apprezzamento col microscopio

Combinazioni	Ampiezza iniziale di oscillazione	Ampiezza finale di oscillazione	Numero delle oscillazioni	Durata dell'oscillazione
I - IV	0°.06'.30"	0°.04'.00"	11900	1^s,412 208.3
II - V	0°.05'.30"	0°.02'.00"	9594	1,412 210.7
III - VI	0°.04'.30"	0°.02'.00"	6764	1,412 209.8
			Media	1,412 209.6

Da questi risultati si trae:

Durata osservata con grandi ampiezze. . . . . 1^s,412 215.1
Riduzione ad archi infinitamente piccoli . . . . — 4.5

1,412 210.6

Durata osservata con piccole ampiezze. . . . . 1^s,412 209.6
Riduzione ad archi infinitamente piccoli . . . . — 0.1

1,412 209.5

Come si vede la differenza fra i risultati è dell'ordine degli errori di osservazione.

§ XXIII.

Questo confronto ci è sembrato tanto più interessante inquantochè, non ha molto, il prof. Respighi esternò la sua opinione contraria alle ampiezze piccole, in cui teme l'*influenza delle cause perturbatrici del fenomeno e delle inevitabili imperfezioni del pendolo* (1). In realtà nelle formule che si adottano per la riduzione delle oscillazioni d'un pendolo composto a quelle del corrispondente pendolo semplice non

(1) *Esperienze fatte al r. Osservatorio del Campidoglio per la determinazione del valore della gravità*. R. Accademia dei Lincei anno 279, 1881-82.

è minimamente implicata l'ipotesi di una grossezza infinitesima del filo (come apparirebbe dallo scritto del prof. Respighi), almeno nel caso di sospensione a lamine o a coltelli; in quello a morse, adottato da lui, bisogna in vero, nel metodo di Borda, sottoporre a calcolo l'elasticità in quella sezione del filo in cui è compreso l'asse di sospensione; ma l'asse di sospensione non è nemmeno in questo caso un asse fisico di grossezza apprezzabile, rimane un asse *matematico* perfettamente definito. Non sapremmo dunque intendere quale idea abbia guidato il prof. Respighi a temere che *in prossimità della verticale, per una parte dell' arco dipendente dalla grossezza del filo, l'azione della gravità sul moto del pendolo resti paralizzata o distrutta.* In realtà non è questo il solo punto in cui, sulla scelta del sistema per misurare la gravità, dissentiamo dal prof. Respighi; egli pone innanzi il dubbio che l'obbligare il pendolo ad oscillare in un piano non sia per introdurre delle influenze nocive sulla durata dell'oscillazione, e quindi, propugna il principio che le determinazioni della gravità di alta precisione si debbano fare con pendoli soggetti al fenomeno di Foucault; noi crediamo che se la rotazione della terra avesse un' influenza sensibile, questa si manifesterebbe bensì nel caso di un pendolo che presenti il fenomeno di Foucault, non già in pendoli obbligati ad oscillare in un piano. Avevamo già pensato alla maniera di fare un confronto fra la durata di oscillazione di un pendolo libero e quella di un pendolo obbligato in un piano ma nel resto perfettamente identico al primo: però lo studio ulteriore della quistione ci ha fatto poi rinunziare a qualunque esperienza di simil genere. È noto che Baily ha dimostrato esperimentalmente che in un pendolo con una sospensione simile alla nostra, ma in cui alla *lamina* di sospensione sia sostituito un filo, si verificano delle anomalie dovute al movimento conico ellittico, durante il quale l'asse maggiore dell' ellisse direttrice ruota, come è noto, intorno al centro di questa curva; ma l'illustre scienziato si affretta d' aggiungere che tale non è il caso della sospensione a lamina in cui, come abbiamo avuto campo di constatare, il movimento del pendolo si compie esattamente in un piano.

Ora in questo caso, sotto il punto di vista analitico, un pendolo a lamina come il nostro non differisce punto da un pendolo bifilare, giacchè in generale, la sola distinzione analitica fra i due dipende dall' influenza che avrebbe sul moto pendolare del primo la deformazione che la lamina può subire a causa del movimento rotatorio terrestre. Ma la niuna diretta influenza della rotazione diurna sulla durata delle oscillazioni di un pendolo obbligato a muoversi in un piano, emerge immediatamente se si osserva, come ci ha suggerito il prof. Cerruti, che la forza centrifuga composta, dalla quale bisogna intendere animata ogni particella del corpo pendolare per tener conto della rotazione suddetta, incontra l'asse di sospensione e quindi, avendo rispetto ad esso un momento nullo, influisce soltanto sulle pressioni che tale asse deve sopportare.

Nel caso di un pendolo libero lo studio del fenomeno pendolare è molto complicato: ricorderemo in proposito l'opinione di Gauss, che in una sua lettera diretta il 30 dicembre 1852 a Gerling scriveva « *Quando mi si dice che - sussiste pur sempre un* desideratum *rispetto alla esperienza di* Foucault - *rispondo che la spiegazione dell'oscurità sussistente sta, a mio giudizio, semplicemente in questo, che si tiene la questione per più facile che realmente non sia e si crede ch'essa possa*

venir risoluta con un aperçu........, *credenza che non ha alcun fondamento*....... *Ma se si suppone* B (centro di sospensione) *mobile secondo una data legge*..... *il problema diventa non che molto difficile, ma quasi specificamente diverso* (dal caso di B fisso)..... *S'inganna chi crede che, per essere così agevole la soluzione nel primo caso, essa possa essere altrettanto facile, o poco meno, nel secondo, che ne differisce specificatamente: non si può che consigliargli di condurre a termine lo sviluppo rigoroso nell'uno e nell' altro caso* [1]. A vincere una tale difficoltà si sono accinti molti illustri analisti come Binet, Quet, Hansen, Plana, Clausen, Dumas, Serret: non è qui per certo il caso di discutere i loro risultati, ma ci limiteremo a ricordare che il sig. Quet, in una prima approssimazione, giunge all'espressione seguente per la durata di un oscillazione:

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta^2 + \dfrac{n^2 l \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\dfrac{\theta}{2}}{g}}{16}\right)$$

ove θ rappresenta la *massima* ampiezza iniziale, n la velocità angolare terrestre, φ la latitudine [2]. A qualche cosa di simile giunge pure Hansen; ma della sua memoria in proposito non abbiamo però potuto consultare che un estratto, per verità assai conciso, inserito negli Annali di Poggendorff del 1854.

Noteremo finalmente di volo che, nel caso del movimento ellittico, la riduzione ad archi infinitesimi è un poco diversa da quella che si suole adottare, e che corrisponde al caso del movimento piano.

§ XXIV.

Neppure ci sembra giustificata l'idea che i pendoli molto lunghi e le palle molto pesanti siano, in generale, preferibili ai pendoli corti e leggeri, intendendo qui, come è naturale, che nel caso di pendoli leggeri, si abbia la cura di esperimentare in un mezzo perfettamente tranquillo, e che la leggerezza non sia spinta oltre certi limiti, e, in fine, che le esperienze in quest'ultimo caso siano reiterate fino a dare al loro medio risultato lo stesso peso di quello che ha un esperimento con pendoli pesanti. Nelle classiche esperienze di Bessel, in cui l'illustre astronomo adottò anche palle di avorio, venne dato al complesso dei risultati di queste l'identico peso che a quelli ottenuti con palle di ottone. Noi, per maggiore precauzione, abbiamo voluto evitare le palle in cui la distribuzione delle densità poteva lasciare qualche dubbio, e così alla palla di avorio di Bessel abbiamo sostituito una palla di alluminio, e successivamente, sembrandoci che la fusione dell'alluminio non fosse riuscita perfetta, delle palle cave di ottone, perfettamente tornite all'esterno e all'interno col tornio da sfere; abbiamo aggiunto una palla di densità molto superiore a quella pesante di Bessel,

(1) *Discorso di Ernesto Schering nella solennità del Centenario dalla nascita di F. Gauss.* - Annali di Matematica pura ed applicata. - Milano, serie 2ª, tomo IX.

(2) *Des mouvements rélatifs en général et spécialement des mouvements rélatifs sur la terre.* Journal des mathematiques pures et appliquées. - Paris 1853, tomo VIII, I^re série.

formando una lega di piombo ed antimonio, e così abbiamo ottenuta la seguente scala di densità medie:

Palla di piombo	10,373
Palla di ottone piena.	8,367
Palla cava di ottone n. 2 . . .	4,487
Palla di alluminio	2,637
Palla cava di ottone n. 1 . . .	1,626

lo che ci permise di stabilire tre equazioni più di quelle analiticamente necessarie alla determinazione simultanea della lunghezza del pendolo a secondi e del coefficiente d'attrito [1]: il numero delle equazioni sovrabbondanti verrà molto accresciuto con una seconda serie di esperienze in cui deve essere variata la lunghezza del filo, tanto per il pendolo corto quanto per il lungo: infine le nostre palle sono molto più grosse e i pezzi accessorî molto più leggeri di quelli di Bessel [2]. Tutte queste precauzioni e modificazioni sono intese ad accrescere la precisione dei risultati; ma per tale scopo, dopo lunga e minuta discussione, non solo non abbiamo aumentata la lunghezza del pendolo Besseliano, ma se si dovesse costruire un nuovo apparecchio ridurremmo tale lunghezza a soli due metri per il pendolo lungo e ad un metro per il corto.

La seguente breve discussione non può lasciar dubbio negli esperimentatori sulla convenienza di tale accorciamento. Sieno l_1, l_2 le lunghezze di due pendoli semplici, t_1, t_2 le corrispondenti durate di oscillazione, ed abbiasi per ipotesi $l_1 > l_2$, ed in conseguenza $t_1 > t_2$. È facile vedere che fra l'accelerazione g e le quattro quantità ora indicate si ha la relazione:

$$g = \frac{\pi^2 (l_1 - l_2)}{t_1^2 - t_2^2}$$

la quale, in sostanza, serve di fondamento alla determinazione della gravità per mezzo del sistema del pendolo differenziale, ed, in questo caso, le quantità $l_1 - l_2 = \lambda$, t_1, t_2 debbono esser considerate come quantità osservate direttamente ed indipendentemente l'una dall' altra. Ciò posto osserviamo che, considerando g come funzione di λ, t_1, t_2, e differenziando la formula precedente si ottiene:

$$dg = \frac{g d\lambda}{\lambda} - 2g \frac{t_1 dt_1 - t_2 dt_2}{t_1^2 - t_2^2}$$

[1] È da osservare che a tutto rigore le due equazioni finali cui giunge Bessel relative ai suoi due pendoli di misura, non sarebbero sufficienti alla determinazione delle sue tre incognite; ed è ben notevole il modo con cui egli giunge ai valori di queste, valori che del resto non trovano conferma in osservazioni superflue.

[2] Riportiamo qui i rapporti fra i pesi delle palle e quelli dei loro accessorî tanto pei nostri pendoli lunghi quanto per quelli di Bessel.

(pendoli nostri)		(pendoli di Bessel)	
Palla di piombo	478, 87	Palla di ottone	151, 68
Palla d'ottone piena	397, 95	Palla di avorio	35, 00
Palla cava d'ottone N. 1	87, 47		
Palla d'alluminio	171, 37		
Palla cava d'ottone N. 2	255, 48		

ovvero, ponendo $T = t_1^2 - t_2^2$:

$$dg = g\left(\frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{dT}{T}\right);$$

da cui si vede che, se $\Delta\lambda$ e ΔT rappresentano respettivamente gli errori medî nelle determinazioni di λ e T, l'errore medio di una determinazione di g è dato da:

$$\Delta g = g\sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}.$$

Le circostanze più proprie alla determinazione di g sono dunque quelle per cui si ha:

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2} = \text{minimum}.$$

Ciò posto, ricordiamo che per essere

$$dT = 2t_1\, dt_1 - 2t_2\, dt_2,$$

se Δt_1, Δt_2 sono gli errori medî delle determinazioni indipendenti di t_1 e t_2, si deve porre, come è noto:

$$\Delta T = 2\sqrt{t_1^2 (\Delta t_1)^2 + t_2^2 (\Delta t_2)^2}$$

D'altra parte è assai chiaro di per sè che per i due pendoli coniugati si può assumere $\Delta t_1 = \Delta t_2$, come, del resto, nel caso nostro venne provato esperimentalmente (V. § XX): perciò al soprascritto valore di Δg si può dare la forma:

$$\Delta g = g\sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + \frac{4\,(t_1^2 + t_2^2)\,(\Delta t)^2}{(t_1^2 - t_2^2)^2}}$$

la quale relazione, ponendo $\theta^2 = \frac{t_2^2}{t_1^2}$, si cambia in:

$$\Delta g = g\sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + \frac{4\,(1 + \theta^2)\,(\Delta t)^2}{(1 - \theta^2)^2}}.$$

Ora, in questa, le quantità λ e θ debbono esser considerate come indipendenti l'una dall'altra, giacchè qualunque sia λ si possono scegliere l_1, l_2 in modo che θ prenda qualunque dei valori compresi fra zero ed uno, sola condizione che, nelle nostre ipotesi, è richiesta per tale quantità: così il minimo di Δg corrisponde alle due condizioni separate:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \text{minimum}$$

$$\frac{(1 + \theta^2)}{(1 - \theta^2)^2} = \text{minimum}$$

giacchè Δt, nell'ipotesi sopra ammessa, deve esser considerato come costante.

Esaminiamo queste due condizioni separatamente: se indichiamo con Δp l'errore medio della campionatura d'una lunghezza eguale sensibilmente al prototipo di misura e con $\Delta\lambda$ quello d'una lunghezza λ multipla del prototipo, misurata per mezzo di comparatori successivi di ugual precisione ed in identiche circostanze di osservazione, si ha come è noto:

$$\Delta\lambda = \Delta p \sqrt{\lambda} \quad \text{e perciò:} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta p}{\sqrt{\lambda}},$$

Quest' ultima relazione dimostra come, teoreticamente, non esiste minimo per il rapporto $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, ma che il valore di questo rapporto diminuisce assai lentamente col crescere della lunghezza del pendolo: così per es. passando da un pendolo di due metri ad uno di nove la precisione, per quanto concerne direttamente λ, non è aumentata che nel rapporto di 2 a 3.

Ma le circostanze di osservazione sopra indicate, sulla esistenza delle quali si fonda la precedente legge di diminuzione di $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ col crescere di λ, sono difficilissime ad essere ottenute in pratica, perciò, in generale, la diminuzione considerata è molto meno rapida, anche adottando la massima precauzione nelle misure [1]. Nel caso nostro poi, nel quale la costanza e la distribuzione della temperatura ha una importanza speciale, non temiamo di affermare che in realtà si ha un minimo valore del rapporto $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ scegliendo per λ una lunghezza eguale a quella del prototipo di misura, nel qual caso il detto valore minimo è Δp. Del resto conviene notare che l'aggiungere altri comparatori verticali successivi complicherebbe molto l'apparecchio, e condurrebbe ad un lunghissimo tempo di aggiustamento prima di ogni misura lineare, con grande scapito della precisione.

In quanto alla seconda condizione, qualunque sia il valore di λ che si presceglie, essa è evidentemente soddisfatta da $\theta = 0$; e, poichè si ha $\theta^2 = \frac{t_2^2}{t_1^2} = \frac{l_2}{l_2} = \frac{l_2}{l_2+\lambda}$, si vede che conviene rendere piccola quanto è possibile fisicamente la lunghezza del pendolo corto. Per altro questa condizione in pratica è limitata dalla necessità di apprezzare nettamente gli istanti dei passaggi del filo per la verticale: la pratica acquistata coi nostri apparecchi ci ha appunto convinti che la lunghezza del pendolo corto deve essere almeno di un metro.

XXV.

Dobbiamo ora indicare più particolarmente come abbiamo proceduto per la ricerca ed il calcolo dei valori dei diversi elementi che entrano nelle formule (9): si deve notare in proposito che, ciascuna equazione della forma (10) cui dànno luogo due esperienze coniugate dovendo entrare in calcolo collo stesso peso delle altre analoghe, naturalmente il numero delle esperienze elementari che contribuivano alla formazione di ciasuna di tali equazioni doveva variare colla densità della palla relativa, giacchè l'intervallo di tempo che corre fra le ampiezze che limitano le osservazioni e che noi abbiamo tenuto pressochè costanti, è molto maggiore con palle pesanti di quello che non sia con palle leggere. Il sistema seguìto da noi per determinare i numeri di esperienze elementari che dovevano contribuire alla formazione delle

[1] Qui non consideriamo naturalmente il caso in cui le distanze non vengano dedotte con misure rigorose e sotto comparatori di precisione. Ci contentiamo di far notare che la precisione che si garantisce sotto un comparatore è di un micron su di un metro (pendolo a secondi); bisognerebbe che potesse esser dunque accertato un decimo di millimetro su cento metri nelle misure fatte con aste o con altri ripieghi perchè esse potessero esser poste a confronto con quelle che qui sono discusse.

diverse equazioni di condizione sarà esposto fra breve; per adesso notiamo solamente che le durate delle oscillazioni che entrano in ciascuna di tali equazioni provengono dalla media di diversi valori, che in realtà sono ottenuti sotto circostanze leggermente diverse, e che quindi debbono essere ricondotti a quelli che si sarebbero ottenuti in circostanze normali. Naturalmente tale riduzione si fa per mezzo di lievi correzioni ai valori osservati, e della ricerca di tali correzioni vogliamo ora occuparci.

Cominciamo a parlare della distanza fra i microscopî in ciascuna esperienza completa; abbiamo già indicato che tale distanza, la quale rappresenteremo in generale con D, è osservata prima, durante e dopo l'esperienza stessa. In queste tre osservazioni la temperatura può essere leggermente diversa, ed è quindi necessario di ridurre i risultati ad una temperatura unica, che diremo temperatura normale, e per cui abbiamo scelta la temperatura media fra quelle osservate nelle singole esperienze elementari con ciascuna palla. Sia M_0 la lunghezza del prototipo di misura alla temperatura 0^0 centigradi: nel nostro caso alla temperatura θ, ritenendo per i coefficienti dell'acciaio (provvisoriamente fino a una ulteriore determinazione coll'apparecchio di Fizeau) i valori riportati dal Naccari e Bellati, si ha:

$$M_\theta = M_0 (1 + 0{,}000\,010\,52\,\theta + 0{,}000\,000\,006\,2\,\theta^2).$$

Per M_0 fu assunto nel calcolo un valore provvisorio, cui avevamo ragione di dare una grande fiducia, provenendo esso dalla comparazione del prototipo usato con un metro campione a tratti, preventivamente studiato e comparato a sua volta col metro campione degli archivî. Tale valore provvisorio è:

$$M_0 = 1^m - 2^\mu,3$$

ed in base ad esso furono eseguiti tutti i calcoli, salvo a ridurre i risultati dopo una comparazione diretta col metro degli archivî. Rappresentando con Δ_1, Δ_2 le letture fatte coi microscopî sulle mire del metro si ha, nella disposizione data ai nostri micrometri ([1]):

$$D_\theta = M_\theta + \Delta_1 - \Delta_2:$$

quindi ciascuna misura di distanza fra i microscopî darà un valore:

$$D_\theta = \Delta_1 - \Delta_2 + (1^m - 2^\mu,3)\,(1 + 0{,}000\,010\,52\,\theta + 0{,}000\,000\,006\,2\theta^2)$$

che deve essere ancora ridotto alla temperatura normale θ_m. Per coefficiente di dilatazione del muro di sostegno dei microscopî, dietro le esperienze già sopra riportate, abbiamo assunto 0,000010, e quindi si è posto:

$$(11)\qquad D_{\theta m} = D_\theta\,(1 + 0{,}000\,010)\big((\theta_m - \theta)\big)$$

Del resto la temperatura era, nel caso nostro, sì poco variabile che la riduzione delle osservazioni a temperatura normale non sorpassa mai due micron.

Le durate medie delle oscillazioni in ogni singola esperienza furono determinate come segue. Avanti e dopo l'esperienza, a piccoli intervalli dal principio e dalla fine, furono osservati dei passaggi del filo per la verticale col solito metodo di reiterazione: le novanta osservazioni consecutive fatte per determinare il principio e la fine danno un valore già discretamente approssimato della durata che si cerca, e questo,

([1]) V. in seguito la figura schematica dei pendoli.

introdotto nei piccoli intervalli suddetti, dà il numero di oscillazioni che sono comprese in essi, e quindi un nuovo valore più approssimato della durata stessa, che, introdotto successivamente in intervalli maggiori, si riduce man mano più preciso: dopo due o tre approssimazioni successive non resta più dubbio sull'esattezza delle prime 5 cifre decimali nella durata dell'oscillazione: introducendo questa nell'intervallo totale definitivo si ottiene il numero totale di oscillazioni compreso in esso, numero che deve essere intero: l'intervallo totale, diviso allora per questo numero, dà il valore cercato della durata media di oscillazione.

§ XXVI.

A questa durata, così calcolata, devonsi fare quattro diverse correzioni che sono le seguenti:

a) Riduzione ad archi infinitamente piccoli;

b) Riduzione alla temperatura normale;

c) Riduzione del pendolo corto al livello del pendolo lungo;

d) Riduzione a tempo medio.

A queste dovrebbero teoreticamente aggiungersi due altre correzioni, la prima delle quali, già trattata da Poisson e da Paoli [1], dovuta alla forza centrifuga che si sviluppa durante il movimento pendolare, e di cui l'azione produce un allungamento del filo del pendolo periodicamente variabile durante il moto: l'entità di tale allungamento dipende dal coefficiente di elasticità di prima specie del filo di sospensione e dalla grossezza di questo filo, ed ha per effetto un aumento nella durata dell'oscillazione: la seconda correzione poi è inerente alla diminuzione che riceve la trazione del filo quando il pendolo è deviato dalla verticale; questa diminuzione consegue dall'angolo che allora la direzione del filo fa colla direzione della gravità.

Però nelle piccole ampiezze tenute nelle nostre esperienze queste correzioni sono completamente trascurabili: senza entrare in sviluppi analitici, che, volendo tener conto di tutti gli elementi del problema, riescono assai complicati e presentano difficoltà di calcolo assai gravi, si può avere un'idea della loro esiguità calcolando i valori limiti che assumerebbero, la prima nel caso in cui il pendolo si muovesse con velocità costante, ed uguale alla massima che realmente assume durante il suo moto, la seconda nell'ipotesi che il filo del pendolo abbia sempre la lunghezza che assume nel momento della massima deviazione dalla verticale. Secondo il prof. Cerruti poi la correzione da farsi al valore di g per la estensibilità del filo di sospensione sarebbe la seguente:

$$g_{\text{corr.}^o} - g_{\text{osserv.}^o} = 2 g^2_{\text{osserv.}^o} \frac{\varphi_0^2 \cdot \mathrm{H}}{1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + \frac{11 \varphi_0^4}{3072}}$$

nella quale si ha:

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{P} l^2}{96 \mathrm{I} \mathrm{L} p c^2} \left\{ p (9\mathrm{L}^2 - 4l\mathrm{L} - 3\lambda\mathrm{L} + 24\lambda l) + 6\mathrm{P}(3\mathrm{L}^2 + 12\lambda^2 - 4\lambda\mathrm{L}) \right\}$$

[1] *Sulle oscillazioni di un corpo pendente da un filo estensibile* Memoria del sig. Pietro Paoli. inserita nelle Memorie della Società italiana delle Scienze, tomo XVII. Nel tomo XIV si trova già prima sviluppato lo stesso argomento dallo stesso autore.

l = lunghezza del filo di sospensione (compresa la lamina).
λ = distanza fra l'asse di sospensione ed il centro di gravità della sfera oscillante.
L = lunghezza del pendolo semplice equivalente al pendolo composto considerato (questa lunghezza calcolata al modo ordinario).
p = peso totale del filo, lamina ed accessorî.
P = peso della sfera oscillante (comprese le due piccole appendici).
c = velocità di propagazione del suono nel filo di sospensione.
I = momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di sospensione.
φ_0 = semiampiezza dell'oscillazione nell'istante in cui si principiano le osservazioni.

Applicando questa formula alle nostre esperienze 2ª e 4ª (palla cava di ottone n. 2, e palla di piombo e antimonio) si ottengono sul valore di g rispettivamente le correzioni $1^{\mu}, 00$; $5^{\mu},49$, correzioni che sono trascurabili rispetto al grado di approssimazione che colle nostre esperienze si può raggiungere nel valore di g.

Per la riduzione agli archi infinitamente piccoli abbiamo usato una formula assai comoda, di cui qui accenneremo la deduzione.

Sia C la correzione totale che si deve fare all'intervallo nel quale sono comprese le n oscillazioni che hanno t per durata media, k il rapporto, supposto costante, fra due ampiezze successive, E_1 l'elongazione iniziale misurata in millimetri sulla scala delle ampiezze, E_n l'elongazione finale, in modo che sarà sensibilmente, a causa della grandezza di n e della piccola differenza fra k e l'unità:

$$\frac{E_n}{E_1} = k^n.$$

Rappresentiamo con R la distanza fra la graduazione della scala delle ampiezze e l'asse materiale intorno a cui si compiono le oscillazioni: è noto che nel caso di piccole ampiezze si può porre:

$$C = -\frac{t E_1^2}{16 R^2} \frac{1-k^{2n}}{1-k^2}.$$

Se si pone $k^2 = 1 - \beta = \left(\frac{E_n}{E_1}\right)^{2n}$, β sarà una quantità piccolissima, ed in conseguenza potremo scrivere:

$$-\beta = 2{,}3026 \log(1-\beta) = \frac{4{,}6052}{n} \log \frac{E_n}{E_1}$$

in cui 2,3026 è il valor reciproco del modulo dei logaritmi di Briggs ed i logaritmi sono i comuni. Se ne deduce che il valore della correzione da farsi alla durata media t osservata è:

$$c = \frac{C}{n} = -\frac{t(E_1^2 - E_n^2)}{73{,}682 \ldots\ R^2 (\log E_1 - \log E_n)} \tag{12}$$

La riduzione di t alla temperatura normale θ_m fu calcolata da una formula pure molto semplice che si ottiene subito, considerando il pendolo oscillante come un pendolo semplice (lo che è permesso in questo caso), e ponendo:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Questa relazione, differenziata considerando l, t come variabili, dà:

$$dt = t\,\frac{dl}{2l}\,.$$

Sia q il coefficiente di dilatazione del filo; l'aumento di lunghezza del pendolo dovuto all'aumento $\Delta\,\theta$ nella temperatura è sensibilmente:

$$\Delta\,l = lq\ \Delta\,\theta$$

quindi il calcolo della riduzione alla temperatura normale può farsi ponendo:

$$\Delta t = \frac{tq\,(\theta_m - \theta)}{2} \tag{13}$$

Trattandosi di differenze di temperatura estremamente piccole abbiamo assunto come abbastanza preciso:

$$q = 0{,}000016.$$

Esaminando i valori delle correzioni a temperatura normale relativi alle nostre esperienze riesce evidente che un errore anche notevole in q, errore che d'altronde non può sorpassare 2 o 3 milionesimi, è affatto insensibile: non abbiamo dunque creduto necessaria una determinazione diretta e precisa di questo coefficiente.

Le due durate coniugate di un' esperienza come provengono dall' osservazione non sono comparabili fra loro giacchè nelle due posizioni coniugate la palla oscillante non è alla stessa altezza. Per ridurle comparabili è necessario ridurre la durata relativa ad uno dei pendoli a quella che si sarebbe osservata se la palla avesse avuta la stessa altezza come nell' altro.

Sia Δh la differenza di altezza fra le due posizioni coniugate del baricentro della palla, g_h la gravità all'altezza h sotto la latitudine φ, g_{45} quella al livello del mare sotto la latitudine 45°. Fra le quantità sopra indicate la relazione che si suole supporre, e che tiene conto dell' attrazione addizionale del terreno situato al di sopra del livello del mare, è:

$$g_h = g_{45}\,(1 - m\cos 2\varphi)\left(1 - \frac{5}{4}\,\frac{h}{\mathrm{R}}\right).$$

Quantunque per quanto concerne la riduzione in altezza questa formula dipenda da ipotesi abbastanza incerte, nel nostro caso si ha più che sufficiente precisione nell'applicarla giacchè la differenza Δh fra le due posizioni della palla non è che di un metro: potremo dunque porre con più che sufficente approssimazione:

$$\frac{t_h}{t_{h+\Delta h}} = \sqrt{\frac{g_{h+\Delta h}}{g_h}} = \sqrt{1 - \frac{5}{4}\,\frac{\Delta h}{\mathrm{R}}}$$

ove R rappresenta la media geometrica dei raggi di curvatura principali dell'Ellissoide Terrestre nel punto di latitudine φ. Il valore di $\frac{5}{4\mathrm{R}}$ che ne risulta è 0,000 000 196 mentre nelle nostre esperienze si può costantemente porre $\Delta h = 1$: quindi la riduzione cercata è:

$$t_h - t_{h+\Delta h} = -\,0^s{,}000\,000\,098\,t_{h+\Delta h}$$

Noi abbiamo sensibilmente:

$$t_{h+\Delta h} = 1{,}^s412$$

quindi:

$$t_h - t_{h+\Delta h} = -\,0^s{,}000\,000\,14\,. \tag{14}$$

Infine per la riduzione del tempo del nostro orologio in tempo medio, rappresentiamo con ΔT l'avanzo diurno del regolatore astronomico sul tempo siderale, si avrà:

$$1^s \text{ temp. orol.} = \left(1^s + \frac{\Delta T}{86400}\right) \text{ temp. sid.}$$

e, ricordando che il rapporto fra il tempo siderale e il tempo medio è dato da 0,997269567, si otterrà facilmente:

(15) 1^s temp. orol. $= (0^s,997269567 + 0,00001154\, \Delta T)$ temp. medio.

In seguito ai valori di ΔT indicati al § XVIII abbiamo dunque stabilito la seguente tabella di corrispondenze fra i secondi del pendolo astronomico regolatore e quelli di tempo medio:

Dal 25 Nov. al 6 Dic.	1^s tempo dell'orol.	$= 0^s,997\,254\,3$ temp. med.
» 6 » » 12 »	1^s » »	$= 0,997\,255\,4$ » »
» 12 » » 13 »	1^s » »	$= 0,997\,256\,4$ » »
» 13 » » 19 »	1^s » »	$= 0,997\,257\,4$ » »

Fu già detto più sopra il motivo per cui non abbiamo creduto di dover ritenere l'andamento diurno come continuamente variabile nel senso indicato dai valori precedenti: del resto l'esiguità di tale variazione rende trascurabile la sua influenza nei nostri risultati.

§ XXVII.

Ottenuti i diversi valori che le singole esperienze elementari corrispondenti ad una stessa palla e ad una stessa lunghezza di filo assegnano per la durata di oscillazione in archi infinitamente piccoli, è necessario dedurre l'errore medio della loro media, a fine di poter assegnare il peso all'equazione finale cui dà luogo l'esperienza coniugata. Un tale errore medio dipende da molte cause elementari di disturbo, quali sono le piccole oscillazioni della temperatura durante gli intervalli di moto del pendolo, i tremiti e le vibrazioni del fabbricato, le irregolarità nell'andamento del regolatore astronomico, l'errore di osservazione nella misura dei passaggi ecc., ed è chiaro che sarebbe impossibile di sottoporre a calcolo separatamente tutte queste cause di anomalia. Ma, una volta calcolata la durata definitiva dell'oscillazione ed i numeri di oscillazioni fatte dal pendolo durante gli intervalli che corrispondono alle varie esperienze elementari, è possibile ottenere i valori più probabili degl'intervalli che dovrebbero essere stati osservati se le suddette cause di errore non avessero agito. Siano v_1, v_2, v_3 ecc. le differenze fra gli intervalli osservati ed i calcolati, n il numero delle esperienze elementari fatte collo stesso pendolo (ossia colla stessa palla e la stessa lunghezza di filo); dacchè i singoli intervalli sono per noi pressochè eguali, porremo per l'errore medio M corrispondente alla misura di un intervallo:

$$M = \sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)}}$$

e, se N è il numero medio delle oscillazioni fatte durante l'intervallo medio, l'errore

complessivo medio μ di una determinazione della durata di un' oscillazione sarà dato da:

$$\mu = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{16}$$

e quello della media delle n esperienze elementari da:

$$\nu = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}. \tag{17}$$

Dai diversi valori che prende μ nelle diverse esperienze non solo è possibile di risalire ai pesi delle diverse equazioni ma anche all'errore medio m_1 che, in ogni esperienza elementare, corrisponde all'influenza di tutte le cause perturbatrici di natura e di intensità ignote, giacchè si conosce l'errore medio m della determinazione del principio e della fine di ciascun intervallo, e che è (V. § XX):

$$m = 0^s,006.$$

È facile vedere che in conseguenza si ha:

$$m_1 = \frac{1}{N}\sqrt{M^2+2m^2}. \tag{18}$$

Riassumiamo nelle tabelle seguenti il confronto fra i valori osservati degli intervalli, i corrispondenti valori più probabili ed i diversi errori medî che se ne deducono.

I.ª Esperienza — Palla cava d'ottone N. 2.

Pendolo corto				Pendolo lungo			
Esperienze elementari	Intervallo osservato	Intervallo probabile	v	Esperienze elementari	Intervallo osservato	Intervallo probabile	v
	or m s	or m s	s		or m s	or m s	s
a	3.49.39,26	3.49.39,286	— 0,026	a	3.02.45,69	3.02.45,721	— 0,031
	3.50.58,35	3.50.58,376	— 26		3.02.38,73	3.02.38,783	— 53
	3.52.14,62	3.52.14,646	— 26		3.02.56,05	3.02.56,120	— 70
b	3.41.53,16	3.41.53,199	— 39	b	3.33.51,50	3.33.51,493	+ 7
	3.41.47,60	3.41.47,549	+ 51		3.31.57,08	3.31.57,048	+ 32
	3.41.44,78	3.41.44,723	+ 57		3.38.01,20	3.38.01,190	+ 10
c	3.35.29,05	3.35.29,039	+ 11	c	3.59.10,49	3.59.10,463	+ 27
	3.35.37,52	3.35.37,512	+ 8		3.59.03,58	3.59.03,523	+ 57
	3.35.26,21	3.35.26,208	+ 2		3.59.00,11	3.59.00,054	+ 56

Pendolo corto:
$\mu = 0^s,000\ 0038$
$\nu = 0,000\ 0013$
$m_1 = 0,000\ 0036$

Pendolo lungo:
$\mu = 0^s,000\ 0063$
$\nu = 0,000\ 0021$
$m_1 = 0,000\ 0061$

II.ª Esperienza — Palla cava d'ottone N. 1.

	Pendolo corto				*Pendolo lungo*		
Esperienze elementari	Intervallo osservato	Intervallo probabile	v	Esperienze elementari	Intervallo osservato	Intervallo probabile	v
	or m s	or m s	s		or m s	or m s	s
a	1.21.23,22	1.21.23,198	+ 0,022	*a*	1.11.06,18	1.11.06,198	— 0,018
	1.21.23,21	1.21.23,197	+ 13		1.11.16,61	1.11.16,603	+ 7
	1.21.43,03	1.21.42,977	+ 53		1.11.16,63	1.11.16,602	+ 28
b	1.17.59,73	1.17.59,732	— 2	*b*	1.20.03,79	1.20.03,808	— 18
	1.18.05,36	1.18.05,382	— 22		1.21.16,66	1.21.16,644	+ 16
	1.17.39,93	1.17.39,948	— 18		1.21.58,28	1.21.58,264	+ 16
c	1.19.55,62	1.19.55,591	+ 29	*c*	1.05.36,69	1.05.36,695	— 5
	1.20.26,70	1.20.26,676	+ 24		1.03.45,72	1.03.45,738	— 18
	1.20.35,13	1.20.35,152	— 22		1.03.21,43	1.03.21,422	+ 8
d	1.21.11,88	1.21.11,891	— 11	*d*	1.05.54,00	1.05.54,036	— 36
	1.23.24,63	1.23.24,708	— 78		1.06.35,64	1.06.35,657	— 17
	1.23.50,14	1.23.50,139	+ 1		1.06.49,52	1.06.49,530	— 10
e	1.20.43,63	1.20.43,634	— 4	*e*	1.03.56,10	1.03.56,110	— 10
	1.21.14,72	1.21.14,718	+ 2		1.03.56,14	1.03.56,118	+ 22
	1.20.40,82	1.20.40,807	+ 13		1.04.44,66	1.04.44,667	— 7

Pendolo corto: $\mu = 0^s,000\ 0088$, $\nu = 0,000\ 0022$, $m_1 = 0,000\ 0085$

Pendolo lungo: $\mu = 0^s,000\ 0079$, $\nu = 0,000\ 0020$, $m_1 = 0,000\ 0075$

III.ª Esperienza — Palla piena d'ottone.

	Pendolo corto				*Pendolo lungo*		
Esperienze elementari	Intervallo osservato	Intervallo probabile	v	Esperienze elementari	Intervallo osservato	Intervallo probabile	v
	or m s	or m s	s		or m s	or m s	s
a	7.22.23,27	7.22.23,275	— 0,005	*a*	6.37.27,63	6.37.27,619	+ 0,011
	7.22.51,55	7.22.51,520	+ 30		6.38.26,50	6.38.26,574	— 74
	7.24.58,63	7.24.58,616	+ 14		6.39.22,05	6.39.22,053	— 3
b	6.31.04,69	6.31.04,730	— 40	*b*	5.36.43,04	5.36.43,044	— 4
	6.31.16,08	6.31.16,025	+ 55		5.37.17,73	5.37.17,721	+ 9
	6.30.59,07	6.30.59,078	— 8		5.37.31,64	5.37.31,587	+ 53

Pendolo corto: $\mu = 0^s,000\ 0019$, $\nu = 0,000\ 0008$, $m_1 = 0,000\ 0018$

Pendolo lungo: $\mu = 0^s,000\ 0032$, $\nu = 0,000\ 0013$, $m_1 = 0,000\ 0031$

IV.ª Esperienza. — Palla di piombo e antimonio.

Pendolo corto				Pendolo lungo			
Esperienze elementari	Intervallo osservato	Intervallo probabile	v	Esperienze elementari	Intervallo osservato	Intervallo probabile	v
	or m s	or m s	s		or m s	or m s	s
a	8.01.54,95	8.01.54,933	+ 0,017	a	7.01.03,76	7.01.03,764	— 0,004
	8.02.57,09	8.02.57,073	+ 17		7.02.37,38	7.02.37,394	— 14
	8.03.30,99	8.03.30,967	+ 23		7.03.53,73	7.03.53,676	+ 54
b	7.36.29,64	7.36.29,689	— 49	b	7.24.00,55	7.24.00,537	— 13
	7.36.38,14	7.36.38,156	— 16		7.23.50,10	7.23.50,131	— 31
	7.36.46,62	7.36.46,628	— 8		7.23.32,80	7.23.32,806	— 6

Pendolo corto: $\mu = 0^s,000\ 0013$, $\nu = 0,000\ 0005$, $m_1 = 0,000\ 0013$

Pendolo lungo: $\mu = 0^s,000\ 0020$, $\nu = 0,000\ 0008$, $m_1 = 0,000\ 0018$

V.ª Esperienza — Palla di alluminio.

Pendolo corto				Pendolo lungo			
Esperienze elementari	Intervallo osservato	Intervallo probabile	v	Esperienze elementari	Intervallo osservato	Intervallo probabile	v
	or m s	or m s	s		or m s	or m s	s
a	2.02.05,63	2.02.05,660	— 0,030	a	2.07.51,52	2.07.51,531	— 0,011
	2.02.05,67	2.02.05,659	+ 11		2.07.41,16	2.07.41,126	+ 34
	2.26.00,00	2.02.00,010	— 10		2.07.41,13	2.07.41,126	+ 4
b	2.07.33,41	2.07.33,382	+ 28	b	2.26.21,35	2.26.21,339	+ 11
	2.07.27,74	2.07.27,731	+ 9		2.27.06,42	2.27.06,424	— 4
	2.07.33,38	2.07.33,380	0		2.27.09,92	2.27.09,890	+ 30
c	2.11.08,11	2.11.08,093	+ 17	c	1.57.37,67	1.57.37,672	— 2
	2.11.02,47	2.11.02,446	+ 24		2.03.41,77	2.03.41,827	— 57
	2.11.02,46	2.11.02,441	+ 29		2.04.47,75	2.04.47,720	+ 30
d	2.47.54,52	2.47.54,543	— 23	d	1.56.56,03	1.56.56,057	— 27
	2.47.57,33	2.47.57,364	— 34		1.56.56,08	1.56.56,056	+ 24
	2.48.00,16	2.48.00,192	— 32		1.56.59,50	1.56.59,522	— 22

Pendolo corto: $\mu = 0^s,000\ 0040$, $\nu = 0,000\ 0011$, $m_1 = 0,000\ 0038$

Pendolo lungo: $\mu = 0^s,000\ 0063$, $\nu = 0,000\ 0013$, $m_1 = 0,000\ 0061$

Da questi risultati si rileva come l' errore nell'apprezzamento dei passaggi è affatto trascurabile rispetto a quello dovuto alle altre cause di errore. Fra queste deve senza dubbio considerarsi come la principale l' oscillazione della temperatura durante l'esperienza, e perciò le più grandi precauzioni sono da questo lato necessarie, mentre fin qui a mantener la temperatura più costante che fosse possibile fu badato assai poco: in quanto a noi, abbiamo già introdotto qualche ulteriore modificazione nei nostri sistemi e nel nostro apparecchio, e durante la seconda serie di esperienze, che è in corso, la temperatura sarà mantenuta con maggior rigore e gli osservatori non avranno più bisogno di entrare neanche momentaneamente nella stanza del pendolo oscillante.

Abbiamo poi cercato di regolare il numero delle osservazioni elementari, che concorrono a formare ciascuna esperienza completa, in modo che a ciascuna di queste, e quindi all'equazione che ne risulta, potesse esser dato presso a poco lo stesso peso che alle altre analoghe.

§ XXVIII.

La determinazione dei valori di h_1, h_2 che compariscono nelle formule (9) fu fatta nel modo seguente. Consideriamo il caso del pendolo lungo, e sia δ_1 la lettura che si fa col microscopio sulla mira ad una temperatura θ_1: se questa temperatura fosse esattamente la temperatura normale dell'esperienza si avrebbe $\delta_1 = h_1$; in realtà la temperatura normale è invece θ_m, e bisogna tener conto della dilatazione del filo per la differenza $\theta_m - \theta_1$, ed anche di quella del muro, che si risolve in un'allontanamento dell'asse del microscopio dall' asse di sospensione del pendolo. Sia l_1 la lunghezza del filo (1) e siano q ed m i coefficienti di dilatazione del filo e del muro rispettivamente: la correzione che deve farsi a δ_1 per avere il valore di h_1 che si riferisce alla temperatura normale è evidentemente $l_1\ (q-m)\ (\theta_1 - \theta_m)$. Avremo dunque in generale:

$$h_1 = \delta_1 + l_1 (q - m)\ (\theta_1 - \theta_m).$$

Analogamente per il pendolo corto, sia δ_2 la lettura fatta col microscopio alla temperatura θ_2: se questa fosse la temperatura normale, e se chiamiamo, come più sopra, con D la distanza fra i microscopî, preventivamente determinata (§ XXV), si avrebbe $h_2 = \delta_2 + D$: la correzione da farsi a δ_2 per ottenere il valore che si sarebbe trovato se la temperatura fosse stata la normale è d'altronde $l_2\ (q-m)\ (\theta_2 - \theta_m)$, ove l_2 denota la lunghezza del pendolo corto: quindi porremo

$$h_2 = D + \delta_2 + l_2\ (q - m)\ (\theta_2 - \theta_m);$$

nel nostro caso si ha $m = 0{,}000010$; $q = 0{,}000016$; $l_1 = 3$, $l_2 = 2$, quindi:

$$(19) \qquad \begin{cases} h_1 = \delta_1 + 0^m{,}000018\ (\theta_1 - \theta_m) \\ h_2 = D + \delta_2 + 0{,}\ 000012\ (\theta_2 - \theta_m) \end{cases}$$

Dietro quanto è stato esposto nei paragrafi precedenti è facile comprendere il significato e il sistema di costruzione dei quadri seguenti, che contengono le osservazioni originali ed i risultati immediati delle nostre esperienze.

(1) Naturalmente si fa astrazione della diversità di dilatazione fra la palla ed il filo; è facile vedere che nelle correzioni estremamente tenui, di cui qui ci occupiamo, tale diversità è interamente trascurabile.

I.ª Esperienza — Palla oava d'ottone N. 2.

LUNGHEZZA DELLA LAMINA OSCILLANTE....... { Pendolo lungo $l_1 = 3{,}61$ cm ; » corto $l_2 = 3{,}81$ }

TEMPERATURA MEDIA: 14°,70.

DISTANZA FRA GLI ASSI DEI MICROSCOPII

Data	Microscopio inferiore	Microscopio superiore	Temperatura	Distanza	Annotazioni
1882	$\varDelta_1$	$\varDelta_2$	T	D	
or. m.	μ	μ	°	cm	
26 Nov. 3. 30	22, 8	48, 4	14, 89	100,0130.1	Prima d'incominciare le sperienze col pendolo corto.
6. 00	23, 0	47, 7	14, 89	0131.0	
23. 00	23, 5	47, 9	14, 88	0131.0	
27 id. 3. 30	22, 6	46, 7	14, 91	0131.8	
6. 30	23, 0	47, 7	15, 01	0132.3	
19. 30	23, 1	46, 0	14, 76	0131.4	
		Medie:	14, 89	100,0131.3	
or. m.	μ	μ	°	cm	
1 Dic. 23. 30	24, 3	52, 3	14, 70	100,0125.7	Dopo le sperienze coi due pendoli.
2 id. 1. 30	24, 1	48, 5	14, 65	0128.7	
3. 00	24, 0	44, 9	14, 67	0132.4	
5. 00	23, 3	45, 8	14, 65	0130.6	
		Medie:	14, 67	100,0129.4	

$D_{14°,70} = 100,0129.5$ (cm μ)

PENDOLO CORTO (*a*).

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell' aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio......	752,68	14°,69	14°,67	14°,68	f = 9mm,03
alla fine.........	753,87	14, 69	14, 67	14, 68	
Media:	753,27		Media:	14°,68	

Mira del pendolo	al principio...	$\delta_2 = 41{,}2$ μ
	alla fine	39,3
	Media	$\delta_2 = 40{,}3$ μ
Termometro metallico	al principio ..	124,5 p
	alla fine	124,6
	Differenza..	= 0,1 p
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— 1s,32

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio	*Elongazione*
	or m s	
I	13.12.51,19	mm. 23,9
II	14.38,51	23,6
III	16.31,49	23,2
	or m s	
IV	17.02.30,45	mm. 3,90
V	05.36,86	3,85
VI	08.46,11	3,80

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	3.49.39,26	39,286	— 0,026	9756	1,412 388.2	1,412 383.8
V-II	3.50.58,35	58,376	— 0,026	9812	88.1	383.8
VI-III	3.52.14,62	14,646	— 0,026	9866	88.1	383.8
					Media:	1,412 383.8

PENDOLO CORTO (*b*).

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	753,87	14°,69	14°,67	14°,68	f = 9mm,03
alla fine	755,37	14, 75	14, 89	14, 82	
Media:	754,62		Media:	14°,75	

Mira del pendolo	al principio	μ 39,30
	alla fine	35,20
	Media	μ 37,25
Termometro metallico	al principio	p 124,6
	alla fine	131,5
	Differenza	p 6,9
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— 1s,32

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio (or m s)	*Elongazione*
I	19.23.14,94	mm. 24,15
II	25.07,91	23,75
III	26.55,24	23,35
IV	23.05.08,10	mm. 4,20
V	06,55,51	4,15
VI	08.40,02	4,10

	Intervalli osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	3.41.53,16	53,199	— 0,039	9426	1,412 387.1	1,412 382.3
V-II	3.41.47,60	47,549	+ 51	9422	96.6	91.9
VI-III	3.41.44,78	44,723	+ 57	9420	97.1	92.6
					Media:	1,412 388.9

PENDOLO CORTO (*c*)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principo	755,37	14°,75	14°,89	14°,82	f = 9mm,03
alla fine	755,62	14, 74	14, 89	14, 82	
Media:	755,50		Media:	14°,82	

Mira del pendolo	al principio	μ 35,20
	alla fine	32,16
	Media	μ 33,68
Termometro metallico	al principio	p 131,5
	alla fine	130,8
	Differenza	p 0,7
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— 1s,32

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio (or m s)	*Elongazione*
I	0.00.30,10	mm. 25,45
II	03.22,41	24,95
III	05.29,52	24,55
IV	3.35.59,15	mm. 5,00
V	38.59,93	4,95
VI	40.55,73	4,90

	Intervalli osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	3.35.29,05	29,039	+ 0,011	9154	1,412 392.8	1,412 387.1
V-II	3.35.37,52	37,512	+ 8	9160	92.6	87.1
VI-III	3.35.26,21	26,208	+ 2	9152	91.7	86.4
					Media:	1,412 386.9

PENDOLO LUNGO (*a*)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla	*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio 747,33	14°,50	14,°67	14°,58	f = 9mm,19
alla fine 745,53	14, 59	14, 76	14, 68	
Media: 746,43		Media:	14°,63	

		PASSAGGI PER LA VERTICALE	Tempo dell'orologio (or m s)	Elongazione
Mira del pendolo al principio	μ 27,27			
alla fine	26,65			
Media.	μ 26,96	I	0.45.40,07	mm. 17,45
		II	48.50,82	16,95
Termometro metallico al principio	p 129,6	III	51.26,86	16,50
alla fine	132,7			
Differenza. . .	p 3,1	IV	3.48.25,76	mm. 3,20
		V	51.29,55	3,00
Avanzo diurno dell'orol. (temp. sid.)	— 1s,32	VI	54.22,91	2,90

	Intervalli osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	3.02.45,69	45,721	— 0,031	6324	1,733 979.8	1,733 977.1
V-II	3.02.38,73	38,783	— 53	6320	76.7	74.2
VI-III	3.02.56,05	56,120	— 70	6330	73.8	71.5
					Media:	1,733 974.3

PENDOLO LUNGO (*b*)

Pressione al 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla	*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio 744,25	14°,52	44°,76	14°,64	f = 9,mm19
alla fine 744,75	14,59	14, 76	14, 68	
Media: 744,50		Media:	14°,66	

		PASSAGGI PER LA VERTICALE	Tempo dell'orologio (or m s)	Elongazione
Mira del pendolo al principio	μ 28,46			
alla fine	30,80			
Media. . . .	μ 29,63	I	19.57.22,74	mm. 21,95
		II	20.01.25,47	21,05
Termometro metallico al princio	p 118,8	III	. . . .	. . . . . .
alla fine.	124,3			
Differenza . . .	p 5,5	IV	23.31.14,24	mm. 3,40
		V	33.22,55	3,30
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)	— 1s,32	VI	35.23,94	3,20

	Intervalli osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	3.33.51,50	51,493	+ 0,007	7400	1,733 986.9	1,733 983.2
V-II	3.31.57,08	57,048	+ 32	7334	89.8	86.3
VI-I	3.38.01,20	01,190	+ 10	7544	87.0	83.3
					Media:	1,733 984.3

PENDOLO LUNGO (*c*).

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio.	744,75	14°,59	14,°76	14,°68	f = 9mm,19
alla fine.	746,85	14, 62	14, 76	14, 69	
Media:	745,80		Media:	14°,68	

		μ	PASSAGGI PER LA VERTICALE	*Tempo dell'orologio*	*Elongazione*
Mira del pendolo	al principio . . .	30,80		or m s	
	alla fine.	33,15	I	0.02.55,91	mm. 21,70
	Media	31,97	II	05.04,22	21,05
		p	III	07.19,45	20,40
Termometro metallico	al principio . . .	118,8			
	alla fine	124,3		or m s	
	Differenza . .	5,5	IV	4.02.06,40	mm. 2,80
			V	04.07,80	2,70
Avanzo diurno dell'orol. (temp. sid.) = —1s,32			VI	06.19,56	2,60

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo di orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	3.59.10,49	10,463	+ 0,027	8276	1.733 988.4	1,733 985.0
V-II	3.59.03,58	03,523	+ 57	8272	91.9	88.8
VI-III	3.59.00,11	00,054	+ 56	8270	91.7	88.7
					Media:	1,733 987.5

RIASSUNTO

	Pressione atmosferica	*Tensione del vapore acqueo*	*Temperatura dell'aria*	*Mira del pendolo*	*Durata per archi infinitesimi in tempo dell'orologio*
			PENDOLO LUNGO		
	mm	mm		μ	
(*a*)	746,43	9,19	14°,63	27,0	1s,733 974.3
(*b*)	744,50	9,19	14, 66	29,6	84.3
(*c*)	745,80	9,19	14, 68	32,0	87.5
Medie:	745,58	9,19	14°,66	29,5	1s,733 982.0

Alla temperatura media di 14°,70 $\delta_1 = 28{,}8$ μ . . . . $t'_1 = 1^s{,}733\,982.6$

Durata di un'oscillazione in tempo medio $t_1 = 1^s{,}729\,221.6$

	Pressione atmosferica	*Tensione del vapore acqueo*	*Temperatura dell'aria*	*Mira del pendolo*	*Durata per archi infinitesimi in tempo dell'orologio*
			PENDOLO CORTO		
	mm	mm		μ	
(*a*)	753,27	9,03	14°,68	40,3	1s,412 383.8
(*b*)	754,62	9,03	14, 75	37,3	88.9
(*c*)	755,50	9,03	14, 82	33,7	86.9
Medie:	754,46	9,03	14°,75	$\delta_2 = 37{,}1$	1s,412 386.5

Alla temperatura media di 14°,70 $\delta_2 = 37{,}7$ μ . . . . . $t'_2 = 1^s{,}412\,385.9$

Al livello del pendolo lungo . . . . $1^s{,}412\,385.8$

Durata di un'oscillazione in tempo medio $t_2 = 1^s{,}408\,507.6$

II.ª Esperienza — Palla cava d'ottone N. 1.

LUNGHEZZA DELLA LAMINA OSCILLANTE .... { Pendolo lungo $l_1 = 3{,}98$; » corto $l_2 = 4{,}06$ }

TEMPERATURA MEDIA; 14°,67.

DISTANZA FRA GLI ASSI DEI MICROSCOPII

Data	Microscopio inferiore	Microscopio superiore	Temperatura	Distanza	Annotazioni
1882	Δ_1	Δ_2	T	D	
or m	μ	μ	o	cm	
1 Dic. 23. 30	24, 3	52, 3	14, 70	100,0125.7	Prima delle sperienze col pendolo lungo.
2 id. 1. 30	24, 1	48, 5	14, 65	0128.7	
3. 00	24, 0	44, 9	14, 67	0132.4	
5. 00	23, 3	45, 8	14, 65	0130.6	
		Medie:	14, 67	100,0129.4	
or m	μ	μ	o	cm μ	
3 id. 21. 00	30, 4	55, 0	14, 39	100,0125.8	Nell' intervallo tra le sperienze coi due pendoli.
23. 15	29, 7	54, 2	14, 49	0127.0	
4 id. 2. 30	28, 0	52, 1	14, 59	0128.4	
		Medie;	14,49	100,0127.1	
or m	μ	μ	o	cm μ	
5 id. 11. 15	30, 6	49, 5	14, 81	100,0135.9	Dopo le sperienze col pendolo corto.
12. 30	31, 6	48, 9	14, 73	0136.6	
20. 00	29, 4	47, 2	14, 50	0133.7	
22. 00	28, 7	48, 2	14, 50	0132.1	
6 id. 0. 15	28, 5	48, 5	14, 63	0132.9	
2. 00	29, 2	47, 8	14, 69	0134.9	
4. 15	30, 6	46, 1	14, 75	0136.7	
		Medie:	14, 66	100,0134.7	

$D_{14°,67} = 100{,}0131.0$ cm

PENDOLO LUNGO (a)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla	*Temperatura dell' aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio 752,44	14°,79	14°,90	14,°85	f = 9mm,17
alla fine 753,78	14, 73	14, 86	14, 79	
Media: 753,11		Media:	14°,82	

Mira del pendolo { al principio .... 34,80 μ ; alla fine .... 35,57 }

Media .... 35,18 μ

Termometro metallico { al principio .... 122,9 p ; alla fine .... 125,0 }

Differenza ... 2,1 p

Avanzo diurno dell' orol. (*temp. sid.*) —1ˢ,32.

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio	*Elongazione*
	or m s	
I	3.38.41,40	mm. 21,40
II	40.08,09	20,45
III	41.48,67	19,50
	or m s	
IV	4.49.47,58	mm. 3,65
V	51.24,70	3,50
VI	53.05,30	3,30

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un' oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	1.11.06,18	06,198	— 0,018	2460	1,734 219.4	1,734 215.6
V-II	1.11.16,61	16,603	+ 07	2466	29.3	25.8
VI-III	1.11.16,63	16,602	+ 28	2466	37.4	34.2
					Media:	1,734 225.2

PENDOLO LUNGO (b)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell' aria*			*Tensione del vapore acqueo*
		inferiore	superiore	media	
al principio	757,43	14°,57	14°,64	14°,60	f = 9mm,17
alla fine	756,78	14, 51	14, 62	14, 57	
Media:	757,10		Media:	14°,58	

		μ
Mira del pendolo	al principio	35,57
	alla fine	35,41
	Media	35,49
Termometro metallico	al principio	125,0 p
	alla fine	125,9
	Differenza	0,9 p
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— 1s,32

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio (or m s)	*Elongazione*
I	17.58.45,09	mm. 22,35
II	18.00.53,39	21,00
III	03.01,73	19,70
IV	19.18.48,88	mm. 3,00
V	22.10,05	2,80
VI	25.00,01	2,60

Intervalli	osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	1.20.03,79	03,808	— 0,018	2770	1,734 220.0	1,734 216.3
V-II	1.21.16,66	16,644	+ 16	2812	231.8	228.5
VI-III	1.21.58,28	58,264	+ 16	2836	231.4	228.6
					Media:	1,734 224.5

PENDOLO LUNGO (c).

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria*			*Tensione del vapore acqueo*
		inferiore	superiore	media	
al principio	757,08	14°,51	14°,62	14,57	f = 9mm,17
alla fine	757,23	14, 49	14, 52	14.50	
Media:	757,15		Media:	14,53	

		μ
Mira del pendolo	al principio	35,41
	alla fine	42,40
	Media	38,90
Termometro metallico	al principio	125,9 p
	alla fine	125,8
	Differenza	0,1 p
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— 1s,32

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio (or m s)	*Elongazione*
I	19.48.51,36	mm. 19.75
II	52.43,73	18,20
III	55.16,34	16,60
IV	20.54.28,05	mm. 3,85
V	56.29,45	3,70
VI	58.37,77	3,50

Intervalli	osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	1.05.36,69	36,695	— 0,005	2270	1.734 224.4	1,734 220.9
V-II	1.03.45,72	45,738	— 18	2206	233.9	30.8
VI-III	1.03.21,43	21,422	+ 08	2192	229.3	26.7
					Media:	1,734 226.1

PENDOLO LUNGO (*d*).

Pressione al 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria*			*Tensione del vapore acqueo*
		inferiore	superiore	media	
al principio	757,43	14°,45	14,°54	14,°50	f = 9mm,17
alla fine	757,53	14, 49	14, 54	14, 52	
Media:	757,48		Media:	14°,51	

			PASSAGGI PER LA VERTICALE		
				Tempo dell'orologio	*Elongazione*
Mira del pendolo	al principio	μ 42,66		or m s	
	alla fine	44,54	I	23.42.47,59	mm. 20,70
	Media.	μ 43,60	II	44.45,50	19,50
Termometro metallico	al principio	p 125,5	III	46.46,88	18,45
	alla fine	128,5		or m s	
	Differenza . .	p 3,0	IV	24.48.41,59	mm. 3,70
			V	51.21,14	3,40
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— 1s,32	VI	53.36,40	3,20

	Intervalli			*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un' oscill.ne in tempo dell' orologio*	
	osservati	calcolati	diff.		osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	1.05.54,00	54,036	— 0,036	2280	1,734 210.8	1,734 207.1
V-II	1.06.35,64	35,657	— 17	2304	218.6	215.4
VI-III	1.06.49,52	49,530	— 10	2312	221.4	218.6
					Media;	1,734 213.7

PENDOLO LUNGO (*e*).

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria*			*Tensione del vapore acqueo*
		inferiore	superiore	media	
al principio	757 03	14°,44	14°,54	14°,49	f = 9mm,17
alla fine	756,28	14, 43	14, 50	14, 47	
Media:	756,65		Media:	14°,48	

			PASSAGGI PER LA VERTICALE		
				Tempo dell'orologio	*Elongazione*
Mira del pendolo	al principio	μ 43,8		or m s	
	alla fine	48,6	I	3.51.44,98	mm. 22,20
	Media	μ 46,2	II	53.49,81	20,75
Termometro metallico	al principio	p 129,8	III	55.20,00	19,50
	alla fine	127,0		or m s	
	Differenza . .	p 2,8	IV	4.55.41,08	mm. 4,10
			V	57.45,95	3,90
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— 1s,32	VI	5.00.04,66	3,75

	Intervalli			*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio*	
	osservati	calcolati	diff.		osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	1 03.56,10	56,110	— 0,010	2212	1,734 222.4	1,734 218.1
V-II	1.03.56,14	56,118	+ 22	2212	40.5	236.7
VI-III	1.04.44,66	44,667	— 07	2240	23.3	219.9
					Media:	1,734 224.9

PENDOLO CORTO (*a*).

Pressione in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	748,86	14,°93	15°,14	15°,03	f = $9^{mm},22$
alla fine.	747,68	14, 92	15, 16	15, 04	
Media ;	748,27		Media ;	15°,03	

		μ
Mira del pendolo	al principio	59,92
	alla fine	61,22
	Media	60,57
Termometro metallico	al principio	123,0 p
	alla fine	123,5
	Differenza . .	0,5 p
Avanzo diurno dell'orol. (temp. sid.)		— $1^s,32$

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio (or m s)	*Elongazione*
I	3.52.13,31	mm. 24,50
II	53.52,22	23,60
III	55.36,76	22,75
IV	5.13.36,53	mm. 3,95
V	15.15,43	3,85
VI	17.19,79	3,70

Intervalli	osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un' oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	1.21.23,22	23,198	+ 0,022	3456	1,412 968.8	1,412 964.0
V-II	1.21.23,21	23,197	+ 13	3456	65.9	61.4
VI-III	1.21.43,03	42,977	+ 53	3470	76.9	72.7
					Media:	1,412 966.0

PENDOLO CORTO (*b*).

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	745,64	14°,59	14°,74	14, 66	f = $9^{mm},22$
alla fine	744,39	14, 61	14, 76	14, 68	
Media:	745,02		Media:	14°,67	

		μ
Mira del pendolo	al principio	79,23
	alla fine	77,52
	Media	78,38
Termometro metallico	al principio	112,8 p
	alla fine	117,5
	Differenza . .	4,7 p
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— $1^s,32$

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio (or m s)	*Elongazione*
I	15.01.02,29	mm. 24,50
II	02.35,55	23,50
III	04.39,89	22,50
IV	16.19.02,02	mm. 4,30
V	20.40,91	4,15
VI	22.19,82	4,00

Intervalli	osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio.* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	1.17.59,73	59,732	— 0,002	3312	1,412 962.0	1,412 957.0
V-II	1.18.05,36	05,382	— 22	3316	55.5	50.9
VI-III	1.17.39,93	39,948	— 18	3298	56.1	51.9
					Media:	1,412 953.3

PENDOLO CORTO (c).

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		Temperatura dell'aria			Tensione del vapore acqueo
		inferiore	superiore	media	
al principio.	744,39	14°,61	14°,76	14°,69	f = 9mm,22
alla fine.	743,34	14, 65	14, 70	14, 67	
Media:	743,86			Media: 14°,68	

			PASSAGGI PER LA VERTICALE	
			Tempo dell'orologio	Elongazione
Mira del pendolo	al principio	μ 77,52		
	alla fine	77,02		
	Media.	μ 77,27	I — or m s 17.47.20,40	mm. 22,30
			II — 49.24,72	21,30
Termometro metallico	al principio	p 117,5	III — 51.29,08	20,30
	alla fine	118,1		
	Differenza . .	p 1,6	IV — or m s 19.07.16,02	mm. 3,80
			V — 09.51,42	3,40
Avanzo diurno dell'orol. (temp. sid.)		— 1s,32	VI — 12.04,21	3,20

Intervalli	osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	N.° delle oscill.ni	Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio: osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	1.19.55,62	55,591	+ 0,029	3394	1,412 970.1	1,412 966.0
V-II	1.20.26,70	26,676	+ 24	3416	68.2	64.6
VI-III	1.20.35,13	35,152	— 22	3422	54.4	51.2
					Media:	1,412 960.6

PENDOLO CORTO (d)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		Temperatura dell'aria			Tensione del vapore acqueo
		inferiore	superiore	media	
al principo	743,34	14°,65	14°,70	14°,67	f = 9mm,22
alla fine.	743,42	14, 65	14, 77	14, 71	
Media;	743,38			Media: 14°,69	

			PASSAGGI PER LA VERTICALE	
			Tempo dell'orologio	Elongazione
Mira del pendolo	al principio	μ 77,02		
	alla fine	77,00		
	Media	μ 77,01	I — or m s 19.35.03,99	mm. 21,50
			II — 36.59,88	20,50
Termometro metallico	al principio.	p 118,1	III — 38.52,87	19,45
	alla fine	118,6		
	Differenza . .	p 0,5	IV — or m s 20.56.15,87	mm. 3,40
			V — 21.00.24,51	3,20
Avanzo diurno dell'orol. (temp. sid.)		— 1s,32	VI — 02.43,01	3,00

Intervalli	osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	N.° delle oscill.ni	Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio: osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	1.21.11,88	11,891	— 0,011	3448	1,412 958.2	1,412 954.4
V-II	1.23.24,63	24,708	— 78	3542	38.9	35.6
VI-III	1.23.50,14	50,139	— 1	3560	60.6	57.7
					Media:	1,412 949.2

PENDOLO CORTO (*e*).

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio.	743,42	14°,65	14,°77	14,°71	f = 9mm,22
alla fine.	743,49	14, 65	14, 84	14, 75	
Media:	743,46			Media: 14°,73	

Mira del pendolo	al principio . . .	μ 77,00
	alla fine	76,22
	Media	μ 76,61
Termometro metallico	al principio . . .	p 118,6
	alla fine	119,1
	Differenza . .	p 0,5

Avanzo diurno dell'orol. (temp. sid.) = —1s,32

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio	*Elongazione*
	or m s	
I	22.05.21,78	mm. 23,85
II	06.57,85	22,80
III	08.48,05	21,75
	or m s	
IV	23.26.05,41	mm. 3,80
V	28.12,57	3,65
VI	29.28,87	3,50

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo di orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	1.20.43,63	43,634	— 0,004	3428	1,412 960.9	1,412 955.4
V-II	1.21.14,72	14,718	+ 2	3450	62.3	58.1
VI-III	1.30.40,82	40,807	+ 13	3426	65.3	61.5
					Media:	1,412 958.3

RIASSUNTO

	Pressione atmosferica	*Tensione del vapore acqueo*	*Temperatura dell' aria*	*Mira del pendolo*	*Durata per archi infinitesimi in tempo dell'orologio*
			PENDOLO LUNGO		
	mm	mm		μ	
(*a*)	753,11	9,17	14°,82	35,2	1s,734 225.2
(*b*)	757,10		14, 58	35,5	24.5
(*c*)	757,15		14, 53	38,9	26.1
(*d*)	757,48		14, 51	43,6	13.7
(*e*)	756,65		14, 48	46,2	24.9
Medie:	756,30	9,17	14°, 58	39,9	1s,734 222.9

Alla temperatura media di 14°,67 δ_1 = 38,3 μ . . . . t'_1 = 1s,734 224.2

Durata di un'oscillazione in tempo medio t_1 = 1s,729 462.4

			PENDOLO CORTO		
	mm	mm		μ	
(*a*)	748,27	9,22	15°,03	60,6?	1s,412 966.0
(*b*)	745,02		14, 67	78,4	53.3
(*c*)	743,86		14, 68	77,3	60.6
(*d*)	743,38		14, 69	77,0	49.2
(*e*)	743,46		14, 73	76,6	58.3
Medie:	744,80	9,22	14°,76	δ_2 = 74,0	1s,412 957.5

Alla temperatura media di 14°,67 δ_2 = 75,1 μ . . . . . t'_2 = 1s,412 956.5

(e trascurando la 1a. . . . . » = 77,6

Al livello del pendolo lungo 1s,412 956.4

Durata di un'oscillazione in tempo medio t_2 = 1s,409 076.8

III.ª Esperienza — Palla piena d'ottone N. 2.

LUNGHEZZA DELLA LAMINA OSCILLANTE .... { Pendolo lungo $l_1 = 3{,}475$ cm; » corto $l_2 = 3{,}800$

TEMPERATURA MEDIA; 14°,84.

DISTANZA FRA GLI ASSI DEI MICROSCOPII

Data	Microscopio inferiore	Microscopio superiore	Temperatura	Distanza	Annotazioni
1882	Δ_1	Δ_2	T	D	
or m	μ	μ	o	cm	
5 Dic. 11. 15	30, 6	49, 5	14, 81	100,0135.9	Prima delle sperienze col pendolo corto.
12. 30	31, 6	48, 9	14, 73	0136.6	
20. 00	29, 4	47, 2	14, 50	0133.7	
22. 00	28, 7	48, 2	14, 50	0132.1	
id. 00. 30	28, 5	48, 5	14, 63	0132.9	
02. 00	29, 2	47, 8	14, 69	0134.9	
04. 15	30, 6	46, 1	14, 75	0136.7	
		Medie:	14, 66	100,0134.7	
or m	μ	μ	o	cm μ	
8 id. 12. 15	35, 0	46, 8	14, 75	100,0142.4	Dopo le sperienze col pendolo lungo.
20. 00	32, 5	46, 7	14, 80	0140.3	
22. 30	32, 2	45, 3	14, 68	0140.3	
9 id. 00. 15	31, 6	42, 7	14, 72	0142.8	
03. 00	31, 3	44, 4	14, 75	0141.1	
		Medie;	14, 74	100,0141.4	

$D_{14°,84} = 100{,}0139.4$ cm

PENDOLO CORTO (a)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell' aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	747,23	14°,80	15°,00	14,°90	f = 9mm,15
alla fine	745,03	14, 72	14, 96	14, 84	
Media:	746,13			Media: 14°,87	

Mira del pendolo	al principio	52,1 μ
	alla fine	48,8
	Media. . .	50,4 μ
Termometro metallico	al principio	76,4 p
	alla fine	84,5
	Differenza . .	8,1 p
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		—1s,23

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio	*Elongazione*
	or m s	
I	5.19.08,97	mm. 24,90
II	20.59,07	24,70
III	23.17,47	24,50
	or m s	
IV	12.41.32,24	mm. 3,65
V	43.50,62	3,60
VI	48.16,10	3,55

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un' oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	7.22.23,27	23,275	— 0,005	18796	1,412 176.7	1,412 172.0
V-II	7.22.51,55	51,520	+ 30	18816	78.4	73.8
VI-III	7.24.58,63	58,616	+ 14	18906	77.4	72.9
					Media:	1,412 172.9

PENDOLO CORTO (*b*).

Pressione in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	745,03	14°,72	14°,96	14°,84	f = 9mm,15
alla fine.......	746,31	14, 78	15, 02	14, 90	
Media:	745,67		Media:	14°,87	

		μ
Mira del pendolo	al principio	48,8
	alla fine	55,9
	Media	52,4
Termometro metallico	al principio	77,0 p
	alla fine	78,0
	Differenza ...	1,0 p
Avanzo diurno dell'orol. (temp. sid.)		— 1s,23

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio (or m s)	*Elongazione*
I	16.32.44,94	mm. 23,90
II	34.43,56	23,70
III	57.04,76	23,40
IV	23.03.49,63	mm. 4,00
V	05.59,64	4,00
VI	08.03,83	3,95

	Intervalli osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un' oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	6.31.04,69	04,730	— 0,040	16616	1,412 174.4	1,412 169.8
V-II	6.31.16,08	16,025	+ 55	16624	78.0	73.4
VI-III	6.30.59,07	59,078	— 08	16612	76.2	71.7
					Media:	1,412 171.6

PENDOLO LUNGO (*a*).

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	748,23	14°,80	15°,03	14, 92	f = 9mm,10
alla fine	750,33	14, 77	14, 85	14, 81	
Media:	749,28		Media:	14°,86	

		μ
Mira del pendolo	al principio	40,4
	alla fine	34,5
	Media	37,4
Termometro metallico	al principio	78,0 p
	alla fine	82,0
	Differenza ...	4,0 p
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— 1s,23

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio (or m s)	*Elongazione*
I	6.21.05,89	mm. 21,4
II	23.00,38	21,2
III	25.01,71	21,0
IV	12.58.33,52	mm. 3,15
V	13.01.26,88	3,07
VI	04.23,76	3,04

	Intervalli osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio.* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	6.37.27,63	27,619	+ 0,011	13754	1,733 869.1	1,733 865.6
V-II	6.38.26,50	26,574	— 74	13788	62.8	59.4
VI-III	6.39.22,05	22,053	— 03	13820	68.0	64.6
					Media:	1,733 863.2

PENDOLO LUNGO (*b*).

Pressione al 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	751,43	14°,72	14,°80	14,°76	$f = 9^{mm},10$
alla fine	753,68	14, 78	14, 86	14, 82	
Media;	752,56		Media:	14°,79	

		μ
Mira del pendolo	al principio	32,2
	alla fine	35,3
	Media	37,2
Termometro metallico	al principio	p 76,5
	alla fine	79,1
	Differenza	p 2,6
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— 1^s,23

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio	*Elongazione*
	or m s	
I	17.03.25,80	mm. 22,90
II	05.41,03	22,65
III	08.10,11	22,35
	or m s	
IV	22.40.08.84	mm. 4,30
V	42.58,76	4,15
VI	45.41,75	4,10

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un' oscill.ne in tempo dell' orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	5.36.43,04	43,044	— 0,004	11652	1,733 869.0	1,733 864.4
V-II	5.37.17,73	17,721	+ 9	11672	69.9	65.4
VI-III	5.37.31,64	31,587	+ 53	11680	73.6	69.3
					Media;	1,733 866.4

RIASSUNTO

	Pressione atmosferica	*Tensione del vapore acqueo*	*Temperatura dell' aria*	*Mira del pendolo*	*Durata per archi infinitesimi in tempo dell'orologio*
			PENDOLO LUNGO		
	mm	mm		μ	
(*a*)	749,28	9,10	14°,86	37,4	1^s,733 863.2
(*b*)	752,56		14, 79	37,2	66.4
Medie:	750,92	9,10	14°,82	37,3	1^s,733 864.8

Alla temperatura media di 14°,84 $\delta_1 = 36{,}9$ μ . . . . . $t'_1 = 1^s{,}733\,865.1$

Durata di un'oscillazione in tempo medio $t_1 = 1^s{,}729\,106.3$

			PENDOLO CORTO		
	mm	mm		μ	
(*a*)	746,13	9,15	14°,87	50,4	1^s,412 172.9
(*b*)	745,67		14, 87	52,4	71.6
Medie:	745,90	9,15	14°,87	51,4	1^s,412 172.2

Alla temperatura media di 14°,84 $\delta_2 = 51{,}8$ μ . . . . . $t'_1 = 1^s{,}412\,172.9$

Al livello del pendolo lungo . . . . 1^s,412 171.8

Durata di un'oscillazione in tempo medio $t_2 = 1^s{,}408\,296.0$

IV.ª Esperienza — Palla di piombo-antimonio.

LUNGHEZZA DELLA LAMINA OSCILLANTE....... { Pendolo lungo l_1 = 3,24 cm; » corto l_2 = 3,64 }

TEMPERATURA MEDIA: 14°,85.

DISTANZA FRA GLI ASSI DEI MICROSCOPII

Data	Microscopio inferiore	Microscopio superiore	Temperatura	Distanza	Annotazioni
1882	Δ_1	Δ_2	T	D	
or m	μ	μ	°	cm	
11 Dic. 22. 00	15, 7	28, 4	14, 74	100,0141.5	Prima delle sperienze col pendolo lungo.
23. 15	15, 9	28, 2	14, 77	0142.1	
12 id. 0. 15	15, 9	28, 3	14, 78	0142.2	
3. 00	16, 4	26, 6	14, 77	0144.2	
4. 30	15, 6	25, 9	14, 80	0144.4	
		Media:	14, 77	100,0142.9	
or m	μ	μ	°	cm μ	
14 id. 2. 30	23, 9	35, 6	14, 79	100,0142.9	Nell'intervall. tra le sperienze coi due pend.
5. 00	23, 9	33, 9	14, 80	0144.7	
		Media:	14, 79	100,0143.8	
or m	μ	μ	°	cm	
15 id. 12. 00	24, 1	34, 6	14, 77	100,0143.9	Dopo le sperienze col pendolo corto.
21. 30	21, 1	31, 5	14, 72	0143.4	
16 id. 22. 30	20, 6	31, 2	14, 73	0143.5	
		Media:	14, 74	100,0143.6	

$$D_{14°,85} = 100,0144.2 \text{ (cm, μ)}$$

PENDOLO LUNGO (a).

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell' aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio......	757,66	14°,78	14°,95	14°,87	f = 9mm,63
alla fine.........	757,76	14, 80	14, 94	14, 87	
Media:	757,71		Media:	14°,87	

Mira del pendolo	al principio...	δ_2 = 11,7 μ
	alla fine	—
	Media	δ_2 = 11,7 μ
Termometro metallico	al principio ..	124,5 p
	alla fine	126,7
	Differenza..	= 2,2 p
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— 1s,14

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio	*Elongazione*
	or m s	
I	6.24.10,70	mm. 20,3
II	26.19,00	20,1
III	28.20,36	19,9
	or m s	
IV	13.25.14,46	mm. 3,90
V	28.56,38	3,85
VI	32.14,09	3,80

Intervalli	osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	7.01.03,76	03,764	— 0,004	14570	1,733 957.2	1,733 953.5
V-II	7.02.37,38	37,394	— 14	14624	56.5	52.9
VI-III	7.03.53,73	53,676	+ 54	14668	60.4	56.9
					Media:	1,733 954.4

PENDOLO LUNGO (b)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell' aria*			*Tensione del vapore acqueo*
		inferiore	superiore	media	
al principio	757,92	14°,80	14°,93	14°,86	f = 9mm,63
alla fine	757,25	14, 76	14, 85	14, 80	
Media :	757,58		Media :	14°,83	

			PASSAGGI PER LA VERTICALE	
	μ		*Tempo dell'orologio*	*Elongazione*
Mira del pendolo — al principio	12,6			
alla fine	12,6		or m s	
Media.	μ 12,6	I	17.27.33,43	mm. 24,20
		II	29.55,65	23,80
Termometro metallico — al principio	p 131,3	III	32.28,21	23,45
alla fine	126,5		or m s	
		IV	24.51.33,98	mm. 4,00
Differenza . .	p 4,8	V	53.45,75	3,95
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)	— 1s,14	VI	56.01,01	3,90

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	7.24.00,55	00,537	+ 0,013	15364	1,733 959.2	1,733 954.3
V-II	7.23.50,10	50,131	— 31	15358	56.3	51.5
VI-III	7.23.32,80	32,806	— 6	15348	58.7	54.1
					Media:	1,733 953.3

PENDOLO CORTO (a).

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria*			*Tensione del vapore acqueo*
		inferiore	superiore	media	
al principio	757,21	14°,76	14°,95	14,86	f = 9mm,63
alla fine	755,85	14, 70	14, 93	14.82	
Media :	756,53		Media :	14,84	

			PASSAGGI PER LA VERTICALE	
	μ		*Tempo dell'orologio*	*Elongazione*
Mira del pendolo — al principio	23,42			
alla fine	22,52		or m s	
Media.	μ 22,97	I	4.34.44,98	mm. 22,80
		II	36.29,48	22,60
Termometro metallico — al principio	p 127,0	III	38.16,80	22,40
alla fine	125,5		or m s	
		IV	12.36.39,93	mm. 4,20
Differenza . .	p 1,5	V	39.26,57	4,15
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)	— 1s,14	VI	41.47,79	4,10

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	8.01.54,95	54,933	+ 0,017	20474	1,412 276.4	1,412 272.0
V-II	8.02.57,09	57,073	+ 17	20518	76.4	72.1
VI-III	8.03.30,99	30,967	+ 23	20542	76.7	72.4
					Media:	1,412 272.2

PENDOLO CORTO (*b*)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	755,90	14°,75	15,°03	14°,89	f = 9mm,63
alla fine	755,75	14, 74	14, 98	14, 86	
Media:	755,83			Media: 14°,87	

			PASSAGGI PER LA VERTICALE — *Tempo dell'orologio*	*Elongazione*
Mira del pendolo al principio	μ 19,3		or m s	
alla fine	23,1			
Media.	μ 21,2	I	17.42.18,30	mm. 24,22
		II	44.08,42	24,02
Termometro metallico al principio	p 115,0	III	46.12,72	23,90
alla fine	127,0		or m s	
Differenza. . .	p 12,0	IV	25.18.47,94	mm. 4,70
		V	20.46,56	4,62
Avanzo diurno dell'orol. (temp. sid.)	— 1s,14	VI	22.59,34	4,57

	Intervalli osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	7.36.29,64	29,689	— 0,049	19394	1,412 273.7	1,412 268.6
V-II	7.36.38,14	38,156	— 16	19400	75.3	70.3
VI-III	7.36.46,62	44,628	— 8	19406	75.6	70.7
					Media:	1,412 269.9

RIASSUNTO

	Pressione atmosferica	*Tensione del vapore acqueo*	*Temperatura dell'aria*	*Mira del pendolo*	*Durata per archi infinitesimi in tempo dell'orologio*
	PENDOLO LUNGO				
	mm	mm		μ	
(*a*)	757,71	9,63	14°,87	11,7	1s,733 954.4
(*b*)	757,58		14, 83	12,6	53.3
Medie:	757,65	9,63	14°,85	12,2	1s,733 953.8

Alla temperatura media di 14°,85 $\delta_1 = \overset{\mu}{12,2}$ . . . . . $t'_1 = 1^s,733\,953.8$

Durata di un'oscillazione in tempo medio $t_1 = 1^s,729\,196.5$

	PENDOLO CORTO				
	mm	mm		μ	
(*a*)	756,53	9,63	14°,84	22,97	1s,412 272.2
(*b*)	755,83		14, 87	21,20	69.9
Medie:	756,18	9,63	14°,85	22,1	1s,412 271.05

Alla temperatura media di 14°,85 $\delta_1 = \overset{\mu}{22,1}$ . . . . . $t'_1 = 1^s,412\,271.05$

A livello del pendolo lungo . . . . $1^s,412\,270.14$

Durata di un'oscillazione in tempo medio $t_2 = 1^s,408\,396.3$

V.ª Esperienza — Palla d' alluminio

LUNGHEZZA DELLA LAMINA OSCILLANTE .... { Pendolo lungo $l_1 = 3{,}80$ cm; » corto $l_2 = 3{,}96$

TEMPERATURA MEDIA; 14°,90.

DISTANZA FRA GLI ASSI DEI MICROSCOPII

Data	Microscopio inferiore	Microscopio superiore	Temperatura	Distanza	Annotazioni
1882	Δ_1	Δ_2	T	D	
or m	μ	μ	o	cm	
15 Dic. 12. 00	24, 1	34, 6	14, 77	100,0143.9	Prima delle sperienze col pendolo corto.
21. 30	21, 1	31, 5	14, 72	0143.4	
22. 30	20, 6	31, 2	14, 73	0143.5	
		Medie:	14, 74	100,0143.6	
or m	μ	μ	o	cm μ	
19 id. 5. 30	23, 8	31, 6	14, 86	100,0147.6	Dopo le sperienze col pendolo lungo.
11. 30	11, 1	28, 8	14, 89	0148.0	
23. 15	19, 4	28, 0	14, 84	0146.5	
		Medie:	14, 86	100,0147.4	

$$D_{14^\circ,90} = 100{,}0146.5 \text{ cm}$$

PENDOLO CORTO (*a*)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell' aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	754,78	14°,78	15°,00	14°,89	f = 9mm,35
alla fine	...	...	...	...	
Media:	754,78		Media:	14°,89	

Mira del pendolo	al principio	17,83 μ
	alla fine	...
	Media. . .	17,83 μ
Termometro metallico	al principio	123,5 p
	alla fine	...
	Differenza . .	...
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		—1s,06

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio (or m s)	*Elongazione*
I	0.36.58,17	mm. 22,55
II	38.39,85	21,90
III	40.24,40	21,35
IV	2.39.03,80	mm. 4,22
V	40.45,52	4,17
VI	42.24,40	4,10

Intervalli	osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un' oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	2.02.05,63	05,660	— 0,030	5186	1,412 578.1	1,412 573.7
V-II	2.02.05,67	05,659	+ 11	5186	85.8	81.6
VI-III	2.02.00,00	00,010	— 10	5182	82.1	77.5
					Media:	1,412 577.6

PENDOLO CORTO (*b*)

Pressione in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	. . .	. . .	. . .	. . .	$f = 9^{mm},35$
alla fine.	755,27	14, 80	15, 06	14, 93	
Media :	755,27		Media :	14°,93	

			PASSAGGI PER LA VERTICALE	*Tempo dell'orologio*	*Elongazione*
Mira del pendolo	al principio	. . .		or m s	
	alla fine	16,81	I	3.11.37,91	mm. 24,30
	Media	μ 16,81	II	13.22,44	23,65
Termometro metallico	al principio	. . .	III	15.06,97	23,00
	alla fine	126,5		or m s	
			IV	5.19.11,32	mm. 4,25
	Differenza . . .	. . .	V	20.50,18	4,15
Avanzo diurno dell'orol. (temp. sid.)		— $1^s,06$	VI	22.40,35	4,00

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un' oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	2.07.33,41	33,382	+ 0,028	5418	1,412 589.5	1,412 584.6
V-II	2.07.27,74	27,731	+ 9	5414	85.6	81.0
VI-III	2.07.33,38	33,380	0	5418	83.9	79.5
					Media:	1,412 581.7

PENDOLO CORTO (*c*)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	756,26	14°,85	14°,96	14°,90	$f = 9^{mm},35$
alla fine	756,60	14, 90	15, 05	14, 98	
Media:	756,43		Media :	14°,94	

			PASSAGGI PER LA VERTICALE	*Tempo dell'orologio*	*Elongazione*
Mira del pendolo	al principio	μ 16,10		or m s	
	alla fine	. . .	I	14.39.34,81	mm. 24,10
	Media	16,10	II	41.16,49	23,50
Termometro metallico	al principio	p 130,5	III	42.58,21	22,90
	alla fine	. . .		or m s	
			IV	16.50.42,92	mm. 4,00
	Differenza . . .	. . .	V	52.18,96	3,95
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— $1^s,06$	VI	54.00,67	3,90

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio.* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	2.11.08,11	08,093	+ 0,017	5570	1,412 587.1	1,412 582.4
V-II	2.11.02,47	02,446	+ 24	5566	89.0	84.5
VI-III	2.11.02,46	02,441	+ 29	5566	87.2	82.9
					Media:	1,412 583.3

PENDOLO CORTO (*d*)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio.	756,60	14°,90	15°,05	14°,98	f = 9mm,35
alla fine.	756,12	14, 83	14, 86	14, 84	
Media:	756,36		Media:	14°,91	

Mira del pendolo al principio	. . .
alla fine	17,56
Media.	μ 17,56
Termometro metallico al principio	. . .
alla fine	. . .
Differenza . .	. . .
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)	— 1s,06

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio or m s	*Elongazione*
I	17.30.00,19	mm. 24,20
II	31.39,07	23,60
III	33.17,94	23,00
IV	20.17.54,71	mm. 2,60
V	19.36,40	2,50
VI	21.18,10	2,50

Intervalli	osservati or m s	calcolati s	diff. s	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata s	per archi infinitesimi s
IV-I	2.47.54,52	54,543	— 0,023	7132	1,412 580.0	1,412 576.2
V-II	2.47.57,33	57,364	— 34	7134	77.9	74.3
VI-III	2.48.00,16	00,192	— 32	7136	78.5	75.0
					Media:	1,412 575.2

PENDOLO LUNGO (*a*)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principo	755,23	14°,81	14°,90	14°,85	f = 9mm,35
alla fine.	. . .	. . .	. . .	. . .	
Media:	755,23		Media:	14,85	

Mira del pendolo al principio	μ 37,81
alla fine	. . .
Media	μ 37,81
Termometro metallico al principio.	p 114,5
alla fine	. . .
Differenza . .	. . .
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)	— 1s,06

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio or m s	*Elongazione*
I	23.37.29,90	mm. 20,70
II	39.34,71	20,00
III	41.29,15	19,35
IV	1.45.21,42	mm. 3,20
V	47.15,87	3,10
VI	49.10,28	3,00

Intervalli	osservati or m s	calcolati s	diff. s	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata s	per archi infinitesimi s
IV-I	2.07.51,52	51,531	— 0,011	4424	1,734 069.0	1,734 065.6
V-II	2.07.41,16	41,126	+ 34	4418	78.9	75.7
VI-III	2.07.41,13	41,126	+ 4	4418	72.0	69.0
					Media:	1,734 070.1

PENDOLO LUNGO (*b*)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla	*Temperatura dell' aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio				f = 9^{mm},35
alla fine				
Media :		Media ;		

			PASSAGGI PER LA VERTICALE	
			Tempo dell'orologio	*Elongazione*
Mira del pendolo	al principio		or m s	
	alla fine			
	Media.	I	2.14.32,83	mm. 23,40
		II	16.37,69	22,50
Termometro metallico	al principio	III	18.45,99	21,45
	alla fine		or m s	
		IV	4.40.54,18	mm. 2,80
	Differenza . .	V	43.44,11	2,60
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)	— 1^s,06	VI	45.55,91	2,50

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	2.26.21,35	21,339	+ 0,011	5064	1,734 074.0	1,734 070.2
V-II	2.27.06,42	06,424	— 4	5090	70.7	67.2
VI-III	2.27.09,92	09,890	+ 30	5092	77.0	73.8
					Media :	1,734 070.4

PENDOLO LUNGO (*c*)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla		*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio	. . .				f = 9^{mm},35
alla fine	755,08	14°,80	14°,91	14,85	
Media :	755,08		Media :	14,85	

				PASSAGGI PER LA VERTICALE	
				Tempo dell'orologio	*Elongazione*
Mira del pendolo	al principio	. . .		or m s	
	alla fine	38,68			
		μ			
	Media.	38,68	I	5.12.04,45	mm. 22,25
			II	14.02,40	21,45
Termometro metallico	al principio	. . .	III	16.00,29	20,60
	alla fine	110,5		or m s	
			IV	7.09.42,12	mm. 3,85
	Differenza . .	. . .	V	17.44,17	3,25
Avanzo diurno dell' orol. (temp. sid.)		— 1^s,06	VI	20.48,04	3,10

	Intervalli osservati	calcolati	diff.	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata	per archi infinitesimi
	or m s	s	s		s	s
IV-I	1.57.37,67	37,672	— 0,002	4070	1,734 071.4	1,734 067.2
V-II	2.03.41,77	41.827	— 57	4280	58.2	54.6
VI-III	2.04.47,75	47,720	+ 30	4318	78.4	75.1
					Media :	1,734 065.6

PENDOLO LUNGO (*d*)

Pressione a 0° in millimetri normali ed al livello del centro della palla	*Temperatura dell'aria* inferiore	superiore	media	*Tensione del vapore acqueo*
al principio 756,95	14°,90	14,°97	14°,94	f = 9mm,35
alla fine 757,00	14, 84	14, 90	14, 87	
Media: 756,98			Media: 14°,90	

		μ
Mira del pendolo	al principio	29,51
	alla fine	46,35
	Media.	37,93
		p
Termometro metallico	al principio	115,5
	alla fine	114,5
	Differenza. . .	1,0
Avanzo diurno dell'orol. (temp. sid.)		— 1s,06

PASSAGGI PER LA VERTICALE

	Tempo dell'orologio (or m s)	*Elongazione*
I	16.15.52,24	mm. 23,30
II	17.50,11	22,45
III	19.48,02	21,60
IV	18.12.48,27	mm. 4,00
V	14.46,19	3,85
VI	16.47,52	3,75

	Intervalli osservati (or m s)	calcolati (s)	diff. (s)	*N.° delle oscill.ni*	*Durata di un'oscill.ne in tempo dell'orologio* osservata (s)	per archi infinitesimi (s)
IV-I	1.56.56,03	56,057	— 0,027	4046	1,734 066.0	1,734 061.4
V-II	1.56.56,08	56,056	+ 24	4046	78.0	73.8
VI-III	1.56.59,50	59,522	— 22	4048	66.4	62.5
					Media:	1,734 065.9

RIASSUNTO

	Pressione atmosferica	*Tensione del vapore acqueo*	*Temperatura dell' aria*	*Mira del pendolo*	*Durata per archi infinitesimi in tempo dell'orologio*
			PENDOLO LUNGO		
	mm	mm		μ	
(*a*)	755,23	9,35	14°,85	37,81	1s,734 070.1
(*b*)	755,15 *i*		14, 85 *i*	38.25 *i*	70.4
(*c*)	755,08		14, 85	38,68	65.6
(*d*)	756,98		14, 90	37,93	65.9
Medie:	755,61	9,35	14°, 86	38,17	1s,734 068.0

Alla temperatura media di 14°,90 $\delta_1 = 37{,}45$ μ . . . . . . $t'_1 = 1^s{,}734\ 068.6$

Durata di un'oscillazione in tempo medio $t_1 = 1^s{,}729\ 312.7$

	Pressione atmosferica	*Tensione del vapore acqueo*	*Temperatura dell' aria*	*Mira del pendolo*	*Durata per archi infinitesimi in tempo dell'orologio*
			PENDOLO CORTO		
	mm	mm		μ	
(*a*)	754,78	9,35	14°,89	17,83	1s,412 577.6
(*b*)	755,27		14, 93	16,81	81.7
(*c*)	756,43		14, 94	16,10	83.3
(*d*)	756,36		14, 91	17,56	75.2
Medie:	755,71	9,35	14°,92	$\delta_2 = 17{,}075$	1s,412 579.4

Alla temperatura media di 14°,90 $\delta_2 = 17{,}31$ μ. . . . . $t'_2 = 1^s{,}412\ 579.2$

Al livello del pendolo lungo 1s,412 579.1

Durata di un'oscillazione in tempo medio $t_2 = 1^s{,}408\ 705.0$

Riassunto delle cinque esperienze.

		I.	II.	III.	IV.	V.
		Palla cava d'ottone N° 2.	Palla cava d'ottone N° 1	Palla piena d'ottone N° 2	Palla di piombo ed antimonio	Palla di alluminio
Temperatura media	$T=$	14°,70	14°,67	14°,84	14°,85	14°,90
Distanza tra i microscopî alla temperatura media (*)	$D=$	cm μ 100,0129.5	cm μ 100,0131.9	cm μ 100,0139.4	cm μ 100,0144.2	cm μ 100,0146.5
Lunghezza della lamina oscillante (')	$l_1=$ $l_2=$	cm 3,61 3,81	cm 3,98 4,06	cm 3,47 3,80	cm 3,24 3,64	cm 3,80 3,96
Mira del pendolo alla temperatura media	$\delta_1=$ $\delta_2=$	μ 28,8 37,7	μ 38,3 75,1	μ 36,9 51,8	μ 12,2 22,1	μ 37,5 17,3
Durata di un' oscillazione per archi infinitesimi e in tempo medio	$t_1=$ $t_2=$	s 1,729 221.6 1,408 507.6	s 1,729 462.4 1,409 076.8	s 1,729 106.3 1,408 296.0	s 1,729 196.5 1,408 396.3	s 1,729 312.7 1,408 705.0
Pressione atmosferica a 0° in millim. normali ed a livello del pendolo lungo	$A_1=$ $A_2=$	mm 745,58 754,46	mm 756,30 744,80	mm 750,92 745,90	mm 757,65 756,18	mm 755,61 755,71
Tensione del vapore acqueo	$f_1=$ $f_2=$	mm 9,19 9,03	mm 9,17 9,22	mm 9,10 9,15	mm 9,63 9,63	mm 9,35 9,35

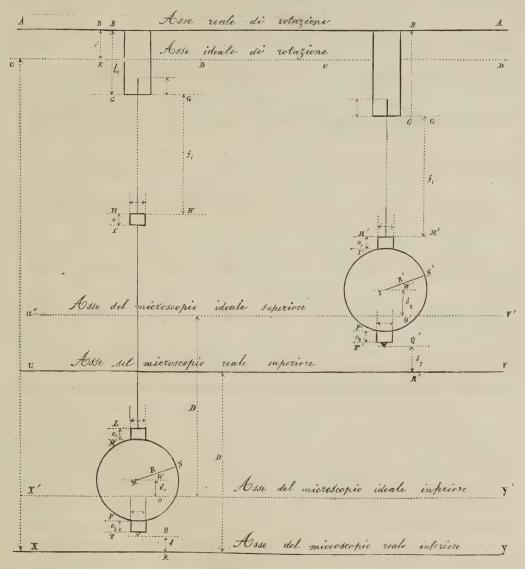
(*) Fra la 2ª esperienza e la 3ª e fra la 3ª e la 4ª fu mosso uno dei microscopî di misura.
(') L'indice 1 si riferisce al pendolo lungo, e l'indice 2 al pendolo corto.

§ XXIX.

A completare la esposizione della ricerca degli elementi necessarî alla costituzione delle equazioni fondamentali (9) e (10) rimane a vedere qual sia il sistema di dedurre le quantità necessarie al calcolo delle correzioni c (formula (7)) e dei rapporti $\frac{m'}{m}, \frac{m's'}{ms}, \frac{m'''}{m''}, \frac{m'''s'''}{m''s''}$ fra le masse ed i momenti statici dei pendoli oscillanti e le masse ed i momenti statici dei pendoli ideali che hanno la figura stessa dei primi, ma che invece si suppongono costituiti dall'aria spostata da questi. A tali pendoli ideali daremo per brevità il nome di pendoli aerei.

Riprendiamo dunque la relazione con cui deve essere calcolato per ciascuno dei pendoli oscillanti il valore della correzione c, e che è (v. § VII):

$$c = \frac{\Sigma_{r=1}^{r=n-1} m_r s_r (s_n - s_r) - \Sigma_{r=1}^{r=n} \mu_r}{\Sigma_{r=1}^{r=n} m_r s_r} - \frac{(\mathrm{L}-\mathrm{R}')\mu'^2_n}{m'^2_n \mathrm{R}' \mathrm{L}^3}$$

e specifichiamo il modo di composizione dei termini sommatorî, per indicar poi come si ottennero i valori delle diverse quantità che vi compariscono. La figura annessa rappresenta schematicamente i due pendoli composti coniugati di una esperienza completa; AB, AB rappresenta l' asse materiale di sospensione, ossia l'asse del

cilindretto di inviluppo; CD, CD il corrispondente asse ideale; UV, XY indicano le direzioni degli assi di collimazione dei due microscopî fra cui la distanza è D; U′ V′, X′ Y′ gli assi di due microscopî fittizî, che sostituiscono per comodità di sviluppo analitico, i microscopî effettivi, ed hanno gli assi paralleli agli assi di questi, e distanti perciò di D l'uno dall'altro.

Introdurremo le seguenti notazioni:

PENDOLO LUNGO

B E = i = distanza fra l'asse ideale di rotazione e quello materiale.
B G = l_1 = lunghezza della lamina oscillante, a partire dall'asse materiale del cilindretto di sospensione.
F G = d = lunghezza della saldatura fra il filo e la lamina.
G H = f_1 = lunghezza della porzione superiore del filo.
H I = o = altezza della cappa che congiunge le due porzioni di filo.
I L = f_2 = lunghezza della porzione inferiore di filo.
L M = o_1 = altezza della cappa che congiunge il filo alla palla.
M N = R = raggio della sfera oscillante.
W O = Q R = δ_1 = lettura del micrometro inferiore.
P T = o_2 = altezza del cilindretto della mira.

PENDOLO CORTO

B E = i = distanza fra l'asse ideale di rotazione e quello materiale.
B G′ = l_2 = lunghezza della lamina oscillante (diversa da l_1 per l'aggiustamento della palla in altezza).
G′ H′ = f_1 = lunghezza del filo.
H′ I′ = o_1 = altezza della cappa che congiunge il filo alla palla.
I N′ = R = raggio della sfera oscillante.
W′ O′ = Q′ R′ = δ_2 = lettura del micrometro superiore.
P′ T′ = o_2 = altezza del cilindretto della mira.

Inoltre rappresenteremo con pl_1, e pl_2 i pesi delle due lamine oscillanti e con t_1 e t_2 le due durate di oscillazione.

I valori delle masse m_1, m_2, ... m_{n-1} furono determinati coll'errore medio di milligrammi 0,05 mediante una buona bilancia docimastica. Invece le masse m_n delle palle vennero determinate coll'errore medio di milligrammi 0,1 mediante una bilancia di Bunge, in cui le letture si facevano con cannocchiale e scala, posta alla distanza di circa 3 metri: la bilancia avendo un forte errore di accomodamento (milligrammi 0,29), per ottenere l'indicato errore medio si dovettero fare dieci pesate per ciascuno dei pesi che si volevano determinare. La pesiera adoperata fu costruita da Rüprecht di Vienna, i pesi dal chilogrammo al grammo sono in bronzo fortemente dorato e le frazioni del grammo sono in platino. Prima di incominciare le pesate dei corpi costituenti i nostri pendoli furono determinate le correzioni dei singoli pezzi della pesiera.

Le pesate furono ridotte al vuoto tenendo conto dello stato dell'aria (pressione, temperatura e umidità relativa). I raggi delle palle furono determinati idrostaticamente usando la bilancia di Bunge: solamente per la palla d'alluminio, che non si credette conveniente d'immergere nell'acqua, si adottò per raggio il valore medio tra quelli delle palle di piombo-antimonio e di ottone massiccio, la palla di alluminio essendo stata tornita dopo quella di ottone piena, e prima di quella di piombo sullo stesso tornio da sfere, senza spostar mai il bulino. Nei calcoli dei momenti d'inerzia ci siamo limitati ad usare pei pesi dei valori approssimati fino ad un milligrammo.

I valori degli s da introdurre in un primo calcolo dei c non possono essere ottenuti che approssimativamente, giacchè è ignota la distanza i fra l'asse materiale e l'asse ideale di sospensione. I valori approssimati delle quantità sopra rappresentate con l_1, d_1, f_1, ecc. che concorrono alla formazione degli s possono invece essere osservati direttamente; noi però, per maggior rigore, e seguendo il sistema già adottato da Bessel, abbiamo preferito di dedurre f_1 ed f_2 analiticamente come segue.

Si è visto che pel pendolo corto si ha in generale

$$\mathrm{F} - h_2 - c_2 = \mathrm{F} - \mathrm{D} - \delta_2 - c_2 = \lambda t_2^2 \frac{1 - \frac{m''' s'''}{m'' s''}}{1 + \frac{m'''}{m''} k_2},$$

essendo al solito λ la lunghezza del pendolo semplice sessagesimale e k il noto coefficiente, variabile colla lunghezza del pendolo, dipendente dall'attrito interno del mezzo. Porremo anche qui $\lambda = \lambda_0 + x$, e, per semplificare, faremo

$$\frac{1 - \frac{m''' s'''}{m'' s''}}{1 + \frac{m'''}{m''} k_2} = 1 + \chi.$$

È chiaro che la quantità χ ha, in generale,un valore piccolissimo dell'ordine di $\frac{m'''}{m''}$, e che, in conseguenza, con più che sufficiente approssimazione si può porre

$$\mathrm{F} - \mathrm{D} - \delta_2 = \lambda_0 t_2^2 + x t_2^2 + c_2 + \chi \lambda_0 t_2^2.$$

Adottando per k, e quindi per χ, un valore prossimo a quello che ad esso ascrivono le teorie di Stokes e di Meyer e le esperienze di Maxwell, nel secondo membro della relazione precedente rimane incognita la piccola quantità

$$i' = x t_2^2 + c_2 \tag{20}$$

di cui nel calcolo dei c non si può tener conto che in parte nelle approssimazioni successive. Facciamo ancora per brevità:

$$\Lambda = \lambda_0 t_2^2 + \chi \lambda_0 t_2^2 \tag{21}$$

ed avremo:

$$\mathrm{F} - \mathrm{D} - \delta_2 = \Lambda + i'$$

Ma dalla figura annessa a pag. 89 si deduce senza difficoltà:

$$\mathrm{F} - \mathrm{D} - \delta_2 = l_2 - i + f_1 + o_1 + \mathrm{R};$$

quindi sarà:

$$f_1 = \Lambda - l_2 - o_1 - \mathrm{R} + i' + i. \tag{22}$$

Analogamente, considerando invece il pendolo lungo, si otterrebbe:

$$\mathrm{F} - \delta_1 = l_1 - i + f_1 + o + f_2 + o_1 + \mathrm{R}$$

d'onde, combinando questa colle relazioni precedenti, si trae:

$$f_2 = \mathrm{D} + \delta_2 - \delta_1 + l_2 - l_1 - o. \tag{23}$$

Se si pone infine:

$$f'_1 = \Lambda - l_2 - o_1 - \mathrm{R}$$

potremo costituire come segue i valori degli m, s, μ relativi a ciascun pendolo.

Pendolo lungo.

1° Lamina oscillante $s_1 = \frac{l_1}{2} - \frac{i}{2}$ $m_1 = p l_1$ $\mu_1 = \frac{p\,(l_1 - i)^3}{12}$

2° Saldatura $s_2 = l_1 - i - \frac{d}{2}$

3° Filo superiore $s_3 = l_1 + \frac{f'_1}{2} + \frac{i'}{2} - \frac{i}{2}$ $\mu_3 = \frac{m_3 (f'_1 + i' + i)^2}{12}$

4° Cappa di cong.ne sup.re $s_4 = l_1 + f'_1 + i' + \frac{o}{2}$

5° Filo inferiore $s_5 = l_1 + f'_1 + i' + o + \frac{f_2}{2}$ $\mu_5 = \frac{m_5}{12} f_2^2$

6° Cappa di cong.ne inf.re $s_6 = l_1 + f'_1 + i' + o + f_2 + \frac{o_1}{2}$

7° Mira $s_7 = l_1 + f'_1 + i' + o + f_2 + o_1 + 2R + \frac{o_2}{2}$

8° Palla $s_8 = l_1 + f'_1 + i + o + f_2 + o_1 + R$

Pendolo corto.

1° Lamina oscillante $s_1 = \frac{l_2}{2} - \frac{i}{2}$ $m_1 = p l_2$ $\mu_1 = \frac{p\,(l_2 - i)^3}{12}$

2° Saldatura $s_2 = l_2 - i - \frac{d}{2}$

3° Filo $s_3 = l_2 + \frac{f'_1}{2} + \frac{i'}{2} - \frac{i}{2}$ $\mu_3 = \frac{m_3 (f'_1 + i' + i)^2}{12}$

4° Cappa di cong.ne $s_4 = l_2 + f'_1 + i' + \frac{o_1}{2}$

5° Mira $s_5 = l_2 + f'_1 + i' + o_1 + 2R + \frac{o_2}{2}$

6° Palla $s_6 = l_2 + f'_1 + i' + o_1 + R$

Introducendo questi valori nella espressione di c, sviluppando rispetto ad i e ad i', indicando in generale con s' il valore prossimo di s quale si ottiene se si trascurano le piccole quantità i ed i' e facendo per semplicità:

$$
(24)\quad \begin{cases}
N = \Sigma_{r=1}^{r=n-1} m_r s'_r (s'_n - s'_r) - \Sigma_{r=1}^{r=n} \mu_r \qquad R = m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2} \\
T = \Sigma_{r=1}^{r=n} m_r s'_r \qquad S = \frac{m_3}{2} + m_4 \dots m_8 \\
P = m_1 (s'_n - s'_1) + m_2 (s'_n - s'_2) + \frac{m_3}{2} (s'_n - s'_3) - \left(m_1 s'_1 + m_2 s'_2 + \frac{m_3 s'_3}{2} - \frac{m_3 f'_1}{6} \right) \\
Q = \frac{m_3 (s'_n - s'_3)}{2} + m_4 (s'_n - s'_4) + \dots m_{n-1} (s'_n - s'_{n-1}) + m_1 s'_1 + m_2 s'_2 + \frac{m_3 s'_3}{2} \frac{m_3 f'_1}{6}
\end{cases}
$$

si ricava:

$$c = \frac{N}{T} - i\,\frac{PT - NR}{T^2} + i_1\,\frac{QT - NS}{T_2} - \frac{(L - R')\mu'^2_n}{m'^2_n R' L^3}\,. \tag{25}$$

Ricorderemo che per R′ deve assumersi la distanza fra il baricentro della palla ed il punto in cui essa è attaccata al filo, e per L la lunghezza fisica del pendolo (distanza fra il baricentro della palla e l'asse di sospensione), in modo che si avrà in generale:

per il pendolo lungo $\quad L = \Lambda + D + \delta_2 - \delta_1 + i'$

per il pendolo corto $\quad L = \Lambda + l_1 - l_2 + i'$.

In quanto a μ_n', m_n' essi rappresentano poi il momento d'inerzia e la massa della palla colle sue appendici (mira, e cappa di congiunzione). Del resto il valore del termine cui si riferiscono queste quantità è così piccolo che nel calcolarlo è affatto superfluo di tener conto dell'errore i'.

§ XXX.

I valori dei coefficenti di i ed i' nella (25) sono sempre molto piccoli, quindi, a causa della piccolezza probabile di i ed i' si potrebbe, con Bessel, porre definitivamente

$$c = \frac{N}{T} - \frac{(L - R')\,\mu'^2_n}{m'^2_n\, R'\, L^3}$$

senza perdere gran chè nella precisione dei risultati: ma se si vuole tener conto dei micron nella determinazione del pendolo a secondi, il che corrisponde all'ultimo grado di approssimazione accessibile agli attuali mezzi di misura, è necessario calcolare anzitutto un valore provvisorio della correzione x, e quindi di determinare per mezzo della relazione (20) il valore prossimo di i' per introdurre poi questo nella (25) ed ottenere così il valore definitivo di c (¹).

In quanto al valore di i, esso rimane ignoto, ma adottando un sistema di sospensione conveniente è chiaro che tale valore è assai minore di quello di i': del resto si può avere un' idea approssimativa della sua entità misurando direttamente e con diligenza f_1, e paragonando il valore osservato col risultato ottenuto per f_1 dalla (22) dopo avere introdotto in questa in luogo di i' il suo valore ricavato nel modo sopradetto. Naturalmente abbiamo voluto fare questo confronto per qualcuno dei nostri pendoli; per misurare direttamente f_1 abbiamo stabilite le punte di un compasso fedele alle estremità di un forte regolo di due metri di lunghezza; la punta fissa del compasso veniva situata nel foro già altrove ricordato che individua l'asse materiale di sospensione del pendolo, e quella mobile era condotta colla vite dei piccoli movimenti a lambire la faccia superiore della cappa di congiunzione dei due fili: il nonio annesso a queste due punte corrisponde all'apprezzamento di $0^{mm},05$. I risultati ottenuti in tal guisa ascrivevano ad i un valore minore di $0^{mm},3$, quantità che moltiplicata per il coefficiente di i nella (24) non dà che qualche centesimo di micron; possiamo dunque dare ai valori calcolati per c tutta la possibile fiducia.

(¹) I valori definitivi di c_1 e c_2 sono riportati a pag. 152.

Nel calcolo dei rapporti $\frac{m's'}{ms}$, $\frac{m'}{m}$, $\frac{m'''s'''}{m''s''}$, $\frac{m'''}{m''}$ fa duopo distinguere l'una dall'altra le diverse esperienze. Per la palla piena d'ottone, la densità dell'ottone essendo poco diversa da quella del pakfong, si può evidentemente ritenere il pendolo come omogeneo e tutto di ottone, giacchè i rapporti sopra scritti non entrano che in termini di correzione estremamente piccoli.

Se si rappresenta con β il rapporto fra la densità dell'aria e quella dell'ottone (dedotto dalle pesate che dànno la massa ed il volume della palla) avremo dunque:

$$\frac{m's'}{ms} = \frac{m'}{m} = \beta. \tag{26}$$

Per il peso ρ di un millilitro d'aria alla temperatura T, sotto la pressione A, essendo f la tensione del vapore acqueo, abbiamo usata la formula:

$$\rho = \frac{\overset{gr}{0{,}001293052}}{1 + 0{,}00367 \times T} \cdot \frac{P}{760}$$

nella quale è $P = A - 0{,}3779 \times f$.

Consideriamo ora il caso di una palla di ottone cava, e sia m_0 la massa dello strato di ottone ed m_a quella dell'aria racchiusavi: il valore di s in tal caso sarà dato da:

$$s = \frac{m_1 s_1 + m_2 s_2 + m_3 s_3 + \dots + (m_0 + m_a) s_n}{m_1 + m_2 + \dots m_0 + m_a}$$

e quello di m da:

$$m = m_1 + m_2 + \dots\dots m_0 + m_a.$$

Se ne trae:

$$ms = \Sigma m \frac{\Sigma m s}{\Sigma m} = \Sigma ms;$$

e per il pendolo aereo corrispondente:

$$m' = \beta m_1 + \beta m_2 + \beta m_3 \dots + \beta m_0 + m_a = \beta \Sigma m + m_a (1 - \beta)$$

$$s' = \frac{\beta m_1 s_1 + \beta m_2 s_2 + \dots \beta m_0 s_n + m_a s_n}{\beta \Sigma m + m_a (1 - \beta)} = \frac{\beta \Sigma ms + m_a s_n (1 - \beta)}{\beta \Sigma m + m_a (1 - \beta)}.$$

In conseguenza porremo:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{m's'}{ms} &= \frac{\beta \Sigma m s + m_a s_n (1-\beta)}{\Sigma ms} = \beta + \frac{m_a s_n (1-\beta)}{\Sigma ms} \\ \frac{m'}{m} &= \frac{\beta \Sigma m + m_a (1 - \beta)}{\Sigma m} = \beta + \frac{m_a (1-\beta)}{\Sigma m} \end{aligned} \right. \tag{27}$$

In fine per una palla massiccia di un metallo di cui la densità stia a quella dell'aria nel rapporto $\frac{1}{\beta'}$, si ha per il pendolo oscillante:

$$m = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n = \Sigma m$$

$$s = \frac{m_1 s_1 + m_2 s_2 + \ldots. + m_n s_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n} = \frac{\Sigma ms}{\Sigma m}$$

$$ms = \Sigma ms$$

e per il corrispondente pendolo aereo:

$$m' = \beta m_1 + \beta m_2 + \ldots. \beta' m_n = \beta \Sigma m + m_n (\beta' - \beta)$$

$$s' = \frac{\beta m_1 s_1 + \beta m_2 s_2 + \ldots \beta' m_n s_n}{\beta \Sigma m + m_n (\beta' - \beta)} = \frac{\beta \Sigma ms + m_n s_n (\beta' - \beta)}{\beta \Sigma m + m_n (\beta' - \beta)},$$

Se ne deduce:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{m's'}{ms} &= \frac{\beta \Sigma ms + m_n s_n (\beta' - \beta)}{\Sigma ms} = \beta + \frac{m_n s_n (\beta' - \beta)}{\Sigma ms} \\ \frac{m'}{m} &= \frac{\beta \Sigma m + m_n (\beta' - \beta)}{\Sigma m} = \beta + \frac{m_n (\beta' - \beta)}{\Sigma m}. \end{aligned} \right.$$

Coi sistemi di misura e di deduzione indicati in questo paragrafo sono stati compilati i quadri seguenti:

ELEMENTI DEI PENDOLI COMPOSTI

I.ª Esperienza — Palla cava d'ottone N.° 2.

PENDOLO LUNGO

		gr		cm
1.	Lamina oscillante	$m_1 =$ 0,035	$\mu_1 =$ 0,038	$s_1 =$ 1,805
2.	Saldatura	$m_2 =$ 0,006	$\mu_2 =$ 0,000	$s_2 =$ 3,160
3.	Filo visibile (¹) superiore	$m_3 =$ 0,514	$\mu_3 =$ 1540,008	$s_3 =$ 98,417
4.	Cappa di cong.ne sup.re	$m_4 =$ 0,504	$\mu_4 =$ 0,014	$s_4 =$ 193,439
5.	Filo visibile inferiore	$m_5 =$ 0,265	$\mu_5 =$ 220,045	$s_5 =$ 243,546
6.	Cappa di cong.ne inf.re	$m_6 =$ 0,543	$\mu_6 =$ 0,016	$s_6 =$ 293,668
7.	Mira	$m_7 =$ 0,480	$\mu_7 =$ 0,013	$s_7 =$ 300,466
8.	Palla	$m_8 =$ 599,536	$\mu_8 =$ 3248,330	$s_8 =$ 297,069

PENDOLO CORTO

1.	Lamina oscillante	$m_1 =$ 0,037	$\mu_1 =$ 0,045	$s_1 =$ 1,905
2.	Saldatura	$m_2 =$ 0,006	$\mu_2 =$ 0,000	$s_2 =$ 3,360
3.	Filo visibile	$m_3 =$ 0,514	$\mu_3 =$ 1540,008	$s_3 =$ 98,617
4.	Cappa di congiunzione	$m_4 =$ 0,543	$\mu_4 =$ 0,016	$s_4 =$ 193,654
5.	Mira	$m_5 =$ 0,480	$\mu_5 =$ 0,013	$s_5 =$ 200,452
6.	Palla	$m_6 =$ 599,536	$\mu_6 =$ 3248,330	$s_6 =$ 197,055

Riduzione al pendolo semplice — *Correzione di Laplace*

Pendolo lungo .... $c_1 = 0{,}104\,55 - 0{,}000\,302\, i + 0{,}000\,358\, i'$ cm — $\alpha_1 = 0{,}000\,090\,5$ cm

» corto .... $c_2 = 0{,}002\,11 - 0{,}000\,207\, i + 0{,}000\,282\, i'$ — $\alpha_2 = 0{,}000\,204\,3$

II.ª Esperienza — Palla cava d'ottone N.° 1.

PENDOLO LUNGO

		gr		cm
1.	Lamina oscillante	$m_1 =$ 0,039	$\mu_1 =$ 0,052	$s_1 =$ 1,990
2.	Saldatura	$m_2 =$ 0,006	$\mu_2 =$ 0,000	$s_2 =$ 3,530
3.	Filo visibile superiore	$m_3 =$ 0,514	$\mu_3 =$ 1539,480	$s_3 =$ 98,771
4.	Cappa di cong.ne sup.re	$m_4 =$ 0,504	$\mu_4 =$ 0,013	$s_4 =$ 193,777
5.	Filo visibile inferiore	$m_5 =$ 0,265	$\mu_5 =$ 219,530	$s_5 =$ 243,825
6.	Cappa di cong.ne inf.re	$m_6 =$ 0,543	$\mu_6 =$ 0,016	$s_6 =$ 293,888
7.	Mira	$m_7 =$ 0,480	$\mu_7 =$ 0,013	$s_7 =$ 300,570
8.	Palla	$m_8 =$ 205,610	$\mu_8 =$ 1240,210	$s_8 =$ 297,232

PENDOLO CORTO

1.	Lamina oscillante	$m_1 =$ 0,040	$\mu_1 =$ 0,055	$s_1 =$ 2,030
2.	Saldatura	$m_2 =$ 0,006	$\mu_2 =$ 0,000	$s_2 =$ 3,610
3.	Filo visibile	$m_3 =$ 0,514	$\mu_3 =$ 1539,480	$s_3 =$ 98,851
4.	Cappa di congiunzione	$m_4 =$ 0,543	$\mu_4 =$ 0,016	$s_4 =$ 193,872
5.	Mira	$m_5 =$ 0,480	$\mu_5 =$ 0,013	$s_5 =$ 200,553
6.	Palla	$m_6 =$ 205,610	$\mu_6 =$ 1240,210	$s_6 =$ 197,215

Riduzione al pendolo semplice — *Correzione di Laplace*

Pendolo lungo .... $c_1 = 0{,}336\,06 - 0{,}000\,891\, i + 0{,}000\,924\, i'$ cm — $\alpha_1 = 0{,}000\,113\,9$ cm

» corto .... $c_2 = 0{,}055\,60 - 0{,}000\,612\, i + 0{,}000\,570\, i'$ — $\alpha_2 = 0{,}000\,257\,0$

(¹) S'intende per filo visibile superiore l'intera porzione superiore del filo, meno le parti incluse nella saldatura e nella cappa di congiunzione; analogamente sia detto per il filo inferiore.

III.ª Esperienza. — Palla piena d'ottone N.° 2.

PENDOLO LUNGO

	gr		cm
1. Lamina oscillante.	$m_1 =$ 0,033	$\mu_1 =$ 0,034	$s_1 =$ 1,737
2. Saldatura	$m_2 =$ 0,028	$\mu_2 =$ 0,002	$s_2 =$ 3,075
3. Filo visibile superiore . . .	$m_3 =$ 0,822	$\mu_3 =$ 2459,346	$s_3 =$ 98,250
4. Cappa di cong.ne sup.re. . .	$m_4 =$ 0,508	$\mu_4 =$ 0,014	$s_4 =$ 193,240
5. Filo visibile inferiore. . .	$m_5 =$ 0,434	$\mu_5 =$ 361,436	$s_5 =$ 243,410
6. Cappa di cong.ne inf.re . . .	$m_6 =$ 0,544	$\mu_6 =$ 0,016	$s_6 =$ 293,595
7. Mira.	$m_7 =$ 0,480	$\mu_7 =$ 0,013	$s_7 =$ 300,422
8. Palla.	$m_8 =$ 1133,955	$\mu_8 =$ 4612,570	$s_8 =$ 297,011

PENDOLO CORTO

1. Lamina oscillante.	$m_1 =$ 0,036	$\mu_1 =$ 0,044	$s_1 =$ 1,900
2. Saldatura	$m_2 =$ 0,028	$\mu_2 =$ 0,002	$s_2 =$ 3,400
3. Filo visibile.	$m_3 =$ 0,822	$\mu_3 =$ 2459,346	$s_3 =$ 98,575
4. Cappa di congiunzione . . .	$m_4 =$ 0,544	$\mu_4 =$ 0,016	$s_4 =$ 193,580
5. Mira.	$m_5 =$ 0,480	$\mu_5 =$ 0,013	$s_5 =$ 200,407
6. Palla	$m_6 =$ 1133,955	$\mu_6 =$ 4612,570	$s_6 =$ 196,996

	Riduzione al pendolo semplice (cm)	*Correzione di Laplace* (cm)
Pendolo lungo	$c_1 =$ 0,072 81 — 0,000 252 i + 0,000 266 i'	$\alpha_1 =$ 0,000 050 8
» corto	$c_2 =$ 0,004 32 — 0,000 171 i + 0,000 226 i'	$\alpha_2 =$ 0,000 114 8

IV.ª Esperienza. — Palla di lega piombo-antimonio.

PENDOLO LUNGO

	gr		cm
1. Lamina oscillante	$m_1 =$ 0,031	$\mu_1 =$ 0,027	$s_1 =$ 1,620
2. Saldatura	$m_2 =$ 0,028	$\mu_2 =$ 0,001	$s_2 =$ 2,840
3. Filo visibile superiore . . .	$m_3 =$ 0,822	$\mu_3 =$ 2464,201	$s_3 =$ 98,108
4. Cappa di cong.ne sup.re . . .	$m_4 =$ 0,508	$\mu_4 =$ 0,014	$s_4 =$ 193,192
5. Filo visibile inferiore . . .	$m_5 =$ 0,434	$\mu_5 =$ 361,978	$s_5 =$ 243,399
6. Cappa di cong.ne inf.re . . .	$m_6 =$ 0,590	$\mu_6 =$ 0,017	$s_6 =$ 293,622
7. Mira	$m_7 =$ 0,526	$\mu_7 =$ 0,013	$s_7 =$ 300,453
8. Palla	$m_8 =$ 1407,238	$\mu_8 =$ 5719,808	$s_8 =$ 297,040

PENDOLO CORTO

1. Lamina oscillante.	$m_1 =$ 0,035	$\mu_1 =$ 0,038	$s_1 =$ 1,820
2. Saldatura	$m_2 =$ 0,028	$\mu_2 =$ 0,001	$s_2 =$ 3,240
3. Filo visibile	$m_3 =$ 0,822	$\mu_3 =$ 2464,201	$s_3 =$ 98,508
4. Cappa di congiunzione . . .	$m_4 =$ 0,589	$\mu_4 =$ 0,017	$s_4 =$ 193,607
5. Mira	$m_5 =$ 0,526	$\mu_5 =$ 0,013	$s_5 =$ 200,437
6. Palla	$m_6 =$ 1407,238	$\mu_6 =$ 5719,808	$s_6 =$ 197,024

	Riduzione al pendolo semplice (cm)	*Correzione di Laplace* (cm)
Pendolo lungo	$c_1 =$ 0,055 97 — 0,000 202 i + 0,000 223 3 i'	$\alpha_1 =$ 0,000 051
» corto	$c_2 =$ — 0,000 55 — 0,000 137 i + 0,000 196 5 i'	$\alpha_2 =$ 0,000 114

V.ª Esperienza. — Palla di alluminio.

PENDOLO LUNGO

		gr		cm
1. Lamina oscillante	$m_1 =$ 0,037	$\mu_1 =$ 0,045	$s_1 =$ 1,900
2. Saldatura	$m_2 =$ 0,006	$\mu_2 =$ 0,000	$s_2 =$ 3,350
3. Filo visibile superiore . .	$m_3 =$ 0,514	$\mu_3 =$ 1538,300	$s_3 =$ 98,554
4. Cappa di cong.^{ne} sup.^{re}. . .	$m_4 =$ 0,504	$\mu_4 =$ 0,013	$s_4 =$ 193,524
5. Filo visibile inferiore . . .	$m_5 =$ 0,265	$\mu_5 =$ 219,865	$s_5 =$ 243,610
6. Cappa di cong.^{ne} inf.^{re} . . .	$m_6 =$ 0,411	$\mu_6 =$ 0,012	$s_6 =$ 293,712
7. Mira	$m_7 =$ 0,349	$\mu_7 =$ 0,010	$s_7 =$ 300,541
8. Palla	$m_8 =$ 357,467	$\mu_8 =$ 1452,221	$s_8 =$ 297,129

PENDOLO CORTO

1. Lamina oscillante	$m_1 =$ 0,039	$\mu_1 =$ 0,051	$s_1 =$ 1,980
2. Saldatura	$m_2 =$ 0,006	$\mu_2 =$ 0,000	$s_2 =$ 3,510
3. Filo visibile	$m_3 =$ 0,514	$\mu_3 =$ 1538,300	$s_3 =$ 98,714
4. Cappa di congiunzione . .	$m_4 =$ 0,411	$\mu_4 =$ 0,012	$s_4 =$ 193,699
5. Mira	$m_5 =$ 0,349	$\mu_5 =$ 0,010	$s_5 =$ 200,528
6. Palla	$m_6 =$ 357,467	$\mu_6 =$ 1452,221	$s_6 =$ 197,116

Riduzione al pendolo semplice — *Correzione di Laplace*

Pendolo lungo $c_1 =$ 0,192 12 — 0,000 511 6 i + 0,000 542 i' (cm) — $\alpha_1 =$ 0,000 050 6 (cm)

» corto $c_2 =$ 0,029 07 — 0,000 350 7 i + 0,000 344 i' — $\alpha_2 =$ 0,000 114 3

Esperienze	Valori di f_1	Valori di f_2	Valori di c compresa la correzione di Laplace: Pendolo lungo	Pendolo corto	Valori di $h_1 = \delta_1$	$h_2 = D + \delta_2$
	cm	cm	cm	cm	cm	cm
I	189,6141	99,7838	0,10443	0,00188	0,00291	100,01675
II	189,5816	99,6669	0,33577	0,05524	0,00383	100,02073
III	189,5497	99,9105	0,07266	0,00418	0,00369	100,01915
IV	189,7367	99,9855	0,05592	—0,00067	0,00119	100,01666
V	189,5089	99,7429	0,19200	0,02892	0,00375	100,01638

Esperienze	$\log\left(1-\frac{m's'}{ms}\right)$ Pendolo lungo	Pendolo corto	$\log\frac{m'}{m}$ Pendolo lungo	Pendolo corto	$\log \rho$ (*) Pendolo lungo	Pendolo corto
I	$\bar{1}$,999 8865	$\bar{1}$,999 8857	$\bar{4}$,416 7403	$\bar{4}$,419 7741	$\bar{3}$,078 3848	$\bar{3}$,083 4494
II	$\bar{1}$,999 6914	$\bar{1}$,999 6918	$\bar{4}$,850 4686	$\bar{4}$,850 3337	$\bar{3}$,084 7403	$\bar{3}$,077 7862
III	$\bar{1}$,999 9375	$\bar{1}$,999 9379	$\bar{4}$,158 5434	$\bar{4}$,155 5486	$\bar{3}$,081 2742	$\bar{3}$,078 2662
IV	$\bar{1}$,999 9491	$\bar{1}$,999 9491	$\bar{4}$,069 3721	$\bar{4}$,068 4456	$\bar{3}$,085 0064	$\bar{3}$,084 1589
V	$\bar{1}$,999 8010	$\bar{1}$,999 8011	$\bar{4}$,660 7137	$\bar{4}$,660 1062	$\bar{3}$,083 8781	$\bar{3}$,083 8452

(*) Con ρ si indica il peso d'un millilitro d'aria nelle condizioni delle esperienze.

Nel costituire le equazioni definitive per mezzo degli elementi sopra riportati abbiamo introdotto per comodità, invece della quantità y delle relazioni fondamentali (10), una nuova incognita z legata ad y dalla relazione:

$$z = 1{,}795\,240\, y \sqrt{\frac{(273 + \theta)}{\rho\, R^2}}$$

nella quale abbiamo considerato θ, ρ ed R come costanti attribuendo loro dei valori medî.

Così abbiamo ottenuto le seguenti equazioni di condizione:

(29)				
I	Esp.ª — Palla	cava N° 2.	$1{,}0060\,x - 0{,}040\,46\,z + 0{,}004\,72 = 0$
II	» »	cava N° 1.	$1{,}0048\,x - 0{,}110\,88\,z + 0{,}035\,33 = 0$
III	» »	piena d'ottone	$1{,}0064\,x - 0{,}022\,80\,z + 0{,}005\,44 = 0$
IV	» »	di piombo e ant.°	$1{,}0064\,x - 0{,}018\,44\,z + 0{,}000\,70 = 0$
V	» »	d'alluminio	$1{,}0056\,x - 0{,}071\,82\,z + 0{,}012\,48 = 0$

Teoreticamente parlando, ed ammesso che la costituzione del mezzo durante le esperienze fosse rimasta rigorosamente invariata, nelle equazioni precedenti si dovrebbe avere $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5$. Ma fisicamente queste quantità possono differire alquanto fra di loro, sia a cagione dell'azione mutua fra il mezzo e la superficie del corpo oscillante, azione della quale la teoria non tien conto, sia per le quantità variabili di vapore acqueo e di acido carbonico contenute nell'aria e che ne fanno variare la viscosità.

§ XXXI.

La discussione dei risultati delle esperienze di Bessel sotto quest'ultimo punto di vista pone in evidenza delle anomalie già notate da Meyer ed attribuite da questi all'influenza degli accessorî della palla oscillante, influenza che non si sa per ora sottoporre a calcolo: ma noi non sapremmo dividere una tale opinione; ed in vero, in questo caso, le anomalie suddette dovrebbero rivelarsi pressochè unicamente nelle esperienze colla palla d'avorio, mentre si rivelano nel valore che dietro le esperienze di Bessel si dovrebbe attribuire all'influenza dell'attrito interno dell'aria nei suoi pendoli lunghi. Ma per certo le cause della variabilità di z sopraccennate sono più che sufficienti a spiegare le discordanze fra i valori Besseliani del coefficiente d'attrito interno del mezzo e quelli che loro ascrivono le formule di Stokes.

Le divergenze fra i valori di z_1, z_2, z_3, ecc. che convengono alle nostre esperienze possono essere messe in chiaro come segue. Se si risolvono le equazioni definitive (29) col metodo dei minimi quadrati supponendo $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5$ si giunge alle due equazioni normali

$$(30) \quad \begin{cases} 0{,}058\,57\,x - 5{,}265\,84\,z + 0{,}058\,98 = 0 \\ 5{,}265\,84\,x - 0{,}019\,95\,z + 0{,}005\,14 = 0 \end{cases}$$

da cui, rappresentando con p_x, p_z, m_x, m_z i pesi e gli errori medî di x e di z rispettivamente, si ottiene

$$x = \overset{\text{cm}}{0,00629} \qquad p_x = 1,52 \qquad m_x = \pm \overset{\text{cm}}{0,0039}$$
$$z = 0,3416 \qquad p_z = 0,006 \qquad m_z = \pm 0,063.$$

Questo risultato dimostra già per conto suo che la maggior parte dell' incertezza (errore medio) che si ha nel valore finale di x si deve ascrivere all' incertezza del valore che si può attribuire a z, giacchè il peso di x sta a quello di z come 253 ad 1. Ma si deve osservare che se z fosse teoreticamente noto, ciascuna delle equazioni (30) darebbe direttamente un valore di x, e l'errore medio di tali determinazioni, calcolato per mezzo degli scostamenti fra i diversi valori ottenuti per x, e la loro media dovrebbe coincidere con quello che si può calcolare per mezzo degli errori medî delle quantità misurate che di x costituiscono l'espressione matematica. Se si esaminano le relazioni (9), del § VIII e si osserva che i termini in $\frac{m'}{m}$, $\frac{m's'}{m\,s}$ ecc. sono termini di correzione, sul cui valore non possono avere influenza sensibile i piccoli errori commessi nel misurare le quantità che concorrono a costituirli, sarà facile vedere che l'errore medio della determinazione di x deve essere identico a quello dell'espressione

$$\lambda_0\ (t_1^2 - t_2^2) + h_1 - h_2\,,$$

giacchè c_1 e c_2 debbono essere considerati come quantità date esattamente ed il coefficiente di x nelle equazioni (29) è molto prossimo all'unità. Ma gli errori medî delle determinazioni dei t sono stati riportati più sopra (v. § XXVII); dai quadri relativi si vede che, in media, può prendersi per errore medio di ogni singola determinazione

$$0^{\text{s}},000\ 001\ 4.$$

In quanto all'errore medio relativo agli h esso si deduce dai diversi valori misurati per h in ogni esperienza, valori che riportiamo nei quadri originali seguenti.

Determinazione dell' errore medio di δ_1 e δ_2

Esperienze		Valori di δ_1 e δ_2 Osservati	Ridotti alla temp. media	Differenze dalla media	Quadrati
		μ	μ	μ	
I	Pendolo lungo	27,0	25,74	+ 3,01	9,0601
		29,6	28,88	— 0,13	0,0169
		32,0	31,64	— 2,89	8,3521
		Media	28,75		
	Pendolo corto	40,3	40,06	— 2,36	5,5696
		37,3	37,90	— 0,20	0,0400
		33,7	35,14	+ 2,56	6,5536
		Media	37,70		
II	Pendolo lungo	35,2	37,90	+ 0,50	0,2500
		35,5	33,88	+ 4,52	20,4304
		38,9	36,74	+ 1,66	2,7556
		43,6	40,72	— 2,32	5,3824
		46,2	42,78	— 4,38	19,1844
		Media	38,40		
	Pendolo corto	78,4	78,40	— 0,81	0,6561
		77,3	77,42	+ 0,17	0,0289
		77,0	77,24	+ 0,35	0,1225
		76,6	77,32	+ 0,27	0,0729
		Media	77,59		
III	Pendolo lungo	37,4	37,76	— 0,73	0,5329
		37,2	36,30	+ 0,73	0,5329
		Media	37,03		
	Pendolo corto	50,4	50,76	+ 1,00	1,0000
		52,4	52,76	— 1,00	1,0000
		Media	51,76		
IV	Pendolo lungo	11,7	12,06	+ 0,09	0,0081
		12,6	12,24	— 0,09	0,0081
		Media	12,15		
	Pendolo corto	22,97	22,85	— 0,71	0,5041
		21,20	21,44	+ 0,70	0,4900
		Media	22,14		
V	Pendolo lungo	37,81	36,91	+ 0,58	0,3364
		38,25	37,35	+ 0,14	0,0196
		38,68	37,78	— 0,29	0,0841
		37,93	37,93	— 0,44	0,1936
		Media	37,49		
	Pendolo corto	17,83	17,71	— 0,42	0,1764
		16,81	17,17	+ 0,12	0,0144
		16,10	16,58	+ 0,71	0,5041
		17,56	17,68	— 0,39	0,1521
		Media	17,29	$\Sigma v^2 = 84{,}0323$	

Errore medio di un' osservazione $\mu = \pm 1^{\mu},67$

» » di δ_1 e δ_2 $\mu : \sqrt{3} = \pm 0^{\mu},96$

Determinazione dell' errore medio di D

Esperienze	Valori di D		Differenze dalla media	Quadrati
	Osservati	Ridotti alla temperatura media		
	m μ	m μ		
I.	1 + 131,3	1 + 129, 4	+ 0,15	0,0225
	129,0	129, 7	— 0,15	0,0225
		Media 129,55		
II.	129,4	129, 4	+ 1,63	2,6569
	127,1	128, 9	+ 2,13	4,5369
	134,7	134, 8	— 3,77	14,2129
		Media 131,03		
III.	134,7	136, 5	+ 2,95	8,7025
	141,4	142, 4	— 2,95	8,7025
		Media 139,45		
IV.	142,9	143, 7	+ 0,57	0,3249
	143,8	144, 4	— 0,13	0,0169
	143,6	144, 7	— 0,43	0,1849
		Media 144,27		
V.	143,6	145, 2	+ 1,30	1,6900
	147,4	147, 8	— 1,30	1,6900
		Media 146,50		
				$\Sigma v^2 = 42,7634$

Errore medio di un' osservazione . . . . $\pm 1^\mu,97$
Errore medio di un' esperienza che comprende 2 osservazioni . . . . $\pm 1, 39$
» » » » 3 » . . . . $\pm 1, 14$

In conseguenza riterremo che in media si possa assumere come errore medio di ciascuna delle nostre determinazioni di D il valore $\pm 1^\mu,3$.

Rappresentando con m'_h, m''_h gli errori medî cercati delle singole determinazioni di h_1, h_2 rispettivamente, ed osservando che in generale si ha:

$$h_1 = \delta_1 \,, \qquad h_2 = D + \delta_2 \,,$$

dai risultati dedotti dalle osservazioni qui sopra scritte si ottiene:

$$m'_h = \pm 0,^\mu 96$$

$$m''_h = \pm \sqrt{(0,96)^2 + (1,30)^2} = \pm 1^\mu,62.$$

Se ne conclude, che ammettendo che z fosse costante in tutte le esperienze, l'errore medio di ciascuna determinazione di x dovrebbe risultare di $\pm 4^\mu,4$ e quello della media delle singole determinazioni di $\pm 2^\mu,0$.

Ma questo errore è molto minore di quello che proviene dalla risoluzione delle equazioni normali (30); possiamo adunque legittimamente concludere che i valori di z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 differiscono sensibilmente fra loro e da quello che loro assegna la teoria. Ne risulta che le nostre equazioni definitive (29), come anche quelle di Bessel, non possono dare la lunghezza del pendolo a secondi con quel grado di precisione che compete al metodo di misura adottato se non vengono istituite delle altre esperienze che forniscano una o più nuove relazioni fra i coefficienti z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 dipendenti dall'attrito interno del mezzo (¹). Questa conclusione viene a confermare pertanto le considerazioni già esposte nel primo paragrafo di questa memoria, ed a spiegare il perchè non abbiamo creduto sufficiente, per la soluzione completa del problema che ci eravamo proposto, nessuno dei metodi fin qui adottati in questo genere di misura. Resta così giustificata la nostra idea della necessità di determinare per ciascuna equazione di condizione della forma delle (29) il valore di z che le compete, facendo oscillare successivamente nel vuoto e nell' aria nelle circostanze atmosferiche dell'esperienza relativa a tale equazione, la stessa palla che ha servito a costituirla: la lunghezza del filo che serve a questa nuova ricerca è arbitraria, ma le più grandi precauzioni debbono esser prese per mantenere costante la temperatura, e per togliere un gran numero di cause di errore che saranno particolarmente indicate in un altro lavoro.

§ XXXII.

Nei nostri calcoli fu posto $\lambda_0 = 99^{cm},3276$, quindi la lunghezza del pendolo semplice a secondi sarà:

$$\lambda = \lambda_0 + x = 99^{cm},3339$$

coll'errore probabile di $\pm 0^{cm},0026$ ed, in conseguenza, avremo per l'intensità della gravità

$$g = 980^{cm},3862 \pm 0^{cm},026$$

Applicando poi la formula:

$$z = \frac{1,795240}{R} y \sqrt{\frac{273+\theta}{\rho}}$$

nella quale si ha (v. § VII) $y = \sqrt{\eta_0}$, si deduce il valore del coefficiente η_0 di attrito del mezzo (supposto di costituzione costante) in cui il pendolo ha oscillato. Nel caso nostro si può porre:

$$\rho = 0,001\,208 \qquad \theta = 15 \qquad R = 3,169$$

e si ottiene: $\eta_0 = 0,000\,001\,525 \pm 0,000\,000\,375.$

I valori di g e di λ si riferiscono all'altezza media sul livello del mare del baricentro della palla oscillante nelle nostre esperienze col pendolo lungo ed alla latitudine del nostro laboratorio. Abbiamo dunque creduto opportuno di determinare anche questi elementi nel modo più preciso che per noi si poteva.

(¹) Così dalle (29) si ha la lunghezza suddetta con un errore probabile di $0^{cm},0026$, ma esse medesime daranno un risultato molto più preciso tostochè siano terminate le esperienze nel vuoto che ora ci occupano.

La determinazione dell' altitudine fu fatta geodeticamente, partendo dalle altezze dei punti più prossimi delle reti trigonometriche dello Stato Maggiore. Questi punti sono pressochè direttamente collegati coll' idrometro situato presso il ponte di Ripetta sul Tevere: l'altezza dello zero di questo idrometro sul livello medio del mare fu già determinata con una livellazione diretta, ed al risultato di essa si suole ascrivere una grande fiducia. In realtà il livello medio del mare non appartiene al Geoide e si può anzi dimostrare che nelle nostre latitudini ne dista di una notevole frazione del valore della marea: però la riduzione della gravità da una superficie di livello ad un'altra è così incerta a causa dell' influenza dei terreni di densità pressochè sconosciuta elevati sul mare, e la marea sulle nostre coste è così piccola, che, per quanto concerne la riduzione ora detta, si può fare astrazione dalla distanza in altezza fra il Geoide e la superficie media marina. Del resto l'altitudine da noi determinata si riferisce a dei punti fissi dei quali l'altezza sarà fra breve definitivamente e precisamente conosciuta tostochè il nostro Stato Maggiore avrà compiuta la livellazione di precisione fra il Mediterraneo e la Capitale.

Le osservazioni originali fatte per determinare la nostra altitudine A ed i dati su cui si poggiano i calcoli relativi sono riportati nell'Allegato II insieme ad alcune notizie che si riferiscono a tale determinazione. Si è trovato

$$A = 58^m, 56$$

coll'errore medio di $\pm 0^m,03$, errore medio che per la maggior parte dipende dalle leggere discordanze fra i dati di partenza, ma che ad ogni modo è così piccolo, rispetto alla precisione di cui avevamo bisogno, che non crediamo opportuno di cercare in seguito maggiore esattezza.

La latitudine φ poteva essere dedotta dal collegamento geodetico fra l'Osservatorio Astronomico del Campidoglio ed il nostro laboratorio, collegamento di cui sono riportati i risultati nell'Allegato II sopra indicato; la diversità fra le attrazioni locali dei due punti deve supporsi pressochè evanescente, giacchè essi non distano che di 770 metri: ma una determinazione diretta ci interessava sotto certi altri punti di vista, cosicchè l'abbiamo intrapresa, ma non ancora completata.

Nell'Allegato III si trovano le osservazioni originali ed i risultati dell'anno decorso, e di quest'anno stesso: il metodo adottato per ora è quello della misura di distanze zenitali sia circummeridiane, sia nel meridiano, con delle combinazioni di stelle che presentano pressochè lo stesso vantaggio del cosidetto metodo di Talcott; sopra tal proposito si può vedere la nota acclusa dell'ing. Paolo Pizzetti (Allegato IV).

Adesso si continua la determinazione con quest' ultimo metodo e col metodo di Bessel dimodochè non presentiamo per ora, che il seguente risultato provvisorio:

Latitudine della torretta del Laboratorio

(*Pilastro dell'Univ. Bamberg*)

$$41^0.\ 53'.35'',5 \pm 0'',15.$$

La differenza di latitudine fra il pilastro dell'Universale ed il luogo del pendolo è poi di $+ 0'',4$.

Finchè, completate le esperienze nel vuoto e le altre ricerche ausiliarie, non sia possibile di sottoporre a nuovo calcolo le osservazioni qui pubblicate per ottenere

dei nuovi valori più precisi, che del resto non possono differire dagli attuali se non nelle cifre sulle quali cade l'incertezza per ciascuna determinazione caratterizzata dal relativo errore medio, concluderemo col dare i seguenti resultati:

$$\lambda = 99^{cm},3339 \pm 0,0026$$

$$g = 980^{cm},3862 \pm 0,0260$$

$$A = 58^{m},56 \pm 0,03$$

$$\varphi = 41^{0}.53'.35'',9 \pm 0'',15$$

$$\eta_0 = 0,000\,001\,525 \pm 0,\,000\,000\,375.$$

Non possiamo chiudere questa memoria senza una parola di ringraziamento ai nostri Assistenti ing[r]. Paolo Pizzetti e d[r]. Moisè Ascoli ed ai sigg. Antonio Cavazzana e Napoleone Reggiani allievi verificatori addetti alla Commissione Superiore dei Pesi e Misure, i quali tutti ci hanno coadiuvati con vivo interesse scientifico nelle nostre esperienze ; nè senza un elogio per il signor Gino Ceccarelli meccanico, il quale con molto zelo e con rara intelligenza ha interpretato e realizzato le nostre idee ed i nostri desiderî nella costruzione dei molti e delicati apparecchi adoperati nelle nostre ricerche.

Allegato I.

Andamento del Regolatore Astronomico DENT *nel periodo delle esperienze per la determinazione della Gravità.*

L'istrumento con cui vien per ora regolato il nostro Pendolo Astronomico *Dent* è un Universale di grandi dimensioni, a cannocchiale spezzato, munito di apparecchio di inversione, e già sommariamente descritto nel § XVIII della presente Memoria. La distanza focale principale dell'obiettivo è di $0^{m},65$, l'apertura di 54^{mm}, l'ingrandimento, coll'oculare di cui abbiamo fatto uso, di circa 72 diametri: questo oculare è mobile, e munito di micrometro filare che può essere disposto tanto per misure di angoli zenitali come per quelle di angoli azimutali: la parte della grande livella (livella azimutale) ha il valore di $1'',633$. Il telarino dei fili porta 19 fili verticali, dei quali i 16, che soli hanno servito nell'osservazione dei passaggi, sono disposti in tre gruppi; ciascuno dei gruppi laterali consta di cinque fili pressochè equidistanti, con intervalli equatoriali di circa $1'.20''$ d'arco; il gruppo di mezzo ha invece 6 fili, fra i quali i due centrali distano di circa $20''$, gli altri di $1'.20''$, come quelli dei gruppi laterali: fra l'ultimo filo di un gruppo ed il primo del gruppo successivo la distanza è di circa $2'.40''$. La numerazione dei 16 fili procede dalla parte in cui nel telarino si trova un altro filo verticale isolato, disposto un poco all'infuori dei tre gruppi suddetti, verso la parte in cui ve ne hanno invece due. La linea di collimazione orizzontale lungo la quale sono state osservate le distanze filari, ed a cui si

riferiscono i passaggi delle stelle nella determinazione del tempo, è indicata da due fili orizzontali molto prossimi, fra i quali si guida l'immagine della stella durante l'osservazione. Tutto l'istrumento è solidamente stabilito sopra un pilastro indipendente dal palco su cui poggiano gli osservatori, come già fu indicato nel § XVIII sopra citato.

Ciascuna delle nostre determinazioni di tempo siderale si fonda essenzialmente sull'osservazione di due serie di passaggi, l' una delle quali fatta nella posizione diretta del cannocchiale, l' altra nella inversa. Intendiamo, come si suole, per posizione diretta quella in cui una stella nella sua culminazione superiore incontra successivamente i fili nell' ordine della loro numerazione. Gli istanti dei passaggi furono elettricamente trasmessi per mezzo di un tasto a mano, ad una tavoletta telegrafica del sistema *Oppolzer*, e quindi ad un cronografo *Hipp* a penne a tratto continuo: una leggera modificazione introdotta in questo ultimo apparecchio, già indicata nella Memoria, toglie la parallasse di registrazione, e permette di leggere su di una sola riga, facilitando molto la lettura ed aumentandone la precisione: abbiamo dunque abbandonato l'uso del tasto a parallassi della tavoletta Oppolzer, e che del resto sarebbe stato completamente superfluo nel nostro càso.

Le distanze filari vennero misurate con due metodi, astronomico l'uno e geodetico l'altro. Il primo non ha bisogno di altra spiegazione, giacchè è quello comunemente usato con tutti gli istrumenti a passaggi, fissi o trasportabili che sieno; il secondo consiste nel puntare successivamente su tutti i fili un oggetto terrestre ben delineato ma molto distante (come, ad esempio, la luce di un eliotropo od un segnale geodetico), leggendo per ogni puntamento coi microscopî sul cerchio azimutale, e misurando poi la distanza zenitale dell'oggetto puntato. Le differenze azimutali osservate fra i fili, moltiplicate per il seno della distanza zenitale, dànno le distanze filari cercate, espresse in secondi d'arco. È facile vedere che questo secondo metodo offre una precisione almeno eguale a quella del primo quando si tratta di un istrumento fornito di buoni microscopî e di un buon cerchio azimutale. Nel nostro Universale i cerchî sono divisi di cinque in cinque primi, e le graduazioni, da quanto abbiamo potuto constatare esperimentalmente, sono ottime: l' errore medio d' ogni singola direzione, determinato da un gran numero di osservazioni azimutali, è di $0'',6$. Intanto l' esperienza dimostra come nel caso di un Universale sia conveniente escludere dal metodo astronomico le osservazioni sulla polare, perchè essa resta troppo tempo fra i fili e vi ha pericolo, diremmo anzi probabilità, di spostamento nell' asse del cannocchiale (inclinazione). Limitando l'osservazione alle stelle di cui la declinazione è compresa fra 60° e 80°, l' errore medio di puntamento sopra un filo è variabile fra $0^s,15$ e $0^s,45$, mentre il coseno della declinazione varia fra 0,50 e 0,17: l'errore medio della determinazione astronomica di una distanza filare è quindi di circa $0^s,08 = 1'',2$, ossia molto maggiore che col metodo geodetico.

La formula da noi usata per calcolare l'avanzo ΔT del nostro regolatore astronomico sul tempo siderale è la solita formula di Mayer, cioè:

$$\Delta T = Æ - T - a \frac{\text{sen}(\varphi - \delta)}{\cos\delta} - b \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} \mp \frac{c}{\cos\delta} \quad \begin{cases} + \text{ cann. diretto} \\ - \text{ cann. rovesciato} \end{cases}$$

dove T è il tempo del passaggio al filo di mezzo, che nel nostro caso è rappresentato

dalla media dei sei fili del gruppo centrale, Æ l'ascensione retta e δ la declinazione della stella osservata, φ la latitudine, a la costante di azimut (essendo $6^{or}+a$ l'angolo che la direzione Ovest dell'asse orizzontale dell' istrumento fa colla direzione Nord del meridiano astronomico), b l' inclinazione dell' asse del cannocchiale sull'orizzonte, positiva se l'estremità Ovest è più alta dell'estremità Est, c infine la costante di collimazione (parallasse del cannocchiale), essendo $6^{or}+c$ l'angolo che la direzione corrispondente al filo di mezzo ideale sopra indicato fa colla direzione Ovest dell'asse del cannocchiale. Queste tre ultime quantità si suppongono espresse in secondi di tempo.

Per la determinazione dei valori di b relativi alle diverse stelle si richiede la conoscenza sia del valore della parte della grande livella (livella azimutale), sia di quello di conicità degli assi, giacchè la ellitticità di questi nel nostro istrumento è insensibile. Non avendo per ora a nostra disposizione un buon paragonatore di livelle, abbiamo dovuto far determinare il primo dei valori suddetti dallo stesso costruttore dell' istrumento (sig. Carl Bamberg di Berlino), e contentarci di verificarlo per mezzo del cerchio zenitale, collegando a questo invariabilmente la grande livella, e leggendo poi cerchio e livella sotto varie inclinazioni del cannocchiale. Il valore assegnato dal costruttore ad una parte di livella è di $1'',633 = 0^s,109$ e la verifica suddetta è riuscita più che soddisfacente. In quanto alla conicità degli assi, in un istrumento Universale riesce evidentemente impossibile il determinarla col metodo di inversione, giacchè la linea dei V dei cuscinetti non rimane invariabile nel rovesciamento, od almeno su tale invariabilità non si può aver assoluta certezza. Abbiamo in costruzione un apparecchio accessorio che, annesso ai piedi della grande livella, permetterà di variare l'apertura dei suoi V, in modo da poter determinare la conicità cercata senza invertire l'asse sui suoi sostegni, ma per il momento abbiamo dovuto contentarci di scegliere le stelle osservate per guisa che nella media dei risultati ottenuti per il tempo nelle due posizioni diretta ed inversa del cannocchiale l'errore di conicità venisse eliminato.

Nella determinazione della costante c, per la stessa ragione della variabilità probabile della linea dei V e dell'Azimut nell' inversione, era necessario ricorrere a qualche metodo speciale, ed uno dei due che abbiamo adottati può essere usufruito con molto vantaggio anche cogli strumenti a passaggi trasportabili tutte le volte che non si può avere ferma fiducia sulla loro completa stabilità durante il rovesciamento. Tale metodo consiste nell'osservare in una delle due posizioni dell' istrumento gli istanti dei passaggi di tre stelle, una di bassa e due di alta declinazione, e di queste ultime l' una al passaggio superiore e l'altra all' inferiore. Se rappresentiamo con T_1, T_2, T_3 i tempi osservati corretti per la costante di livella, la formula di Mayer fornisce tre relazioni fra questi tempi, le ascensioni rette e le declinazioni delle tre stelle, relazioni in cui compariscono come incognite la costante di collimazione e quella di azimut. Riferendo l'indice 3 alla stella di bassa declinazione, da tali relazioni dedurremo:

$$T_1 - Æ_1 \pm \frac{c}{\cos\delta_1} + a\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\delta_1)}{\cos\delta_1} = T_3 - Æ_3 \pm \frac{c}{\cos\delta_3} + a\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\delta_3)}{\cos\delta_3}$$

$$T_2 - Æ_2 \pm \frac{c}{\cos\delta_2} + a\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\delta_2)}{\cos\delta_2} = T_3 - Æ_3 \pm \frac{c}{\cos\delta_3} + a\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\delta_3)}{\cos\delta_3}$$

Queste equazioni si possono mettere sotto la forma

$$M_{1\cdot3}\, c + N_{1\cdot3}\, a = A_{1\cdot3}$$
$$M_{2\cdot3}\, c + N_{2\cdot3}\, a = A_{2\cdot3}$$

e servono molto bene al calcolo simultaneo delle due costanti a, c, giacchè per due stelle circumpolari che transitano in senso opposto (meridiano superiore per l'una ed inferiore per l'altra) la costante c altera notevolmente in senso opposto i momenti dei due passaggi. Trattandosi d' un metodo di cui l' applicazione non è nell'uso comune, aggiungiamo due delle nostre determinazioni relative alle sere del 25 novembre e del 6 decembre.

25 *novembre* (*Cannocchiale diretto*)

ε Pegasi . . . $\delta_3 = +9^\circ.20'.04''$		$T_3 - Æ_3 = 6^m.20^s,22$
1 Hev. Drac. . $\delta_2 =$ 98. 09. 15		$T_2 - A_2 = 6.\ 15,\ 12$
β Cephei . . . $\delta_1 =$ 70. 02 34		$T_1 - A_1 = 6.\ 24,\ 28$
$M_{3\cdot2} = 8,0637$	$N_{3\cdot} = -5,3175$	$A_{3\cdot2} = -5^s,10$
$M_{1\cdot3} = -1,9161$	$N_{1\cdot3} =$ 1,9[illegible]76	$A_{1\cdot3} = 2^s,66$

$$c = +\ 0^s,81$$
$$a = +\ 2^s,18$$

5 *decembre* (*Cannocchiale rovesciato*)

γ Aquarii . . . $\delta_3 = -1^\circ.58'.04''$		$T_3 - Æ_3 = 6^m.37^s,10$
9 Hev. Drac. . $\delta_2 =$ 103. 40.48		$T_2 - Æ_2 = 6.\ 35,\ 26$
31 Cephei . . . $\delta_1 =$ 73. 02.36		$T_1 - Æ_1 = 6.\ 38,\ 14$
$M_{3\cdot2} = 5,2190$	$N_{3\cdot2} = -3,0329$	$A_{3\cdot2} = -2^s,24$
$M_{1\cdot3} = -2,4282$	$N_{1\cdot3} = 2,4669$	$A_{1\cdot3} = 0^s,60$

$$c = +\ 0^s,67$$
$$a = -\ 0^s,42$$

Nel primo caso un altro metodo di determinazione, di cui parleremo fra poco, aveva dato:

$$c = +\ 0^s,82$$
$$a = +\ 2^s,16$$

e nel secondo:

$$c = +\ 0^s,73$$
$$a = -\ 0^s,48$$

È bene notare che fra il 25 novembre e il 6 decembre il telarino dei fili era stato spostato, e che in conseguenza i due valori di c sopra scritti non si riferiscono ad una stessa identica quantità. Infine diremo come nè nella deduzione delle costanti, nè nel calcolo del tempo abbiamo creduto opportuno di tener conto dell' aberrazione diurna, tanto più che tutte le determinazioni fatte provengono dalla media dei due resultati ottenuti nelle due posizioni opposte del cannocchiale.

L'altro metodo sopra citato per la determinazione di c è il comune metodo geodetico. Sia ζ la distanza zenitale di un oggetto terrestre, α_1 la lettura fatta sul cerchio puntando tale oggetto in una posizione dell' istrumento diretta od inversa che sia, α_2 la lettura nel puntamento a cannocchiale geodeticamente rovesciato, ossia

quando si è fatto ruotare l'istrumento in azimut per 180° senza invertirlo sui cuscinetti: è noto che, secondo i casi, si ha:

$$c = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - 180^\circ}{2} \operatorname{sen} \zeta$$

$$c = \frac{\alpha_1 - (\alpha_2 - 180^\circ)}{2} \operatorname{sen} \zeta .$$

Le letture α_1, α_2 si riferiscono naturalmente al filo ideale che nel nostro istrumento corrisponde alla media dei sei fili del gruppo di mezzo, ma, in pratica, conosciuta la distanza equatoriale fra tale filo ed un altro qualunque, si determina la costante di collimazione relativa a quest' ultimo, e si passa poi, con una somma od una sottrazione, a quella richiesta corrispondente al filo ideale suddetto.

Per stabilire l'asse di collimazione del cannocchiale (filo ideale di mezzo) prossimamente nel meridiano, fu anzitutto determinato l'azimut astronomico di un fanale per mezzo delle osservazioni azimutali di stelle circumpolari negli istanti corrispondenti ad angoli orarî noti in prossimità delle massime elongazioni. L'errore medio della determinazione era di 0'',3; tuttavia questo azimut non fu usufruito che per avere l'aggiustamento dell'asse del cannocchiale nel meridiano con una approssimazione di un secondo o due di tempo, e la costante d'azimut a fu sempre determinata direttamente sia nella posizione diretta del cannocchiale, come nell'inversa, per mezzo della combinazione dei passaggi di una o più stelle circumpolari con una o più stelle equatoriali, calcolando colla nota formula:

$$a = \frac{\left\{ \alpha_1 - \alpha_2 - (T_1 - T_2) \right\} \cos \varphi \operatorname{sen} (\delta_1 - \delta_2)}{\cos \delta_1 \cos \delta_2} .$$

Termineremo notando che nelle determinazioni qui riportate si trova per lo più una differenza notevole fra i risultati ottenuti nelle due posizioni opposte del cannocchiale: una tale differenza deve essere ascritta evidentemente alla conicità dell'asse orizzontale ed ai piccoli errori nelle determinazioni delle costanti; tuttavia è noto che, se le stelle osservate sono state scelte convenientemente, la media dei due risultati coniugati (cannocchiale diretto e cannocchiale rovesciato) deve riguardarsi come indipendente da ogni errore sistematico. Per conseguenza per ogni determinazione di tempo abbiamo fatta la media dei due resultati coniugati senza tener conto dei loro respettivi pesi, attribuendo al resultato finale il doppio del peso minore. Le annesse tabelle contengono le osservazioni originali ed i resultati dei calcoli: ciascun passaggio corrisponde per lo più alla riduzione dei passaggi di tutti i 16 fili al loro filo medio ideale, qualche volta a quella relativa ai soli sei fili di mezzo. In generale l'errore medio di un passaggio complessivo così determinato, come risulta dagli scostamenti delle diverse riduzioni delle osservazioni di ogni singolo filo al filo di mezzo, è di $0^s,05$.

Le leggere divergenze fra gli azimut corrispondenti alle due posizioni opposte dell'istrumento in ciascuna determinazione complessiva dipendono da ciò, che, dopo l'inversione, fu per lo più corretto di nuovo l'istrumento, toccando anche le viti calanti dei suoi piedi.

18 Novembre 1882 ($c = +0^s,78$)

Posizione del Cannocchiale	Nome delle Stelle osservate	Osservazioni	Lettura della livella e costante b: Est	Ovest	b	Azimut calcolati	Osservazioni corrette	Stati assoluti	Medie ridotte a 22 ore	Media
Cannocchiale diretto	ν Cygni. . . .	or m s 20.59.00,51	11.3 47.6	48.6 10.3	s +0.05		or m s 20.59.01,61	m s 6.12,84		
	ξ Cygni. . . .	21.06.52,51	48.8 9.8	10.6 48.8	−0.02		21.06.53,57	» » 88		
	ζ Cygni. . . .	21.14.09,55	9.4 50.0	48.0 11.3	−0.11	s +0,59	21.14.10,50	» » 91	m s 6.12,93 ±0,02	
	τ Cygni. . . .	21.16.19,36					21.16.20,32	» » 84		
	1 Pegasi . . .	21.22.52,67	49.8 9.8	10.8 48.7	−0.06		21.22.53,69	» » 95		
	*β Cephei . . .	21.33.20,96					— —	— —		m s 6.12.60 ±0.014
Cannocchiale rovesciato	α Aquarii . .	22.05.59,26	44.2 14.8	5.2 53.8	+0.50		22.05.59.18	6.12,32		
	*24 Cephei . .	22.13.48,99	44.1 15.0	4.8 53.8	+0.52		— —	— —		
	7 Lacertae . .	22.32.42,15	14.9 45.4	54.6 5.7	+0.48	+0,49	22.32.41.57	» » 19	6.12,28 ±0,02	
	η Aquarii. . .	22.35.33,64	44.9 14.0	4.8 54.1	+0.48		22.35.33,54	» » 33		
	ζ Pegasi . . .	22.41.50,75	14.3 45.0	54.3 5.0	+0.49		22.41.50.63	» » 33		

22 Novembre 1882 ($c = +0^s,78$)

Posizione del Cannocchiale	Nome delle Stelle osservate	Osservazioni	Est	Ovest	b	Azimut calcolati	Osservazioni corrette	Stati assoluti	Medie ridotte a 22 ore	Media
Cannocchiale rovesciato	γ Cygni . . .	20.24.19,92	46.9 11.6	11.0 47,5	+0.03		20.24.18,95	6.17,47		
	β Delphini . .	20.38.21,86	47.1 11.9	10.9 47.4	+0,03		20.38.21,23	» » 58		
	α Cygni . . .	20.43.44,81	11.2 47.4	48.8 10.0	+0.07		20.43.43,75	» » 30		
	ε Cygni. . . .	20.47.46,74					20.47.45,94	» » 43		
	* 76 Draconis.	20.57.21,67	47.0 11.3	9.0 49.3	+0.12	+0,32	— —	— —	6.17,52 ± 0,04	
	θ Capricorni .	21.05.40,13	11.1 47.0	49.0 9.0	+0.11		21.05.39,65	» » 57		
	ζ Cygni. . . .	21.14.15,55					21.14.14,88	» » 36		
	τ Cygni. . . .	21.17.25,81					21.17.25,04	» » 63		
	*1 Hev. Draconis	21.26.30,75	46.8 11.0	8.0 50.0	+0.16		— —	— —		6.17.94 ±0.04
Cannocchiale diretto	*1 Hev. Draconis	21.26.41,91	48.0 14.2	9.0 53.2	+0.28		— —	— —		
	* β Cephei . .	21.33.24,65								
	74 Cygni . . .	21.38.32,75	14.7 48.3	53.8 9,1	+0.29		21.38.34,17	6.18,28		
	ε Pegasi . . .	21.44.43,62					21.44.44,87	» » 21		
	16 Pegasi. . .	21.54.01,85	50.2 14.0	11.0 53.2	+0.16	+0,36	21.54.03,09	» » 38	6.18,37 ± 0,03	
	α Aquarii. . .	22.06.03,80	9.9 48.0	49.5 8.3	+0.08		22.06.05,26	» » 47		
	θ Pegasi . . .	22.10.35,36	49.0 6.0	9.2 45.9	−0.19		22.10.36,74	» » 47		
	γ Aquarii. . .	22.21.54,19	6.5 47.0	46.5 7,0	−0.03		22.21.55,60	» » 41		
	9 Hev. Draconis	22.31.23,85	48.0 6.5	7.8 46.6	− 0.07		22.31.24,10	» » 34		

* N. B. Le osservazioni segnate coll'asterisco furono usufruite soltanto pel calcolo dell'azimut.

25 Novembre 1882. ($c = +0^s,78$)

Posizione del Cannocchiale	Nome delle Stelle osservate	Osservazioni	Lettura della livella e costante b (Est Ovest)	b	Azimut calcolati	Osservazioni corrette	Stati assoluti	Medie ridotte a 22 ore.	Media
Cannocchiale diretto	τ Cygni. . . .	or m s 21.16.28,15	43.2 10.2 16.0 49.0	+0.31		or m s 21.16.29,74	m s 6.22,39		
	*1 Hev.Draconis	21.26.36,18	44.0 10.7 16.0 49.2	+0.28		— —	— —		
	* β Cephei . .	21.33.31,07			s +2,16	— —	— —	m s 6.22.29 ±0.028	
	74 Cygni . . .	21.38.36,62				21.38.38,13	» 26		
	ε Pegasi . . .	21.44.46,54	15.7 49.8 43.3 9.0	+0.35		21.44.48,82	» 20		
	16 Pegasi. . .	21.54.04,97	44.2 9.8 14.6 49.2	+0.26		21.54.06,80	» 11		$6^m.21^s.85$ ±0.04
Cannocchiale rovesciato	α Aquarii . .	22.06.07,46	40.3 5.4 19.0 54.0	+0.70		22.06.08,34	6.21,56		
	ϑ Pegasi . . .	22.10.38,76	18.9 54.1 39.6 4.2	+0.77		22.10.39,59	» 33		
	* 24 Cephei .	22.13.59,06	40.6 5,0 18.5 54.1	+0.76	+1,65	— —	— —	6.21.41 ±0.05	
	9 Hev.Draconis	22.31.19,46	19.0 55.0 39.6 3.7	+0.73		22.31.27,55	» 47		
	μ Pegasi . . .	22.50.42,96	18.8 54.7 39.0 3.0	+0.82		22.50.43,51	» 35		

6 Dicembre 1882. ($c = +0,78$)

Posizione del Cannocchiale	Nome delle Stelle osservate	Osservazioni	Lettura della livella e costante b (Est Ovest)	b	Azimut calcolati	Osservazioni corrette	Stati assoluti	Medie ridotte a 22 ore.	Media
Cannocchiale rovesciato	16 Pegasi . .	21.54.21,45	12,0 47.6 48.0 12.0	—0.01		21.54.20,39	6.35,87		
	α Aquarii. . .	22.06.23,63	48.7 11.0 13.0 50.8	+0.11		22.06.22,55	35,91		
	ϑ Pegasi . . .	22.10.55,30	12.8 51.1 46.7 8.0	+0.25		22.10.54,37	36,25		
	ϑ Aquarii. . .	22.17.16,84	47.0 7.6 12.5 52.1	+0.27		22.17.15,77	35,98		
	γ Aquarii. . .	22.22.13,99			—0,57	22.22.12,90	35,86	6.35,95 ∓0,04	
	*9 Hev.Draconis	22.31.42,44	11.2 51.3 48.6 8.3	+0.16		— —	— —		
	* 31 Cephei. .	22.39.30,68	18.9 46.5 41.7 14.0	+0.27		— —	— —		
	λ Pegasi . . .	22.47.31,28				22.47.30,41	36,09		
	μ Pegasi . . .	22.50.58,67	41.7 13.8 18.5 46.6	+0.27		22.50.57,91	35,91		$6.^m36^s.32$ ∓0.04
	λ Aquarii. . .	22.53.07,94	18 8 47.0 42.1 14.0	+0.27		22.53.06,89	35,88		
Cannocchiale diretto	ο Andromedae	23.03.08,68	45.0 16.0 16.1 45.1	0.00		23.03.09,73	6.36,55		
	* π Cephei . .	23.10.46,08	16.1 45.2 44,1 14,9	+0.06		— —	— —		
	γ Piscium . .	23.17.42,61				23.17.43,36	» 75		
	υ Pegasi . . .	23 26.09,16	45.0 15.7 14.9 44.1	—0.01	—0,07	23.26.10,01	» 79	6.36,69 ±0,04	
	70 Pegasi. . .	23.29.51,12				23.29.51,92	» 89		
	λ Andromedae	23.38.27,27	14.9 44.2 44.1 14.7	+0.01		23.38.28,40	» 75		
	* γ Cephei . .	23.41.09,55	15.2 45.0 44.3 14.8	+0.04		— —	— —		

12 Dicembre 1882. ($c = + 0^s,78$)

Posizione del Cannocchiale	Nome delle Stelle osservate	Osservazioni	Letture della livella e costante b: Est	Ovest	b	Azimut calcolati	Osservazioni corrette	Stato assoluto	Medie ridotte a 22 ore	Media
		or m s					or m s	m s		
Cannocchiale diretto	ϑ Aquarii . .	22.17.23,21	44.9 14.1	15.0 44,2	—0.05		22.17.24,07	6. 44, 34		
	γ Aquarii . .	22.22.20,65	14.1 45.8	44.5 15.3	—0.07		22.22.21,39	» 44, 41		
	*9 Hev.Draconis	22.31.55,37	44.7 13.6	14.2 43.9	—0.04		— —	— —		
	* 31 Cephaei	22.39.35,13	13.1 45.7	43.9 15.0	—0.10		— —	— —	m s	
	η Pegasi . . .	22.44.14,84				0,00	22.44.15,57	» 43, 97	6.44,20 ± 0,06	
	λ Pegasi . . .	22.47.37,70	12.2 46.0	43.2 15.3	—0.17		22.47.38,40	» 44, 16		
	μ Pegasi . . .	22.51.05,29	46.0 13.0	15.0 43.8	—0.12		22.51.06,04	» 44, 16		
	λ Aquarii. . .	22.53.14,48	13.2 45.2	44.1 14.1	—0.06		22.53.15,26	» 44, 32		6.43,69 ± 0,06
Cannocchiale rovesciato	ο Andromedae	23. 03.16,73					23.03.16,27	6. 43, 20		
	* π Cephei . .	23.10.54,24	40.1 17.8	8.9 49.0	+0.45		— —	— —		
	γ Piscium . .	23.17.51,04	17.9 40.6	49.0 9.2	+0.45		23.17.49,79	» 25		
	υ Pegasi . . .	23.26.17,07	39.5 18.5	8.0 50.0	+0.54		23 26.16,31	» 17		
	70 Pegasi. . .	23.29.59,33	18.0 39.9	49.8 8.1	+0.51	—1,28	23.29.58,33	» 37	6.43,19 ± 0,05	
	λ Andromedae	23.38.34,92					23.38.34,71	» 19		
	* γ Cephei . .	23.41.17,56	18.8 38.1	50.3 6.6	+0.60		— —	— —		
	φ Pegasi . . .	23.53.17,36	40.5 18.5	8.9 50.0	+0.50		23.53.16,47	» 40		

13 Dicembre 1882. ($c = + 1^s,70$)

Posizione del Cannocchiale	Nome delle Stelle osservate	Osservazioni	Est	Ovest	b	Azimut calcolati	Osservazioni corrette	Stato assoluto	Medie ridotte a 22 ore	Media
Cannocchiale diretto	*48 Hev. Cephei	3.12.15,54	46.1 12.1	14.0 44.2	—0.10		— —	— —		
	α Persei. . . .	3.22.43,76	10.4 48.2	42.7 16.0	—0.30		3.22.45,98	6.44.61		
	* γ Ursae Minoris	3.27.42,33					— —	— —		
	δ Persei. . . .	3.41.21,39	47.1 12.8	15.0 45.1	—0.12		3.41.23,66	» 91		
	ο Persei. . . .	3.43.44,46				+0,37	3.43.46,04	» 74	6.44,50 ± 0,06	
	27 Tauri . . .	3.48.57,79					3.48.59,15	» 63		
	ζ Persei . . .	3.53.32,33					3.53.33,77	» 69		
	ε Persei . . .	3.56.45,94	9 6 52.0	42.0 14.8	—0.41		3.56.47,89	45. 03		6.44,84 ± 0,06
Cannocchiale rovesciato	γ Tauri . . .	4.19.57,10	14.1 43.2	46.8 10.8	+0.18	+0,10	4.19.55,52	6.45.32		
	* A Draconis .	4.34.49,50					— —	— —		
	μ Eridani . .	4.46.28,09	42.1 15.0	9.2 47.8	+0.29		4.46.26,65	» 60		
	* 9 Camelop .	4.49.19,40	16.9 42.1	49.8 8.2	+0.43		— —	— —		
	π⁵ Orionis. . .	4.54.58,56					4.54.57,15	» 74	6.45,18 ± 0,06	
	ε Aurigae . .	5.00.24,49					5.00.22,72	» 44		
	η Aurigae . .	5.05.08,57				—0,12	5.05.06,85	» 45		
	19* Hev Camel.	5.10.21,40	42.3 17.2	9 8 50.0	+0.39		— —	— —		
	α Aurigae . .	5.14.53,14					5.14.51,26	» 51		

19 Dicembre 1882 ($c = + 1^s,70$)

Posizione del Cannocchiale	Nome delle Stelle osservate	Osservazioni	Letture della livella e costante b			Azimut calcolati	Osservazioni corrette	Stati assoluti	Medie ridotte a 22 ore	Media
			Est	Ovest	b					
Cannocchiale diretto	ρ Cassiopejae.	or m s 23.55.22,76	14.3 47.3	48.0 13.7	+0.06		or m s 23.55.25,19	m s 6.51.34		
	ω Piscium . .	0.00.07,84					0.00.10,25	» » 31		
	α Andromedae	0.09.10,34					0.09.12,59	» » 11		
	*4 Hev. Draconis	0.13.34,81	48.1 11.7	13.3 46.4	—0.08	s + 1.20	— —	— —	m s 6.51,12 ±0,05	
	* Br. 6. . . .	0.16.26,61					— —	— —		
	i Ceti.	0.20.17,28	12.9 48.3	47.9 13.3	—0.02		0.20.19,95	» » 22		
Cannocchiale rovesciato	* $\varkappa$ Cassiopejae.	0.33.18,97	13.5 47.0	49.0 11.2	+0,12		— —	— —		
	ε Andromedae	0.39.16,63					0.39.15,11	6.51.42		
	*21 Cassiopeiae	0.44.59,30					— —	— —		
	ζ Andromedae	0.48.02,34	13.1 47.0	49.0 11.0	+0.12	+ 1,05	0.48.01,07	» » 58		
	μ Andromedae	0.57.10,39	46.9 16.6	10.9 52.6	+0.30		0.57.08,59	» » 32	6.51,32 ±0,05	m s 6.51,20 ±0,05
	ε Piscium. . .	1.03.45,95	47.0 16.2	11.0 52.3	+0.28		1.03.45,07	» » 65		
	β Andromedae	1.10.05,52					1.10.03,90	» » 33		
	τ Piscium . .	1.12.07,41					1.12.05,95	» » 36		
	* α Ursae Minoris	1.25.10,75	48.3 15.2	12.0 52,0	+0.19		— —	— —		
Cannocchiale diretto	* α Ursae Minoris	1.22.55,42	51.7 12.0	15.0 49.0	—0.16		— —	— —		
	υ Persei . . .	1.37.40,17					1.37.42,23	6.51.21		
	φ Persei . . .	1.43.11,28	52.3 12.0	15.2 49.1	—0.18	+ 1,31	1.43.13,36	» » 20	6.51,08 ±0,05	
	o Piscium . .	1.46.03,39	11.0 53.2	48.2 16.0	—0.25		1.46.05,69	» » 36		
	α Trianguli .	1.53.15,79					1.53.17,78	» » 22		

ALLEGATO II.

Determinazione dell' altitudine del piano di marmo che sostiene la grande bilancia Bunge nella sala del pendolo.

Sul parapetto della terrazza dell'universale Bamberg, dal lato Nord-Nord-Ovest, e precisamente ad $1^m,50$ dallo spigolo interno Nord-Nord-Est, fu stabilito un istrumento universale Starke di discrete dimensioni, a cannocchiale spezzato, reiteratore, appartenente al R.° Istituto Fisico Romano e gentilmente concedutoci in prestito dal prof. Blaserna. Con tale istrumento furono determinate le seguenti direzioni azimutali:

S. Pietro, croce della cupola	0.° 00.′ 00,″ 0
Torre di Nerone, parafulmine più alto	10. 42. 41, 5
Quirinale, croce del campaniletto	37. 52. 44, 3
S. Maria Maggiore, centro della palla del camp. .	122. 48. 46, 5
S. Croce in Gerusalemme, croce del campanile .	181. 23. 31, 0
Monte Cave, segnale sul campaniletto	204. 58. 36, 0
Capo di Bove, segnale	225. 57. 20, 6
Campidoglio, asta della bandiera	339. 05. 16, 7

Ciascuna di queste direzioni proviene dalla media di varie serie di osservazioni ed ha un errore medio di circa $\pm$ 0″,8. I punti osservati appartengono alla rete trigonometrica dell'Istituto Geografico Militare, dal quale potemmo ottenere i dati necessarî al collegamento del nostro punto di stazione colla rete medesima. Così, per mezzo della risoluzione di quattro vertici di piramide (metodo di Potenot), si ebbero le seguenti distanze fra la posizione dell'universale Starke, ed i punti qui sotto indicati:

Universale —	Campidoglio	$778^m,56$
»	Capo di Bove	5654, 63
»	Quirinale	952, 55
»	S. Pietro	3416, 20
»	S. Croce in Gerusalemme.	1823, 27
»	Torre di Nerone . . .	576, 53

Tutti questi risultati hanno un errore medio relativo di $0^m,05$ per chilometro.

Contemporaneamente agli angoli azimutali furono misurate le seguenti distanze zenitali:

Capo di Bove, spigolo inferiore della piramide . . .	89°. 55.′ 42,″ 5
S. Pietro, braccio orizzontale della croce . . .	88. 26. 44, 0
S. Croce in Gerusalemme, gronda del tetto del camp.	89. 23. 31, 4
Torre di Nerone, sommità del sosteg. del paraf. .	88. 00. 27, 1

L' errore medio di ciascuna di queste determinazioni è di circa 1″,2.

Dalle reti altimetriche dell'Istituto Geografico Militare si hanno le seguenti altitudini provenienti dall' Idrometro di Ripetta:

Capo di Bove, piede del pilastro . . .	75^{m},72
S. Pietro, sommità della croce . . .	163, 40
S. Croce in Gerusalemme, gronda del camp.	89, 55
Torre di Nerone, piede del paraf. . .	88, 27

Riducendo le zenitali soprascritte ai piani di paragone adottati dall'Istituto Geografico e calcolando colla nota formola:

$$h = s \operatorname{cotg} (\zeta - \beta s),$$

in cui h è la differenza di altitudine fra due punti, s la distanza fra di essi, ζ la distanza zenitale misurata in uno sull'altro, β un coefficiente costante, a cui attribuimmo il valore adottato dall'Istituto Geografico suddetto, si ottengono i seguenti valori dell' altitudine del punto di stazione (sommità del parapetto della terrazza):

Da Capo di Bove	68^{m},03
Da S. Pietro	68, 00
Da S. Croce in Gerusalemme .	67, 92
Dalla Torre di Nerone . . .	67, 89
Media	67^{m},96 $\pm$ 0,02

Per ridurre questa altitudine al piano su cui poggia la nostra bilancia Bunge fu eseguita una livellazione diretta. Si ottenne:

1ª *Stazione*

1ª Quota - Altezza del centro dell'oculare del livello sul parapetto della torretta	0^{m},156	
2ª Quota - Lettura sopra una mira poggiata sul punto II, nella terrazza sottostante alla torretta	6^{m},010	
Differenza		— 5, 854

2ª *Stazione*

3ª Quota - Altezza del centro dell' oculare sul punto II. .	0, 471	
4ª Quota - Lettura attraverso la finestra della sala del pendolo sulla mira posata sul piano di marmo	4, 021	
Differenza		— 3, 550

Differenza di livello fra il punto I ed il piano di marmo . . .	— 9, 404
Altezza del punto I sul livello medio del mare	67, 960
Altezza del piano di marmo sul livello medio del mare	58^{m},556

Allegato III.

Determinazione della Latitudine Astronomica della Torretta del Laboratorio (Pilastro dell'Universale Bamberg).

Nella primavera del 1881, sullo stesso pilastro occupato presentemente dall'Universale Bamberg, fu stabilito un Universale reiteratore di Repsold, di proprietà dell'Istituto Geografico Militare. Un tale istrumento è munito di apparecchio d'inversione, ha il cannocchiale eccentrico con circa $0^m,55$ di distanza focale e con 5 cm. di apertura; coll' oculare fisso che adoperammo l' ingrandimento era di circa cinquanta diametri; tanto il cerchio zenitale come quello azimutale hanno 35 cm. di diametro e sono divisi di 5 in $5'$; la lettura si fa per mezzo di microscopî, che danno direttamente ciascuno $1''$. L'errore medio d'una direzione relativa a ciascun cerchio è di circa $1'',0$.

In corrispondenza a tale istrumento fu situato nella sala dell' apparecchio per la gravità un pendolo astronomico a tempo medio, che ci venne gentilmente conceduto in prestito dal prof. Respighi Direttore del R. Osservatorio del Campidoglio in attesa del nostro regolatore siderale Dent. A siffatto orologio fu aggiunto provvisoriamente un piccolo apparecchio, che produceva la trasmissione elettrica dei secondi al cronografo di Hipp già più volte rammentato nel corso della memoria qui unita: tale apparecchio accessorio è analogo a quello di cui abbiamo fatto uso per la registrazione automatica dei passaggi per la verticale nel pendolo destinato alla misura della gravità e che si trova descritto nella memoria (§ XIX). Un simile sistema prolunga in realtà la durata dell' oscillazione a causa della resistenza che le gocce di mercurio oppongono al moto della forchetta aggiunta all'estremità dell'asta oscillante per produrre la chiusura della corrente, ma presenta il notevole vantaggio di non far passare la corrente attraverso l' asta od i roteggi dell' orologio. Esperimentalmente ci è riuscito di dimostrare che la resistenza delle gocce sopra indicate è la stessa quando passa la corrente e quando non passa, così la corrispondenza fra l'orologio e il cronografo fu soltanto stabilita durante le osservazioni. Un tasto elettrico a mano metteva l'osservatore situato presso l' universale in relazione col cronografo senza l'intermedio della tavoletta di Oppolzer, di cui l'uso sarebbe stato del resto completamente superfluo al nostro scopo, come si intende facilmente da quanto segue.

Coll'aiuto di tali istrumenti fu intrapresa una serie di determinazioni di latitudine col metodo delle altezze circummeridiane. In ogni sera di osservazione veniva data una posizione diversa al cerchio zenitale: nella misura delle distanze zenitali si scartò il sistema della determinazione dello Zenit o del Nadir, si osservò invece ciascuna stella più volte tanto col cannocchiale diretto quanto col cannocchiale rovesciato (senza inversione sui cuscinetti), riducendo separatamente ciascuna lettura, per mezzo degli istanti delle osservazioni telegrafati al cronografo, a quella che si sarebbe fatta nel meridiano. È noto che la semidifferenza dei risultati medî così ottenuti nelle due posizioni dell'istrumento dà la distanza zenitale meridiana apparente indipendentemente da ogni errore sistematico tranne quello della graduazione del cerchio ed è pure

noto che quest'errore si elimina disponendo il cerchio successivamente in diverse posizioni rispetto al piano dei microscopî zenitali. La determinazione dello Zenit o del Nadir istrumentale non solo introduce in ogni sera un errore costante se non si rovescia l'istrumento, ma altresì rende erronei i resultati a causa del cambiamento dello Zenit istrumentale da un'osservazione all'altra, prodotto dalla variazione di temperatura.

Nella determinazione della latitudine col metodo delle circummeridiane non è necessaria la conoscenza del tempo, se non con un'approssimazione di circa un secondo, almeno se non si spinge l'osservazione in verticali troppo distanti dal meridiano. In conseguenza non abbiamo creduto necessario di ricorrere sempre all'osservazione dei passaggi per regolare il pendolo astronomico, e spesso la determinazione dell'andamento di esso è stata fatta con osservazioni di distanze zenitali extrameridiane su stelle prossime al 1° verticale. È da notare che, durante il periodo in cui le osservazioni di latitudine sono state protratte, abbiamo più volte fermato e tramutato il pendolo regolatore, che serviva intanto per le esperienze preliminari indicate nella memoria; ma in ogni sera di osservazione, poco prima o poco dopo la misura delle distanze zenitali circummeridiane, abbiamo avuto cura di determinare altresì l'avanzo assoluto dell'orologio, e ciò per non dover riposare sulla costanza del suo andamento diurno. Nella misura delle distanze zenitali che dovevano servire al calcolo degli angoli orarî fu qualche volta fatto uso dello Zenit o del Nadir istrumentale preventivamente determinato, ma in ogni caso fu poi eliminata l'influenza dell'errore di tale determinazione, prendendo la media dei resultati ottenuti per ciascuna stella nelle due posizioni geodeticamente opposte dell'istrumento.

Il valore della parte della livelletta zenitale fu reiteratamente determinato col metodo geodetico, collegando invariabilmente cioè la livelletta al cannocchiale e leggendo cerchio e livella sotto diverse inclinazioni dell'asse di collimazione. I resultati furono molto soddisfacenti; tuttavia, per eliminare nella latitudine, per quanto era possibile, l'errore commesso in una tale determinazione, la livelletta fu sempre, per mezzo della sua vite di richiamo, stabilita in modo da non dover leggere che poche parti di deviazione e quindi in modo che le correzioni da farsi poi alle letture dei microscopî zenitali fossero molto piccole.

I primi quadri qui annessi contengono i resultati ottenuti colle osservazioni di distanze zenitali extrameridiane o col metodo dei passaggi per regolare il pendolo astronomico: successivamente vengono le tabelle in cui sono riportate le osservazioni circummeridiane originali e i resultati relativi.

Quando giunse nella primavera di quest'anno il nuovo istrumento universale Bamberg, e stabilito che fu al suo posto, dopo aver compiuto il suo studio si iniziarono poi altre osservazioni di latitudine, di cui riportiamo qui alcuni risultati ottenuti con un metodo che ci sembra molto vantaggioso, e che si trova discusso nell'Allegato IV dal sig. ing. Paolo Pizzetti assistente per la Geodesia. È conveniente aggiungere qualche altra parola sull' istrumento Bamberg suddetto a completare il cenno che ne è stato fatto nell'Allegato I.

I cerchî di questo eccellente istrumento hanno 40^{cm} di diametro ed i relativi microscopî ingrandiscono linearmente circa 50 volte (50 diametri) cosicchè un secondo

di arco è nettamente apprezzabile, mentre dallo studio fatto delle graduazioni, che sono di cinque in cinqne primi, risulta la loro ammirabile bontà. Infatti l'errore medio di una direzione è di 0",6. Il micrometro filare annesso all'oculare mobile del cannocchiale, è diviso in cento parti, di cui ciascuna ha un valore di 0",79. Alcune modificazioni che Bamberg ha fatto al tipo usuale degli istrumenti geodetici di alta precisione sono notevoli sommamente. La prima consiste nell'apparecchio accessorio, con cui si può collegare la livelletta zenitale al cannocchiale, a fine di poter usare l'istrumento nella determinazione della latitudine col metodo di Talcott; una vite micrometrica di richiamo serve a disporre la livelletta in modo che nel rovesciamento in azimut (fatto geodeticamente, ossia senza inversione sui cuscinetti), la bolla rimanga prossimamente centrata. La parte di questa livelletta è di 0",93 e lunga circa due millimetri, e la livelletta stessa è a compensazione come la grande livella azimutale. La seconda modificazione è il manubrio che serve a fissare i cerchî di misura in una posizione determinata ed indicata da un indice fisso per il cerchio azimutale, e dall'indice mobile munito di livella, ed annesso al cerchio cercatore zenitale, per il cerchio di precisione zenitale. La terza modificazione è il cannocchiale cercatore collegato alla estremità dell'asse orizzontale dalla parte opposta all' oculare del cannocchiale spezzato, e che nelle osservazioni astronomiche è di grandissimo vantaggio. Non parliamo del micrometro filare e di altre aggiunte che ormai sono comuni anche a diversi altri istrumenti trasportabili di questo genere.

Chiuderemo questa breve relazione col notare che le presenti determinazioni di latitudine non sono che provvisorie: durante il 1883 saranno adottati i due sistemi di Bessel e di Talcott, e saranno fatte molte altre osservazioni col sistema discusso nell'Allegato IV, sistema al quale noi annettiamo un grande peso.

Determinazione del tempo assoluto dal 7 Febbraio al 25 Maggio 1881.

I risultati delle osservazioni e dei calcoli per determinare lo stato assoluto dell'orologio sono riassunti nelle seguenti tabelle.

Osservazioni extrameridiane - Angoli orarî.

Data	Destra o sinistra ?	Nome delle Stelle osservate	Stato assoluto calcolato	Medie tra destra e sinistra	Media (Stato assoluto a 9 ore)
			+ or m s	+ or m s	or m s
7 Febbraio	Sin.	α Leonis	2.47.14,80	2.47.13,83	+ 2.47.14,05
	Des.	»	» » 12,86		
	Sin.	β Leonis	» » 15,30	» » 14,50	
	Des.	»	» » 13,71		
	Sin.	α Bootis	» » 16,45	» » 13,84	
	Des.	»	» » 11,24		
15 Febbraio	Sin.	α Leonis	+ 2.15.60,23	+ 2.15.59,87	+ 2.15.58,97
	Des.	»	» » 59,51		
	Sin.	β Andromedae	» » 58,31	» » 58,69	
	Des.	»	» » 59,08		
	Sin.	α Bootis	» » 58,79	» » 58,66	
	Des.	»	» » 58,54		
	Sin.	α Virginis	» » 59,38	» » 58,64	
	Des.	»	» » 57,91		
9 Marzo	Sin.	α Tauri	+ 0.50.11,51	+ 0.50.11,74	+ 0.50.11,75
	Des.	»	» » 11.97		
	Sin.	α Bootis	» » 12,33	» » 11,71	
	Des.	»	» » 11,09		
	Sin.	β Leonis	» » 12,76	» » 11,99	
	Des.	»	» » 11,23		
	Sin.	α Virginis	» » 12,00	» » 11,65	
	Des.	»	» » 11,31		
	Sin.	α Leonis	» » 11,39	» » 11,67	
	Des.	»	» » 11,96		
	Sin.	β Andromedae	» » 12,30	» » 11,84	
	Des.	»	» » 11,39		
19 Marzo	Sin.	α Arietis	+ 0.11.13,62	+ 0.11.13,54	+ 0.11.13,77
	Des.	»	» » 13,47		
	Sin.	α Virginis	» » 13,28	» » 13,85	
	Des.	»	» » 14.42		
	Sin.	»	» » 13,96	» » 13,98	
	Des.	»	» » 14,01		
	Sin.	α Bootis	» » 13,69	» » 13,69	
	Des.	»	» » 13,69		
	Sin.	α Orionis	» » 13,72	» » 13,79	
	Des.	»	» » 13,86		

Data	Destra o Sinistra ?	Nome delle Stelle osservate	Stato assoluto calcolato	Medie tra Destra e Sinistra	Media Stato assoluto a 9 ore
28 Marzo	Sin.	α Tauri	0.23.49,29	or m s 0.23.49,42	or m s — 0.23.49,65
	Des.	»	» » 49,55		
	Sin.	α Bootis	» » 49,96	» » 49,72	
	Des	»	» » 49,48		
	Sin.	α Virginis	» » 49,51	» » 49,60	
	Des.	»	» » 49,69		
	Sin.	α Orionis	» » 49,35	» » 49,68	
	Des.	»	» » 50,01		
	Sin.	α Bootis	» » 50,31	» » 49,84	
	Des.	»	» » 49,38		
3 Aprile	Sin.	α Bootis	0.50.50,35	0.50.50,85	— 0.50.51,00
	Des.	»	» » 51,34		
	Sin.	α Tauri	» » 51,44	» » 51,20	
	Des.	»	» » 50,95		
	Sin.	α Virginis	» » 50,67	» » 50,91	
	Des.	»	» » 51,16		
	Sin.	α Orionis	» » 51,24	» » 50,94	
	Des.	»	» » 50,65		
	Sin.	»	» » 51,23	» » 51,09	
	Des.	»	» » 50,94		
10 Maggio	Sin.	α Aurigae	3.14.53,93	3.14.53,77	— 3.14.53,47
	Des.	»	» » 53,62		
	Sin.	α Canis Minoris	» » 52,95	» » 53,00	
	Des.	»	» » 53,04		
	Sin.	β Geminorum	» » 53,21	» » 53,17	
	Des.	»	» » 53,14		
	Sin.	α Scorpii	» » 54,66	» » 54,13	
	Des.	»	» » 53,60		
	Sin.	α Ophiuci	» » 53,08	» » 53,30	
	Des.	»	» » 53,52		
13 Maggio	Sin.	β Geminorum	3.26.36,88	3.26.36,80	— 3.26.36,83
	Des.	»	» » 36,73		
	Sin.	α Ophiuci	» » 36,14	» » 36,61	
	Des.	»	» » 36,38		
	Sin.	ζ Aquilae	» » 36,85	» » 36,75	
	Des.	»	» » 36,84		
	Sin.	α Aquilae	» » 37,73	» » 37,18	
	Des.	»	» » 36,64		

Osservazioni meridiane — Passaggi.

16 Maggio

Posizione del Cannocchiale	Nome delle Stelle osservate	Stato assoluto calcolato	Medie
Cannocchiale rovesciato	γ Ursae Majoris . . .	— or m s 3.38.19,58	
	π Virginis	» » 19,62	
	υ Virginis	» » 19,50	
	ε Corvi	» » 19,52	or m s — 3.38.19,59
	δ Ursae Majoris . . .	» » 19,67	
	η Virginis	» » 19,43	
	δ² Corvi	» » 19,80	
	ϰ Draconis	» » 19,61	
Cann. diretto	γ Virginis	3.38.20,07	
	ε Ursae Majoris . . .	» » 20,08	— 3.38.20,09
	ε′ Virginis	» » 20,11	
Stato assoluto a 9 ore = — 3.38.19,84 (or m s)			

20 Maggio

Posizione del Cannocchiale	Nome delle Stelle osservate	Stato assoluto calcolato	Medie
Cannocchiale diretto	γ Ursae Majoris . . .	— or m s 3.53.56,88	
	π Virginis	» » 56,71	
	η Virginis	» » 56,53	or m s — 3.53.56,62
	δ² Corvi	» » 56,69	
	ϰ Draconis	» » 56,46	
	γ Virginis	» » 56,48	
Cann. rovesciato	ε Ursae Majoris	3.53.56,29	
	ε Virginis	» » 56,28	
	*α Ursae Minoris . . .	» » 57,78	— 3.53.56,19
	α Virginis	» » 56,05	
	τ Bootis	» » 56,15	
Stato assoluto a 9 ore = — 3.53.56,40 (or m s)			

* Esclusa dalla media, usata per il calcolo della costante d'azimut.

21 Maggio

Posizione del Cannocchiale	Nome delle Stelle osservate	Stato assoluto calcolato	Medie
Cannocchiale diretto	δ Ursae Majoris. . . .	— or m s 3.57.50,93	
	η Virginis	» » 50,93	or m s — 3.57.50,86
	δ² Corvi	» » 50,80	
	κ Draconis.	» » 50,77	
Cann. rovesciato	γ Virginis	— 3.57.50,67	
	ε Ursae Majoris	» » 50.78	— 3.57.50,62
	ε Virginis	» » 50,52	
	α Virginis	» » 50,52	
Stato assoluto a 9 ore = — 3.57.50,74 (or m s)			

23 Maggio

Posizione del Cannocchiale	Nome delle Stelle osservate	Stato assoluto calcolato	Medie
Cannocchiale diretto	43 Comae	— or m s 4.05.39,30	
	α Virginis	» » 39,17	
	ζ Virginis	» » 39,25	or m s — 4.05.39,23
	τ Bootis	» » 39,20	
	π Ursae Minoris. . . .	» » 39,26	
	ι Draconis	» » 39,19	
Cann. rovesciato	α Draconis.	— 4.05.39,14	
	κ Virginis	» » 38,93	
	θ Bootis	» » 39,04	
	ρ Bootis	» » 38,98	— 4.05.39,05
	π Rootis	» » 39,10	
	μ Virginis	» » 39,02	
	α Bootis	» » 39;17	
Stato assoluto a 9 ore = — 4.05.39.14 (or m s)			

Determinazione della Latitudine Astronomica

RISULTATI DELLE OSSERVAZIONI E DEI CALCOLI

dal 1° Febbraio al 25 Maggio 1881 col metodo delle altezze circummeridiane

Ora dell' orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Zenitale corretta
7 Febbraio — Stella osservata: *α Canis Minoris*					
Zenit prossimo 28°.08'.23",9					
Barometro 754,0 mm	Termometro ann. 11°,3	Termometro esterno 6°,5			
Cannocchiale a destra					
or m s	m s	° ' "	' "	"	° ' "
10.22.53,70	+ 2.46,07	64.29.03,7	— 0 18,80	+ 42,99	64.29.27,89
10.24.53,90	+ 4.46,60	» 29.42,7	— 0 55,98	+ 43,00	» 29.29,72
10.26.50,80	+ 6.43,81	» 30.39,0	— 1 51,07	+ 43,00	» 29.30,93
				Media	64.29.29,51
Cannocchiale a sinistra					
10.35.44,10	+ 15.38,56	351.36.08,8	+ 10.00,06	— 43,50	351.45.25,36
10.37.58,40	+ 17.53,22	» 33.02,3	+ 13.02,54	— 43,65	» 45.21,19
10.39.51,00	+ 19.46,13	» 30.08,6	+ 15.55,18	— 43,80	» 45.19,98
10.41.20,50	+ 21.15,95	» 27.44,9	+ 18.24,75	— 43,90	» 45.25,75
				Media	351.45.23,06
		Distanza Zenitale	36°.22'.03",22		
		Declinazione	5.31.32,24		
		φ =	41.53.35,46		
19 Marzo — Stella osservata: *α Hydrae*					
Zenit prossimo 141°.34'.13",0					
Barometro 764,4 mm	Termometro ann. 13°,5	Termometro esterno 10°,4			
Cannocchiale a sinistra					
or m s	m s	° ' "	' "	' "	° ' "
9.25.20,00	— 7.36,51	191.37.26,50	— 1.49,23	+ 1.09,60	191.36.46,87
9.28.01,60	— 4.54,50	» 36.21,50	— 0.45,47	+ » » 56	» » 45,59
9.30.55,60	— 2.00,02	» 35.43,70	— 0.07,55	+ » » 53	» » 45,70
9.33.54,20	+ 0.59,07	» 35.39,60	— 0.01,83	+ » » 53	» » 47,30
				Media	191.36.46.37
Cannocchiale a destra					
9.40.25,90	+ 7.31,84	91.31.06,4	+ 1.47,01	— 1.09,59	91.31.43,82
9.42.22,70	+ 9.28,95	91.30.02,4	+ 2.49,67	— » » 64	» » 42,43
9.44.15,00	+ 11.21,57	91.28.46,3	+ 4.03,40	— » » 69	» » 40,01
9.45.43,00	+ 12.49,71	91.27.42,7	+ 5.10,35	— » » 73	» » 43,32
9.47.04,00	+ 14.11,03	91.26.34,2	+ 6.19,31	— » » 78	» » 43,73
				Media	91.31.42,66
		Distanza zenitale	50°.02'.31",85		
		Declinazione. . .	— 8.08.55,88		
		φ =	41.53.35,97		

3 Aprile — Stella osservata: α *Canis Majoris*

Zenit prossimo 180°.05′.20″.0

Barometro 751,0 mm Termometro ann. 15°,5 Termometro esterno 17°,0

Cannocchiale a destra

Ora dell'orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Zenitale corretta
or m s	m s	° ′ ″	′ ″	′ ″	° ′ ″
5.39.01,50	— 10.35,75	238.34.05,50	— 3.04,49	+ 1.31,10	238.32.32,11
5.42.15,00	— 7.21,80	» 32.31,00	— 1.29,12	+ 1.31,00	» 32.32,88
5.46.04,70	— 3.31,50	» 31.19,40	— 0.20,42	+ 1.30,93	» 32.29,91
5.48.35,50	— 1.00,28	» 31.00,00	— 0.01,66	+ 1.30,91	» 32.29,25
5.50.58,50	+ 1.23,10	» 31.04,60	— 0.03,15	+ 1.30,92	» 32.32.37
				Media	238.32 31,30

Cannocchiale a sinistra

Ora dell'orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Zenitale corretta
5.54.17,80	+ 4.42,94	121.39.11,10	+ 0.36,55	— 1.30,95	121.38.16,70
5.56.48,00	+ 7.13,61	» 38.17,50	+ 1.25,85	— 1.31,00	» » 12,25
5.59.04,50	+ 9.30,42	» 37.19,10	+ 2.28,53	— 1.31,06	» » 16,57
6.01.02,50	+ 11.28,74	» 36.08,20	+ 3.36,48	— 1.31,13	» » 13,55
6.03.09,00	+ 13.35,58	» 34.42,30	+ 5.03,52	— 1.31,21	» » 14,61
				Media	121.38.14,74

Distanza zenitale. . 58°.27′.08″,28
Declinazione . . — 16.33.30,40

φ = 41.53.37,88

12 Maggio — Stella osservata: α *Virginis*

Zenit prossimo 232°.41′.50″.0

Barometro 758,17 mm Termometro ann. 15°,0 Termometro esterno 10°,0

Cannocchiale a sinistra

Ora dell'orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Zenitale corretta
or m s	m s	° ′ ″	′ ″	′ ″	° ′ ″
9.40.28,72	— 15.41,00	180.09.06,40	+ 7.25,33	— 1.15,20	180.15.16,53
9.41.31,72	— 14.37,33	» 10 01,40	+ 6.27,58	— 1.15,16	180.15.13,82
9.43.01,20	— 13.08,11	» 11.18,50	+ 5.12,49	— 1.15,10	» » 15,89
9.44.35,43	— 11.33,62	» 12.25,30	+ 4.02,31	— 1.15,06	» » 12,55
9.47.21,36	— 8.47,23	» 14.09,88	+ 2.19,98	— 1.14,98	» » 14,80
9.50.29,23	— 5.38,87	» 15.29,80	+ 0.57,83	— 1.14,90	» » 12,73
				Media	180.15.14,39

Cannocchiale a destra

Ora dell'orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Zenitale corretta
10.00.55,25	+ 4.48,85	285.07.18,90	— 42,01	+ 1.14,90	285.07.51,81
10.02.43,73	+ 6.37,77	» 07.56,70	— 1.19,66	+ 1.14,90	» » 51,93
10.04.33,00	+ 8.27,30	» 08.41,00	— 2.09,57	+ 1.14,95	» » 46,34
10.05.59,95	+ 9.54,49	» 09.32,90	— 2.58,18	+ 1.14,98	» » 49,70
10.07.04,45	+ 10.59,15	» 10.13,80	— 3 38,80	+ 1.15,02	» » 49,93
10.08 17,65	+ 12.12,57	« 11.06,00	— 4.30,05	+ 1.15,10	» » 50,72
				Media	285.07.50,07

Distanza zenitale. . 52°.26′.17″,84
Declinazione . . — 10.32.42,30

φ = 41.53.35,54

16 Maggio — Stella osservata; α *Virginis*

Zenit prossimo 239°37'25"

Barometro 758,0 mm Termometro ann. 16°,0 Termometro esterno 15°,0

Cannocchiale a destra

Ora dell' orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Lettura corretta
or m s	m s	° ' "	' "	' "	° ' "
9.40.34,50	+ 1.02.35	292°03'14",80	— 0'.91",95	+ 1'.13",84	292°04'26",69
9.42.54,10	+ 2.22,33	» 03.23,10	— 0.10,20	+ » » 85	» » 26,75
9.45.26,55	+ 4.55,21	» 03.56,70	— 0.43.88	+ » » 86	» » 26,68
9.47.06,00	+ 6.34,92	» 04.31,30	— 1.18,52	+ » » 91	» » 26,68
				Media	292.04.26.70

Cannocchiale a sinistra

Ora dell' orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Lettura corretta
9.50.34,65	+ 10.04,13	187.09.59,10	+ 3.03,67	— 1.13,91	187.11.48,86
9.52.38,05	+ 12.07,87	» 08.37,50	+ 4.26,75	— 1.13,97	» » 50,08
9.54.36,42	+ 14.06.55	» 07.02,60	+ 6.00,53	— 1.14,05	» » 49.08
9.56.16,20	+ 15.46,68	» 05.32,60	+ 7.30,71	— 1.14,11	» » 49,20
				Media	187.11.49,31

Distanza zenitale. . 52°26'18",69
Declinazione . . — 10.32.42,20

φ = 41.53.36,49

16 Maggio — Stella osservata; α *Ursae Minoris*

Zenit prossimo 239°37'25"

Barometro 758,0 mm Termometro ann. 16°,0 Termometro esterno 15°,2

Cannocchiale a sinistra

Ora dell' orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Lettura corretta
or m s	m s	° ' "	' "	' "	° ' "
10.00.36,00	+ 24.23,44	190°13'05".10	— 0'26",46	— 1'06",32	190°11'32",32
10.02.32,70	+ 26.20,50	» 13.07,90	— 0.30,86	— » » »	» » 30,72
10.04.31,15	+ 28.19,27	» 13.12,80	— 0.35,66	— » » »	» » 30.82
10.06.49,05	+ 30.37,55	» 13.20,20	— 0.41,70	— » » »	» » 32,18
10.08.29,80	+ 32.18,57	» 13.25,20	— 0.46.40	— » » »	» » 32,48
				Media	190.11.31,70

Cannocchiale a destra

Ora dell' orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Lettura corretta
10.11.41.40	+ 35.30,69	289.01.25,70	+ 0.56,03	+ 1.06,30	289.03.28,03
10.13.43,18	+ 37.32,79	» 01.17,40	+ 1.02,62	+ » » »	» » 26,32
10.16.41,75	+ 40.31,46	» 01.03,70	+ 1.12,79	+ » » »	» » 22,79
10.08.18,73	+ 42.09,09	» 00.59,10	+ 1.18,87	+ » » »	» » 24,27
10,19.52,05	+ 43.42,67	» 00.55,10	+ 1.24,78	+ » » »	» » 30,18
				Media	289.03.26,32

Distanza zenitale. . 49°25'57",31
Declinazione 91.19.32,30

φ = 41.53.34.99

21 Maggio — Stella osservata: *α Ursae Minoris*

Zenit prossimo 291°.12′.50″,0

Barometro 760,7 mm Termometro ann. 18°,5 Termometro esterno 20°,0

Cannocchiale a sinistra

Ora dell' orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Zenitale corretta
or m s	m s	° ′ ″	′ ″	′ ″	° ′ ″
9.28.07,50	+ 11.17,46	241.48.07,80	— 0.05,68	— 1.06,08	241.46.56,04
9.31.30,80	+ 14.41,31	» » 12,[illegible]0	— 0.09,60	— 1.05,98	» » 56,42
9.33.50,78	+ 17.01,82	» » 15,30	— 0.12,91	— 1.05,70	» » 56,69
9.35.56,65	+ 19.07,89	» » 18,50	— 0.16,29	— 1.05,78	» » 56,43
				Media	241.46.56.40

Cannocchiale a destra

Ora dell' orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Zenitale corretta
9.39.41,63	+ 22.53,47	340.37.25,20	+ 0.23,31	+ 1.05,78	340.38.54,29
9.42.06,70	+ 25.18,94	» » 20,30	+ 0.28,55	+ 1.05,70	» » 54,55
9.44.19,20	+ 27.31,80	» » 15,20	+ 0.33,70	+ 1.05,55	» » 54,45
9.46.32,70	+ 29.46,58	» » 09,60	+ 0.39,37	+ 1.05,30	» » 54,27
				Media	340.38.54,39

Distanza zenitale . . . . . 49°.25′.59″,00
Declinazione 91.19.33,40

φ = 41.53.34,40

21 Maggio — Stella osservata; *τ Virginis*

Zenit prossimo 291°.12′.50″,0

Barometro 760,7 mm Termometro ann. 18°,5 Termometro esterno 20°,0

Cannocchiale a sinistra

Ora dell' orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Zenitale corretta
or m s	m s	° ′ ″	′ ″	′ ″	° ′ ′
9.59.33,28	+ 01.55,64	251.26.57,70	+ 0.08,47	— 0.46,61	251.26.19,56
10.01.30,40	+ 03.52,58	» » 31,30	+ 0.34,30	— 0.46,73	» » 18,87
10.02.57,95	+ 05.20,38	» » 02,30	+ 1.05,09	— 0.46,74	» » 20,65
				Media	251.26.19.69

Cannocchiale a destra

Ora dell' orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Zenitale corretta
10.07.43,43	+ 10.06,64	331.02.39,40	— 3.53,40	+ 46.87	330.59.32,87
10.10.15,97	+ 12.39,59	» 04.47,00	— 6.05,40	+ 46.98	» » 28,58
				Media	330.59.30,72

Distanza zenitale. . 39°.46′.35″,51
Declinazione 2.06.59,40

φ = 41.53.34,91

Ora dell'orologio	Angolo orario	Lettura zenitale ± livella	Riduzione al meridiano	Rifrazione	Zenitale corretta

24 Maggio — Stella osservata: β *Ursae Minoris*

Zenit prossimo 291°.12'.30".

Barometro 759,30 mm Termometro ann. 19°,0 Termometro esterno 18°,0

Cannocchiale a destra

or m s	m s	° ′ ″	′ ″	″	° ′ ″
10.40.34,64	— 0.43,66	323.56.59,00	— 0.00,38	+ 36,27	323.57.34,89
10.41.52,55	+ 0.34,47	» 56.59,90	— 0.00,24	+ » »	» » 35,93
10.43.22,50	+ 2.04,66	» 57.02,20	— 0.03,09	+ » »	» » 35,38
10.44.57,95	+ 3.40,37	» 57.08,00	— 0.09,65	+ » »	» » 34,62
				Media	323.57.35,20

Cannocchiale a sinistra

10.48.28.75	+ 7.11,74	258.27.46,40	+ 0.37,05	— 36,29	258.27.47,16
19.50.15.15	+ 8.58,43	» 27.29,30	+ 0.57,61	— » »	» » 50,62
10.51.28.16	+ 10.11,64	» 27.13,00	+ 1.14,33	— » 30	» » 51,03
10.52.49.40	+ 11.33,10	» 26.51,20	+ 1.35,44	— » 31	» » 50,33
10.54.30.40	+ 13.14,37	» 26.21,60	+ 2.05,34	— » 32	» » 50,62
				Media	258.27.49,95

Distanza zenitale . . . . 32°.44'.52".62
Declinazione 74.37.87,07

φ = 41.53.34,45

25 Maggio — Stella osservata: α *Librae*

Zenit prossimo 284°.01'.20"

Barometro 758,70 mm Termometro ann. 19°,5 Termometro esterno 18°,0

Cannocchiale a sinistra

or m s	m s	° ′ ″	′ ″	′ ″	° ′ ″
10.34.45,60	+ 4.07,22	226.36.48,30	+ 0.28,36	— 1.27,94	226.35.48,72
10.36.41,40	+ 6.03.33	» 36.16,70	+ 1.01,26	— 1.27,97	» » 49,99
10.38 13,60	+ 7.35,78	» 35.40,40	+ 1.36,39	— 1.28,00	» » 48,79
10.39.51,10	+ 9.13,55	» 34.54,50	+ 2.22,15	— 1.28,06	» » 48,59
				Media	226.35.49,02

Cannocchiale a destra

10.42.59,46	+ 12.22,58	341.31.54,80	— 4.15,74	+ 1.28,30	341.29.07,36
10.44.53,10	+ 14.16,37	» 33.17,90	— 5.40,05	+ 1.28,39	» » 06,24
10.46.40,28	+ 15.53,81	» 34.40,60	— 7.01,75	+ 1.28,48	» » 07,33
10.47.49,28	+ 17.13,02	» 35.51,40	— 8.14,62	+ 1.28,54	» » 05,32
				Media	341.29.06,56

Distanza zenitale . . . . 57°.26'.38",77
Declinazione . . . . — . 15.33.02,06

φ = 41.53.36,71

Riepilogando, si ottengono i seguenti risultati:

Latitudine colle altezze circummeridiane

Data	Stella osservata	Posizione del cerchio	N.° delle osserv.	Latitudine	Differenze dalla media	Quadrati
		° ′		° ′ ″	″	
7 Febbr.	α Canis min. . .	28, 08	7	41, 53, 35, 46	— 0,22	0,0484
19 Marzo	α Hydrae	141, 34	9	» » 35, 97	+ 0,29	0,0841
3 Aprile	α Canis maj. . .	180, 05	10	» » 37, 88	+ 2,20	4,8400
12 Maggio	α Virginis. . . .	232, 42	12	» » 35, 54	— 0,14	0,0196
16 Id.	α Virginis . . .	239, 37	8	» » 36, 49	+ 0.81	0,6541
16 Id.	α Ursae min. . .	239, 37	10	» » 34, 99	— 0,69	0,4761
21 Id.	α Ursae min. . .	291, 12	8	» » 34, 40	— 1,28	1,6384
21 Id.	τ Virginis. . . .	291, 12	5	» » 34, 91	— 0,77	0,5929
24 Id.	β Ursae min. . .	291, 12	9	» » 34, 45	— 1,23	1,5129
25 Id.	α Librae	284, 01	8	» » 36, 71	+ 1,03	1,0609
				Media = 41, 53, 35, 68		[vv] =10,9274

Errore medio di un' osservazione $m = 1'',10$

» » della media . . . . $M = 0,\ 35$

Latitudine $\varphi = 41°.53'.35'',68 \pm 0,23$

Aprile e Maggio 1882

Determinazione della latitudine

col metodo delle altezze meridiane di due stelle

$$\varphi = \frac{\delta + \delta_1}{2} + \frac{z_1 - z}{2}$$

δ = declinazione . . . .
z = lettura zenitale corretta della livella e della rifrazione . . } della stella osservata a cannocchiale diretto

δ_1 = declinazione . . . .
z_1 = lettura zenitale corretta della livella e della rifrazione . . } della stella osservata a cannocchiale rovesciato.

Posizione del cannocchiale	Nome della stella osservata	Lettura zenitale ± livella	Rifrazione	$\frac{\delta + \delta_1}{2}$	Latitudine calcolata	Differenze dalla media	Quadrati
14 Maggio — Zenit calcolato 359°.56′.42″							
Barometro 751,3 mm	Termometro ann. 19°,8	Termometro esterno 14°,6					
Diretto	β Ursae Majoris	15°.03′.44″,6	15″,2	51°.04′.33″,2	41°.53′.34″,8	— 0″,6	0,36
Rovesciato	ψ Ursae Majoris	356.42.06,2	3,2				
Diretto	ζ Virginis. . . .	318.04.13,0	50,6	9.01.23,1	41.53.34,2	— 1,2	1,44
Rovesciato	τ Bootis.	23.47.22,1	22,6				
Rovesciato	η Bootis.	22.50.41,9	23,9	10.32.57,7	41.53.34,8	— 0,6	0,36
Diretto	τ Virginis. . . .	320.10.38,5	47,0				
Diretto	ι Virginis . . .	312.37.42,4	61,2	— 3.34.16,9	41.53.35,6	+ 0,2	0,04
Rovesciato	φ Virginis. . . .	43.31.32,5	53,7				
18 Maggio — Zenit calcolato 359°.56′.43″							
Barometro 756,0 mm	Termometro ann. 18°,6	Termometro esterno 14°,0					
Diretto	β Ursae Majoris	15.03.44,3	15,4	51.04.33,7	41.53.35,0	— 0,4	0,16
Rovesciato	ψ Ursae Majoris	356.42.05,4	3,2				
Rovesciato	δ Leonis	20.39.56,0	21,5	27.27.04,8	41.53.35,4	0,0	0,00
Diretto	ν Ursae Majoris	351.47.24,5	8,2				
Diretto	σ Leonis	324.44.03,5	40,2	38.19.37,5	41.53.35,0	— 0,4	0,16
Rovesciato	λ Draconis . . .	331.51.48,7	30,3				
Rovesciato	γ Ursae Majoris	12.23 54,3	12,6	31.52.02.1	41.53.36,1	+ 0,7	0,49
Diretto	ο Virginis . . .	32.26.38,6	36,3				
27 Maggio — Zenit calcolato 359°.57′.18″							
Barometro 763,9 mm	Termometro ann. 18°,9	Termometro esterno 17°,8					
Diretto	γ Ursae Minoris .	30.18.24.6	34,4	52.00.19,3	41.53.36,3	+ 0,9	0,81
Rovesciato	ϑ Coronae Borealis	10.05.22,6	10,5				
Rovesciato	κ Coronae Borealis	14.43.59,1	15,5	26.53.24,0	41.53.37,4	+ 2,0	4,00
Diretto	γ Coronae Borealis	344.44.03,9	16,0				
Diretto	β Serpentis . . .	333.51 33,6	28,7	46.58.24,9	41.53.35,0	— 0,4	0,16
Rovesciato	ζ Ursae Minoris .	323.42.08,1	43,0				
6 Giugno — Zenit calcolato 89.°35′.30″							
Barometro 758,25 mm	Termometro ann. 21°,3	Termometro esterno 20°.2					
Rovesciato	β Ursae Minoris .	56.51.20,3	35,7	51.01.22,7	41.53.34,3	— 1,1	1.21
Diretto	ψ Bootis	75.06.36,9	15,5				
Diretto	β Lybrae.	38.46.08,5	68,1	31.39.11,5	41.53.36,7	+ 1,3	1,69
Rovesciato	γ Ursae Minoris .	59.14.23,4	32,5				
Rovesciato	ν_2 Bootis	90.11.05,2	0,6	39.09.35,1	41.53.36,6	+ 1,2	1,44
Diretto	ζ Coronae Borealis	84.43.07,5	4,7				
Diretto	γ Coronae Borealis	74.22.22,2	15,1	11.47.59,4	41.53.33,6	— 1,8	3,24
Rovesciato	α Serpentis	134.32.20,2	55,4				
Rovesciato	ζ Ursae Minoris .	53.20.21,6	36,3	68.31.08,6	41.53.36,0	+ 0,6	0,36
Diretto	ϑ Draconis	106.34.33,5	17,0				

Errore medio di un' osservazione $m = 1'',03$
» » della media. . . . . $M = 0'',26$

Latitudine $\varphi = 41.53.35'',42 \pm 0'',17$

Dalle osservazioni precedentemente riportate si trova dunque:

Latitudine col metodo delle altezze circummeridiane . . . . 41°.53'.35",68 ± 0",23
» » delle altezze meridiane conjugate . . 41°.53'.35",42 ± 0",17

Combinando i due risultati, col tener conto dei relativi pesi, porremo pertanto:

$$\varphi = 41°.53'.35'',51 \pm 0'',13,$$

ma ricordiamo che questo valore non deve esser considerato che come provvisorio (¹).

Allegato IV.

Sopra un metodo tenuto nella primavera del 1882 *per determinare la Latitudine Astronomica della Torretta dell'Universale Bamberg.* Nota dell'ing. Paolo Pizzetti.

Il metodo, che venne seguito nella primavera del 1882 per la determinazione della latitudine, e del quale alcuni risultati sono riportati alla fine dell'Allegato III della presente Memoria, non richiede che le letture conjugate, fatte sopra un buon cerchio zenitale in corrispondenza ai transiti di una coppia di stelle. Questo metodo, in ogni caso molto semplice, si presentava per noi come il più facile e comodo, poichè si conosceva esattamente (ed era di continuo verificata colle osservazioni fatte nella stessa stagione per determinare lo stato assoluto del regolatore astronomico Dent) l'orientazione del cerchio azimutale, onde era agevolissimo disporre ogni volta, l'istrumento nel meridiano dentro 5" d'azimut. Di più le eccellenti qualità dell'istrumento di cui disponevamo (Universale Bamberg), ed in ispecial modo la bontà provata delle graduazioni dei due cerchî, non davano alcuna ragione di dubitare della riuscita di un metodo, nel quale si doveva fare continuo ma limitato uso del cerchio zenitale.

Ciascuna delle nostre determinazioni si compone pertanto delle osservazioni sopra due stelle, il cui transito meridiano avvenga ad un intervallo variabile da 5^m a 10^m, la prima osservazione viene eseguita a *cannocchiale diretto*, la seconda a *cannocchiale rovesciato* o viceversa; intendiamo qui che queste espressioni abbiano pel nostro istrumento lo stesso significato che già loro si attribuì nella relazione per la determinazione del tempo (V. Allegato I); aggiungeremo solo che quando il detto istrumento è disposto nel meridiano a cannocchiale *diretto* la direzione positiva della graduazione va nel senso: Nord Zenit Sud. Il passaggio dalla posizione *diretta* alla *rovesciata*, o da questa alla prima, è da noi sempre ottenuto, nella presente determinazione (a

(¹) Durante la stampa della presente memoria furono osservate le altezze meridiane di circa 60 coppie di stelle diverse, dalle quali si ottennero oltre 120 valori della latitudine, compresi entro 2" e coll'errore medio di circa 0",8 per ogni singola osservazione. La scelta delle stelle venne fatta in modo da eliminare ogni errore sensibile di rifrazione, di flessione, di graduazione e di tutto l'apparecchio relativo alle letture zenitali. Il valore ottenuto non differisce che assai poco da quello sopra citato; il risultato definitivo, insieme alle nuove osservazioni, verrà da noi pubblicato a parte appena si sia potuto altresì eseguire la determinazione della latitudine col metodo di Bessel.

differenza di ciò che si fa nella determinazione del tempo) col girare di 180° in azimut le braccia dell'istrumento.

Se con Z chiamiamo la lettura del cerchio zenitale fatta in corrispondenza al puntamento di una stella al meridiano nella osservazione a cannocchiale *diretto*, con δ la declinazione della stella medesima e con Z_0 lo zenit del cerchio, avremo la latitudine φ data dalla formula:

$$(1) \qquad \varphi = \delta + Z_0 - Z,$$

sia che la culminazione avvenga al Sud, sia che avvenga al Nord. (Supporremo qui sempre che le letture zenitali apparenti siano ridotte alle vere tenendo conto della refrazione e dello spostamento della livella annessa ai microscopî del cerchio zenitale).

Indicate con Z_1, δ_1 le quantità analoghe alle precedenti per una stella osservata a cannocchiale rovesciato, avremo, qualunque sia la stella osservata:

$$(2) \qquad \varphi = \delta_1 + Z_1 - Z_0.$$

S'intende, naturalmente, che in luogo delle quantità δ, δ_1 devesi scrivere $180 - \delta$, $180 - \delta_1$ quando la prima o la seconda stella è osservata al passaggio inferiore anzichè al superiore.

Le due relazioni (1) e (2) sommate dànno, indipendentemente dalla conoscenza dello Zenit Z_0, il valore di φ:

$$\varphi = \frac{\delta + \delta_1}{2} - \frac{Z - Z_1}{2},$$

ed è questa la formula da noi usata pel calcolo della latitudine.

Errori del metodo. Venendo a dire degli errori che il metodo da noi tenuto introduce nella determinazione della latitudine, osserveremo come l'effetto della non perfetta coincidenza del piano del meridiano colla superficie descritta dall'asse di collimazione si può risolvere al solito nell'effetto dei tre elementi: errore d'azimut a, inclinazione b dell'asse del cannocchiale, e costante di collimazione (o parallasse) c, e come questi, nel caso qui considerato, influiscono in doppio modo sulla determinazione. Primieramente essi conducono ad un apprezzamento erroneo dell'istante della culminazione, sicchè, mentre la stella dovrebbe esser puntata al momento in cui passa al meridiano, noi la puntiamo invece quando essa ne è discosta d'un angolo orario τ, il quale è dato, come è noto, dalla somma:

$$(3) \qquad b\frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + a\frac{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + \frac{c}{\cos\delta} = \tau.$$

In secondo luogo poi, a causa delle costanti b e c, la distanza zenitale dell'astro (nella posizione in cui lo si osserva) vien alterata nello stesso modo in cui risultano alterate le ordinarie misure geodetiche delle distanze zenitali.

Relativamente a quest'ultima sorta d'errori ricorderemo che essi sono dell'ordine dei quadrati di b e di c, e che, detta Z una qualsiasi lettura zenitale, ζ la vera distanza zenitale, si ha la correzione approssimata:

$$(4) \qquad \alpha = \left\{ \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \operatorname{cotang}\frac{\zeta}{2} - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 \operatorname{tang}\frac{\zeta}{2} \right\}$$

in corrispondenza alle formule

$$(5)\qquad \begin{array}{ll} \text{Cannocchiale diretto} \left\{ \begin{array}{ll} \zeta = Z_0 - Z + \alpha & \text{per una stella a Sud} \\ \zeta = Z - Z_0 + \alpha & \text{» » » a Nord} \end{array} \right. \\ \text{Cannocchiale rovesc.} \left\{ \begin{array}{ll} \zeta = Z - Z_0 + \alpha & \text{per una stella a Sud} \\ \zeta = Z_0 - Z + \alpha & \text{» » » a Nord} \end{array} \right. \end{array}$$

D'altra parte l'effetto del primo errore cui abbiamo accennato, ossia del puntamento extrameridiano, è costantemente quello di far apparire maggiore del vero, di una certa quantità x, la distanza zenitale meridiana. Tenute le precedenti notazioni, il triangolo sferico avente per vertici il polo, lo Zenit astronomico e l'astro ci darà:

$$\cos\zeta = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\tau$$

e, per approssimazione, trascurando le potenze di τ superiori alla 2^a:

$$(6)\qquad \cos\zeta = \cos(\varphi - \delta) - \frac{\tau^2}{2} \cos\varphi \cos\delta .$$

Si ha d'altronde:

$$(7)\qquad \zeta - x = \pm(\varphi - \delta) \left\{ \begin{array}{l} + \text{ stella a Sud} \\ - \text{ » a Nord} \end{array} \right.$$

da cui, trascurando le potenze di x superiori alla prima, si deduce:

$$\cos\zeta \cos\left\{ \pm(\varphi - \delta) + x \right\} = \cos(\varphi - \delta) \mp x . \operatorname{sen}(\varphi - \delta),$$

e questa relazione confrontata colla (6), ci dà:

$$(8)\qquad x = \pm \frac{\tau^2}{2} \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)} \left\{ \begin{array}{l} + \text{ stella a Sud} \\ - \text{ » a Nord} \end{array} \right. .$$

Questa formula, e insieme con essa la (4) sopra accennata ci mostrerebbero senz'altro come tutti gli errori istrumentali d'aggiustamento abbiano un'influenza di 2° ordine nelle nostre determinazioni; si deve tuttavia notare che le formule stesse, di loro natura approssimate, non hanno più alcun significato nel caso che la distanza zenitale sia molto prossima a zero. Però è agevole vedere che, eseguendo la somma algebrica delle correzioni α ed x, si elimina facilmente questa difficoltà, mentre si ha il vantaggio di esprimere con una formula unica e generale l'effetto complessivo di tutti gli errori d'aggiustamento considerati.

Dalle (5) e (7) si elimini la ζ; si otterrà:

$$\begin{array}{ll} \text{Cannocchiale diretto} \quad Z_0 - Z = \varphi - \delta \pm (x - \alpha) & \left\{ \begin{array}{l} + \text{ stella a Sud} \\ - \text{ » a Nord} \end{array} \right. \\ \text{Cannocchiale rovesc.} \quad Z - Z_0 = \varphi - \delta \pm (x - \alpha) & \left\{ \begin{array}{l} + \text{ » a Sud} \\ - \text{ » a Nord} \end{array} \right. \end{array}$$

e da queste, se vi si sostituiscono i valori di α e di x dati dalle (4) e (8), ponendo nella (4) in luogo di ζ il valore prossimo $\pm(\varphi - \delta)$, si deducono, qualunque siano le stelle osservate, le relazioni:

$$\begin{array}{l} \text{Cannocchiale diretto:} \quad Z_0 - Z = \varphi - \delta + y \\ \text{Cannocchiale rovesc.:} \quad Z - Z_0 = \varphi - \delta + y, \end{array}$$

dove si è posto:

$$y = \frac{\tau^2}{2} \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)} - \left(\frac{c+b}{2}\right)^2 \operatorname{cotang} \frac{\varphi - \delta}{2} + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{\varphi - \delta}{2}.$$

È poi facile vedere che, colla sostituzione del valore di τ dato dalla (3), quest'ultima formula si riduce all'altra:

$$(9) \quad y'' = \frac{\operatorname{sen} 1''}{\cos\delta} \left\{ \frac{a''^2}{2} \operatorname{sen}(\varphi - \delta) \cos\varphi + a'' b'' \cos(\varphi - \delta) \cos\varphi + a'' c'' \cos\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{b''^2}{2} \cos(\varphi - \delta) \operatorname{sen}\varphi - \frac{c''^2}{2} \operatorname{sen}\delta - b'' c'' \operatorname{sen}\varphi \right\},$$

la quale è applicabile a qualunque distanza zenitale e dà il valore di y in secondi d'arco, se a, b e c sono pure espressi in secondi d'arco. Se y ed y_1 sono le quantità date dalla (9) ora trovata e relative alle due stelle di declinazione δ e δ_1 rispettivamente, avremo la latitudine data dalla formula:

$$(10) \qquad \varphi = \frac{\delta + \delta_1}{2} + \frac{Z_1 - Z}{2} - \frac{y + y_1}{2}.$$

Si dovrà ricordare che nel calcolo di y_1 deve porsi $-c$ in luogo di c, e per b un valore in generale diverso da quello che entra nel calcolo di y.

Le formule (9) e (10) generalizzano la precedente conclusione, che, cioè, l'influenza di tutti gli errori d'aggiustamento è di second'ordine rispetto agli errori medesimi; tale influenza, quando si abbia cura di tener l'istrumento sufficientemente corretto, è affatto trascurabile rispetto a tutti gli altri errori teoretici ed accidentali che son proprî delle misure occorrenti nelle nostre determinazioni, e non può, neppure in una lunga serie d'osservazioni, prender l'aspetto di error costante apprezzabile in confronto dell'error medio accidentale.

Refrazione e flessione. È facile provare che, se per la determinazione della latitudine si paragonano due altezze meridiane, l'una a Sud, l'altra a Nord, resta sommamente scemata, e può essere del tutto eliminata, l'influenza degli errori di refrazione, essendo qui solo necessaria la conoscenza esatta della differenza delle refrazioni relative alle distanze zenitali delle due stelle. E analogamente dicasi degli errori dovuti alla flessione del cannocchiale, i quali si annullerebbero del tutto quando si paragonassero tra loro le osservazioni relative a due stelle culminanti l'una a Nord, l'altra a Sud e simmetricamente rispetto allo Zenit. È noto d'altronde come su questi principî appunto sia in gran parte fondata l'utilità del metodo di Talcott per la misura delle latitudini.

Livella zenitale. Abbiamo qui sempre supposte corrette le letture zenitali colle indicazioni della livella annessa ai microscopî. Dobbiamo ora far notare come tali correzioni sono possibili nel nostro istrumento colla massima esattezza attesa la sensibilità della detta livella, la cui parte ha il valore (più volte verificato) di 0″, 9. Del resto si deve notare che l'errore di riduzione deve esser considerato come variabile, ma lo si può annullare del tutto quando si abbia cura di ridurre la livella per mezzo della sua vite di richiamo a far le stesse letture nelle due osservazioni che si paragonano.

Errori del cerchio. Alle considerazioni fatte relativamente agli errori teoretici di puntamento e di misura non è inutile aggiungere poche parole riguardanti l'eliminazione degli errori sistematici e casuali della graduazione del cerchio zenitale. Evi-

dentemente i primi di questi sono del tutto eliminati se le coppie di stelle sono scelte in modo che le letture Z e Z_1 differiscano poco tra loro, e se si ha cura di cambiare varie volte la posizione del cerchio rispetto all'asse di collimazione del cannocchiale. Per ciò che riguarda gli errori accidentali è da notare che nell'eseguire le letture zenitali si può facilmente, e con lievissima perdita di tempo, collimare sopra tre o quattro, anzichè sopra una sola, delle graduazioni contigue che cadono sotto il campo del microscopio; in tal modo nell'espressione del valore della latitudine compajono le letture fatte sopra 12 o 16 divisioni rispettivamente e l'errore accidentale tende rapidamente a zero.

Vogliamo ancora far notare un vantaggio, a parer nostro assai notevole, del nostro metodo sopra quello di Talcott, vantaggio consistente in ciò che la scelta delle coppie di stelle da osservare è molto più libera in quello che in quest'ultimo, anche quando noi poniamo la condizione (come intendiamo di fare d'or innanzi) che le due stelle culminino da parti opposte dello zenit a distanze zenitali poco diverse tra loro (3 o 4 gradi di differenza al più). Questa maggior libertà permette di trovare negli ordinarî cataloghi, fra le stelle delle quali la declinazione è assai ben conosciuta, un numero molto grande di coppie adatte alle osservazioni conjugate; una tale circostanza non potrà certamente esser tenuta in poco conto in tutti quei casi (ora tanto frequenti nelle operazioni dell'alta Geodesia) nei quali si debba determinare la latitudine in tempo relativamente breve e con istrumenti portabili muniti di cannocchiali di modesta apertura obbiettiva.

Stelle osservate. Le stelle osservate furono scelte quasi esclusivamente fra quelle del Catalogo Berlinese *Mittlere und Scheinbare Oerter von* 539 *Sternen etc.* (I. Pulkowaer Hauptsterne); solo poche di esse sono tratte dal *Nautical Almanac etc.* (Royal Observatory at Greenwich).

Nota I. I risultati ottenuti col metodo qui discusso sono scritti nell'Allegato III sotto il titolo: *Determinazione della latitudine colle altezze meridiane di due stelle. Aprile e Maggio* 1882.

Nota. II. Durante la stampa della presente Memoria vennero da noi eseguite circa 120 determinazioni della latitudine col metodo qui descritto. Per queste determinazioni abbiamo sempre rigorosamente seguito il principio tanto vantaggioso di fare le due osservazioni meridiane conjugate sopra stelle che culminino in punti quasi simmetrici rispetto allo zenit. Abbiamo poi introdotto nei puntamenti e nelle letture zenitali una notevole modificazione consistente nel puntare le stelle col filo mobile del micrometro filare anzichè con uno dei fili fissi orizzontali del reticolo. La lettura zenitale si compone così in parte di quella del micrometro filare, del quale abbiamo accuratamente determinato il valore della divisione, e in parte delle letture fatte sui microscopî del cerchio; noi abbiamo in tal guisa il vantaggio considerevole di potere, avanti ogni singola osservazione, disporre il cannocchiale in modo che le letture corrispondenti alle due osservazioni conjugate differiscano tra loro solo per un piccolo numero di parti dei micrometri dei microscopî, sicchè resta eliminato sensibilmente l'errore delle relative viti. Quanto all'errore della vite del micrometro filare, lo si intende determinato a parte; nel caso nostro dalle esperienze fatte in proposito esso risulta trascurabile.

Allegato V.

Studio dell'apparecchio di Fizeau per la misura delle dilatazioni dei solidi. Nota del dott. M. Ascoli

Il fenomeno delle interferenze offre un mezzo incomparabilmente più sensibile di tutti gli altri conosciuti per rivelare, nella distanza tra due superficie riflettenti, variazioni estremamente piccole, come quelle che possono provenire dalla differenza di dilatabilità termica di due corpi posti a breve distanza. L'apparecchio di Fizeau rende possibile di determinare, mediante l'osservazione di questo fenomeno, le dilatazioni dei corpi solidi, esperimentando sù pezzi di dimensioni molto piccole, come sarebbero, per esempio, i cristalli, cui fu particolarmente applicato. Esso si presta inoltre allo studio della dilatazione delle sostanze che entrano nella costruzione degli strumenti di misura, e perciò la Commissione internazionale del metro [1] decise di adottare il metodo di Fizeau per la dilatazione delle sbarre metalliche che formano i prototipi lineari e pel medesimo scopo fu fatto costruire dal Laurent di Parigi, per la nostra Commissione Superiore dei pesi e misure, un esemplare dell'apparecchio. Su questo è stato fatto il presente lavoro, nel laboratorio di Fisica della R. Scuola degli Ingegneri in Roma.

La descrizione delle varie parti dell'apparecchio e l'esposizione del principio su cui si fonda si trovano per esteso nelle memorie originali di Fizeau [2] e in un recente lavoro del dott. Benoit, publicato dall'Ufficio internazionale dei pesi e misure [3]. Tuttavia, siccome i citati lavori sono poco diffusi, e dell'apparecchio non fu costruito che un piccolissimo numero di esemplari, credo non inutile richiamarne in poche parole la teoria e dare un breve cenno sulle disposizioni che servono a metterla in pratica, aggiungendo qualche osservazione sul modo di operare e sulle relative precauzioni che vengono suggerite da una lunga serie di esperienze.

1. Il fenomeno conosciuto generalmente sotto il nome di *Anelli di Newton* dipende, come è noto, dalle interferenze tra i raggi luminosi riflessi da due superficie che limitano una sottile lamina d'aria; e l'alternata successione di massimi e minimi di intensità (supponendo che si faccia uso d'una sorgente luminosa monocromatica) è dovuta unicamente alla diversa distanza che separa le due superficie nei diversi punti; perciò, in corrispondenza a tutti i punti posti sopra una linea di costante intensità luminosa, lo spessore della lamina d'aria è il medesimo. Quando la luce cada sulle due superficie e venga riflessa in direzione sensibilmente normale, in tutti i punti nei quali la doppia distanza è uguale a un numero pari di mezze lunghezze d'onda si ha un massimo d'intensità; quindi il doppio della differenza fra gli spessori corrispondenti a due punti posti su due linee di massimo successive è uguale

(1) Riunione generale del settembre 1872.

(2) *Comptes rendues* t. 58, p. 923; t. 60, p. 1161; t. 62, p. 1101 e 1133; t. 66, p. 1005 e 1072; t. 68, p. 1125. — *Annales de Chimie et Physique*, 4. serie, t. II, p. 143 (1864); t. VIII, p. 335 (1866). — *Pogg. Ann.* Bd. 123, 126, 135.

(3) *Travaux et mémoires du bureau international des poids et mésures.* T. I. Paris, 1881.

ad una intera lunghezza e la differenza semplice ad una mezza lunghezza d'onda; lo stesso si può dire per due linee di minimo successive, e in generale per due linee successive di uguale intensità. Se la distanza tra le due superficie varia di un quarto di lunghezza d'onda, in tutti i punti che erano di massimo avremo ora un minimo e in tutti quelli di minimo un massimo; per una seconda variazione uguale alla prima, la posizione delle linee apparirà di nuovo quale appariva inizialmente, ma, se avremo seguito il fenomeno per tutta la durata della variazione, avremo veduto ciascuna linea oscura muoversi gradatamente fino a sostituirsi alla linea oscura successiva. Inversamente quando, riferendoci ad un punto fisso di una delle superficie, vedremo muoversi le linee d'interferenza, ne potremo concludere che lo spessore della lamina d'aria è variabile, e che la variazione avvenuta in un dato tempo, è uguale ad una mezza lunghezza d'onda, ogni volta che in quel tempo ciascuna linea oscura si sarà sostituita alla vicina, ossia ogni volta che, per un punto fisso di riferimento, sarà passato un intiero intervallo tra due linee oscure successive. A questo intervallo, per brevità, daremo il nome di *frangia.*

Disponendo l'apparecchio opportunamente, si ottengono frangie di cui si può valutare facilmente ad occhio la decima od anche la ventesima parte, che corrisponde alla ventesima o quarantesima parte di lunghezza d'onda. La lunghezza d'onda della luce del sodio, che è quella adoperata ordinariamente, essendo di mill. 0,0005888, ne segue che sono sensibili le variazioni di

$$0^{mm},000\ 029\ 44$$
$$0^{mm},000\ 014\ 72$$

limite di precisione cui non si avvicina nessun altro mezzo di misura.

2. Nell'apparecchio di Fizeau, per applicare il principio ora esposto, le interferenze si producono per mezzo di una lamina d'aria compresa tra la superficie del corpo di cui si studia la dilatazione e quella di una lastrina di vetro, e le variazioni di distanza tra le due superficie si ottengono facendo variare la temperatura del sistema.

Una faccia del corpo è leggermente convessa e ben levigata, in modo da riflettere specularmente i raggi luminosi; a breve distanza da questa è posta la lastrina di vetro; invece di una lamina a faccie parallele si adopera una lente piano-convessa, di cui la faccia piana è appoggiata sulle punte di tre viti che servono nello stesso tempo ed a sostenere il disco metallico sul quale si appoggia il corpo, ed a regolare convenientemente lo spessore della lamina d'aria. La sorgente luminosa è posta alla distanza di circa quaranta centimetri, nel piano focale principale della lente, in modo che i raggi vengono a cadere normalmente sulla superficie superiore della lamina e, riflessi nella medesima direzione, vanno a formare nello stesso piano focale un'immagine di tutti i punti della superficie riflettente. Ricevendo questa immagine nell'occhio o in un piccolo cannocchiale si vede tutta la faccia illuminata del corpo coperta di frangie, le quali, se la superficie e la sorgente luminosa sono in circostanze favorevoli, si presentano nitidissime.

Le viti di sostegno e il disco destinato a portare il corpo, devono essere del medesimo metallo e formano un piccolo treppiede dell'altezza di circa quaranta millimetri. Nel nostro apparecchio il treppiede è di rame: Fizeau ne aveva fatto costruire

uno di acciaio, che in seguito abbandonò per prendere il platino la cui dilatazione avviene molto più regolarmente. Il corpo sottoposto ad esperienza si appoggia sopra tre piccole punte battute col bulino sul piano del treppiede, onde permettere allo strato d' aria situato fra il corpo ed il suo sostegno di dilatarsi liberamente quando si riscalda, senza produrre dei movimenti che turberebbero le esperienze.

Il riscaldamento è fatto mediante un'ordinaria lampada Bunsen munita di un piccolo condotto secondario il quale alimenta una fiammella che resta accesa anche alla chiusura della chiavetta principale e permette di riaccendere poi la lampada senza disturbare l'apparecchio. Il calore della combustione non viene comunicato al treppiede e al corpo che indirettamente per mezzo dell'aria chiusa entro due stufe cilindriche di rame poste l'una dentro l'altra concentricamente. La stufa esterna si appoggia sopra un largo disco pure di rame, sostenuto da tre colonne isolanti, sotto il quale disco si accende la fiamma; l'interna è appoggiata sopra una seconda lastra più piccola, isolata dalla prima mediante tre piedi di porcellana: ha due fori pel passaggio dei termometri destinati a dare la temperatura del corpo sottoposto a studio e porta al centro della base superiore un prisma a riflessione totale destinato ad illuminare l'interno dell'apparecchio e a rimandare i raggi all'osservatore dopo la riflessione. Entro la stufa interna sta il treppiede metallico sostenuto da un altro treppiede più piccolo di vetro. La parte essenziale dell' apparecchio si può così ritenere completamente isolata da comunicazioni metalliche, condizione favorevole ad una uniforme distribuzione della temperatura in tutti i punti del sistema.

L'illuminazione è pure fatta mediante una lampada Bunsen a fiamma incolora, nella quale si fa volatilizzare del cloruro di sodio fuso sostenuto da una piccola spirale di platino. La lampada si dispone lateralmente e se ne mandano i raggi nell' interno dell'apparecchio mediante un piccolo prisma a riflessione totale, collocato nel piano focale principale della lente, sul quale una seconda lente forma l'immagine reale della fiamma. I raggi luminosi cadendo su questo prisma, vengono riflessi orizzontalmente, attraversano una finestra praticata nella stufa esterna e chiusa da una lastra di vetro a faccie parallele, e sono quindi, dal prisma della stufa interna, proiettati verticalmente sulla superficie del corpo; indi riflessi su questa retrocedono per la medesima via e vengono a formare, a brevissima distanza del piccolo prisma esterno, una immagine delle frangie, la quale si osserva per mezzo di un cannocchiale.

Un secondo cannocchiale serve per leggere, attraverso la finestrina, le indicazioni dei termometri, i quali vengono perciò illuminati, al momento della lettura, da un'ordinaria lampada.

Tutto l'apparecchio deve esser collocato sopra sostegni ben fissi, che non abbiano oscillazioni proprie e non trasmettano all'interno le esterne; se la stabilità del sostegno non è totalmente sicura, conviene far appoggiare lo strumento sopra un grosso cuscino che serve a spegnere le piccole vibrazioni.

Unito all' apparecchio vi ha finalmente un sostegno che permette di ottenere agevolmente e di regolare le frangie mediante le viti del treppiede, prima di incominciare una serie di esperienze.

3. Prima condizione cui è necessario soddisfare per la buona riuscita delle

esperienze si è che la temperatura sia per lungo tempo mantenuta costante nella stufa interna, onde possa distribuirvisi uniformemente. Non è facile soddisfare a tale condizione con sufficiente approssimazione, in causa delle influenze esterne e principalmente delle variazioni sensibilissime che soffre la pressione del gas durante le varie ore del giorno. Alla prima causa d'incertezza abbiamo provveduto, almeno in parte, chiudendo lo spazio al di sotto del piatto di rame più grande con un manicotto di cartone, munito di qualche apertura pel passaggio dei tubi e pel maneggio della lampada, e ponendo il tutto sotto una grande vetrina chiusa; si evita così l'agitazione della fiamma e, fino ad un certo punto, la trasmissione delle variazioni della temperatura esterna. Per maggior cautela, si potrebbe porre un doppio inviluppo contenente uno strato di acqua o di ghiaccio, come fa il sig. Benoit; tale aggiunta per noi avrebbe però piccolissimo vantaggio, perchè la mancanza di un regolatore automatico della temperatura ci pose nella necessità di servirci d'una semplice chiavetta graduata a vite, per moderare l'efflusso del gas, onde compensare la seconda causa d'errore sopra notata. Quest'ultima circostanza rende le esperienze molto lunghe e faticose, poichè senza una continua ed attenta vigilanza non sarebbe possibile regolare a tempo la chiavetta secondo le indicazioni del termometro. Nè sarebbe sufficiente osservare il termometro della stufa interna, il quale, per essere isolato da ogni comunicazione diretta con corpi buoni conduttori del calore, accusa una variazione avvenuta nell'intensità della sorgente calorifica con un ritardo notevolissimo, talvolta di 15 o 20 minuti primi, durante il quale la pressione del gas può variare molto sensibilmente. È dunque utile disporre nello spazio compreso tra le due stufe un secondo termometro, pel quale naturalmente il detto ritardo riesce molto minore, e di procurare che, prima di cominciare le letture del termometro interno, per lungo tempo rimanga costante l'indicazione dell'esterno; quando si sia acquistata una certa pratica nell'uso dell'apparecchio, a questo risultato si può giungere con sufficiente approssimazione senza grande difficoltà; si può cioè ridurre la temperatura a variare entro limiti abbastanza vicini (qualche decimo di grado) nella stufa esterna, e quindi entro limiti ancora più vicini nella interna. È chiaro però che una disattenzione di qualche minuto può bastare per mandare a vuoto una esperienza già condotta a buon punto.

Questa causa d'errore è, come potremo vedere in seguito, molto maggiore di quelle che tendono ad alterare la valutazione di tutti gli altri elementi necessarî ad una determinazione, le quali, rispetto ad essa, sono pressochè trascurabili. Potendo disporre di un buon regolatore automatico della temperatura, fondato, per esempio, sulla diversa tensione massima di un vapore a diverse temperature, si evita facilmente anche questa causa d'errore.

Dilatazione del treppiede.

4. Quando si fa aumentare la temperatura del treppiede e del corpo sovrapposto, quello e questo si dilatano; la dilatazione delle viti metalliche tende ad aumentare lo spessore della lamina d'aria, quella del corpo tende a diminuirlo; quindi secondo che la prima è maggiore uguale o minore della seconda, lo spessore

aumenterà, resterà costante o diminuirà; vedremo in seguito, come si possa, dal senso del movimento delle frangie, dedurre il senso di tale variazione.

È chiaro che, per poter determinare col metodo di Fizeau la dilatazione di un corpo, bisognerà prima conoscere quella del treppiede; e, inversamente, quando fosse conosciuta la dilatazione d'un corpo, se ne potrebbe dedurre quella del treppiede. Quest'ultima si può dunque calcolare in due modi differenti: 1° determinandola direttamente coll'osservazione delle frangie che si producono nella lamina d'aria compresa tra la superficie inferiore della lente ed il piano ben levigato del treppiede; 2° deducendola dal coefficiente di dilatazione di qualche sostanza prima studiata.

Per l'applicazione del primo metodo è necessario che lo spessore della lamina d'aria che produce il fenomeno delle interferenze, sia almeno da 6 a 10 millimetri, perchè si abbia una lunghezza abbastanza grande delle viti che si dilatano. Ora, per la difficoltà, sia di dare un pulimento speculare ad una superficie di rame, sia di disporre di una sorgente luminosa conveniente, quale si richiede per la produzione delle frangie con grande differenza di cammino, non abbiamo potuto ottenere frangie nette usando spessori più grandi di due millimetri e mezzo circa.

Abbiamo dunque dovuto rinunciare al primo metodo e ricorrere al secondo, impiegando sostanze delle quali la dilatazione era già stata accuratamente studiata dal signor Fizeau col suo apparecchio. Nelle esperienze di cui, in seguito, diamo i risultati, si adoperarono due cristalli, l'uno di quarzo, l'altro di berillo. Come è noto, i cristalli, che non appartengono al sistema regolare, hanno dilatazioni diverse secondo le diverse direzioni. La dilatazione cubica dei cristalli a *tre assi* è determinata da tre valori, cioè si hanno tre dilatazioni lineari principali tra loro differenti; nei cristalli a *due* soli assi diversi, come sono appunto il quarzo ed il berillo, si hanno invece due sole dilatazioni principali, l'una secondo l'asse di simmetria, l'altra in una direzione qualunque perpendicolare a questo. Abbiamo così quattro dilatazioni lineari differenti, delle quali approfittammo per fare quattro determinazioni indipendenti del coefficiente di dilatazione del treppiede.

5. Pel calcolo delle esperienze occorre l'esatta determinazione dei seguenti elementi che entrano nelle equazioni relative:

1.° La lunghezza delle viti che si dilatano e l'altezza del corpo posto sul treppiede.

2.° La temperatura all'istante dell'osservazione.

3.° Il numero delle frangie che passano per un punto fisso in corrispondenza ad una data variazione di temperatura.

Ciascuna di queste tre determinazioni merita qualche parola.

6. *Misura delle lunghezze.* La porzione delle viti che dilatandosi produce una variazione nello spessore della lamina d'aria, è evidentemente solo quella del tratto compreso tra la faccia inferiore del cristallo e la faccia inferiore della lente, la rimanente parte, non avendo altra azione che quella di sollevare insieme tutto il sistema. La differenza tra questa lunghezza e l'altezza del cristallo è appunto uguale allo

spessore della lamina d'aria, che chiameremo e. Sarà dunque sufficiente determinare lo spessore e, e l'altezza del cristallo che indicheremo con l.

L'altezza che convien dare al cristallo ed a qualunque corpo si voglia studiare con questo apparecchio, è da 10 a 15 millimetri; lo spessore e deve essere invece molto piccolo, due o tre centesimi di millimetro.

Lo sferometro di ordinario modello è lo strumento che abbiamo adoperato per queste misure; esso ha la vite del passo di mezzo millimetro e la testa divisa in 500 parti, ciascuna delle quali corrisponde per conseguenza ad un *micron*. I numeri che più avanti riportiamo dimostrano che con questo strumento si può raggiungere una grande precisione; esso venne costruito dal Laurent.

I due cristalli di quarzo e berillo sono tagliati in forma di cubo, con faccie piane, il piano non potendo però essere perfetto, si fecero le misure su parecchi punti di ciascuna faccia; di più, per maggior sicurezza ed anche per compensare l' influenza che potrebbe avere l' imperfetto contatto tra il cristallo e la lastra di vetro sulla quale è appoggiato lo sferometro, ciascuna lunghezza si misurò due volte tenendo successivamente in alto le due faccie opposte in ciascuna direzione. Per ciascun punto la misura è ripetuta non meno di cinque volte.

Si può avere un' idea della precisione cui si può giungere in queste misure, esaminando i seguenti numeri che togliamo a caso tra le serie di letture dal registro delle esperienze. Con g, è indicato il numero di giri della vite, con p il numero di parti lette sulla testa:

g p	g p
42.36,5	42.36.2
36,5	36,1
36,6	36,1
36,2	36,3
36,3	36,5

Valore medio:

$$\overset{g}{42}.\overset{p}{36},33 \pm \overset{p}{0},04.$$

Una parte corrisponde a $0^{mm},001$; abbiamo dunque un errore probabile di soli quattro centesimi di micron in ciascuna misura, e di

$$0^{\mu},04\sqrt{2} = 0^{\mu},06.$$

nella determinazione di una dimensione che risulta dalla differenza di due misure, l'una fatta sulla faccia superiore del cristallo, l' altra sul piano dello sferometro. Nelle nostre determinazioni ogni misura della prima specie è compresa tra due della seconda, delle quali si prende il valore medio. Queste ultime sono sempre molto concordanti tra di loro, come si vede dal seguente esempio, nel quale ciascun numero risulta della media di 10:

g p	g p
42.36,33	42.36,24
36,58	36,48
36,45	37,15
36,62	36,24

Si è di più esperimentato se la lastra di vetro sulla quale è disposto il cristallo e lo sferometro, è sufficientemente piana; l' esame fatto, abbassando la vite fino a portarla a contatto col vetro, per dieci punti posti nella parte centrale dove ordinariamente si fanno le misure, diede i seguenti risultati

g p	g p
42.21,33	42.21,05
21,65	21,21
21,38	21,27
21,21	21,13
21,01	21,63

Valor medio:

$$42.\overset{g}{2}\overset{p}{1},29.$$

La massima differenza dal valor medio è di 0^p,36, quantità che non può avere nessuna influenza sui risultati,

Indichiamo con *a*, *b*, *c*, *d*, *o* i quattro angoli e il centro di ciascuna faccia, presso ai quali si sono fatte le diverse misure, con A e B le due faccie opposte in ciascuna direzione, contro cui si spingeva la vite dello sferometro. I risultati delle misure sono i seguenti:

Cristallo di quarzo

	Spessore in direzione parallela all' asse			Spessore in direzione perpendicolare all'asse	
	Faccia A	Faccia B		Faccia A	Faccia B
	mm	mm		mm	mm
a	14,080 03	14,079 61	*a*	14.619 59	14,619 22
b	14,080 71	14,080 37	*b*	14,619 63	14,619 22
c	14,078 57	14,079 51	*c*	14,621 33	14,621 64
d	14,079 01	14,079 13	*d*	14,621 33	14,621 10
o	14,079 91	14,080 05	*o*	14,620 81	14,620 70
	mm	mm		mm	mm
medie	14,079 65	14,079 73	medie	14,620 54	14,620 38

Cristallo di berillo

	Spessore in direzione parallela all' asse			Spessore in direzione perpendicolare all'asse	
	mm	mm		mm	mm
a	13,881 09	13,881 28	*a*	13,873 96	13,872 10
b	13,881 44	13,881 93	*b*	13,872 26	13,872 15
c	13,881 51	13,880 47	*c*	13,873 79	13,873 50
d	13,879 53	13,879 10	*d*	13,873 68	13,873 84
o	13,884 45	13,883 17	*o*	13,875 20	13,875 29
	mm	mm		mm	mm
medie	13,881 60	13,881 18	medie	13,873 78	13,873 38

Le differenze tra i numeri *a*, *b*, *c*, *d*, *o*, sebbene sieno piccole, non si possono attribuire ai soli errori di osservazione, che, come abbiamo notato, si limitano a pochi centesimi di micron, ma a reali differenze di spessore nei cristalli. Esaminando più attentamente quei numeri, si può anche vedere facilmente, come tutte le faccie sieno leggermente convesse; questo fatto, come vedremo, è molto importante pel nostro scopo. La convessità risulta evidente per la prima e per le due ultime misure, nelle quali il numero *o*, corrispondente al centro, è sensibilmente maggiore degli altri, lo si vede anche per la seconda, considerando che le medie tra *a* e *c*, e tra *b* e *d*, estremi delle due diagonali di ciascuna faccia sono entrambe minori di *o*.

Le medie scritte sopra non possono essere considerate come medie di misure fatte su una medesima quantità, onde il loro error medio non si può dedurre dai residui di ciascuna determinazione; lo dedurremo invece dalla media tra i due numeri ottenuti per le faccie A e B, i quali non differiscono che di pochi decimi di micron. L'errore così calcolato risulterà alquanto superiore a quello dato sopra per una determinazione, poichè non si può assicurare che i punti presi sulle due faccie opposte si corrispondano perfettamente. Abbiamo in tal modo i seguenti valori per le dimensioni misurate:

Cristallo di quarzo	parallelamente all'asse	. . .	mm.	14,079 69
» »	perpendicolarm. »	. . .	»	14,620 46
» di berillo	parallelamente »	. . .	»	13,881 39
» »	perpendicolarm. »	. . .	»	13,873 58

l'error probabile di ciascun valore è in media di circa

$$\pm 0^{mm},000\ 09 .$$

Quanto precede dimostra che anche coll'ordinario sferometro, quando non si trascurino le necessarie cautele, si può raggiungere una grande precisione. Dopo una lunga serie di misure si deve però aver l'avvertenza di esaminare lo stato delle punte su cui si appoggia lo strumento; in causa dei ripetuti scorrimenti che, ad ogni lettura si fanno subire alle tre punte sul piano di vetro smerigliato, queste a poco a poco si smussano molto sensibilmente, come si può giudicare dalle traccie nere lasciate sul piano stesso; in tal modo lo strumento viene ad appoggiarsi in tre piccoli piani invece che in tre punti e diventa molto più pigro e meno preciso. Prima di cominciare una nuova serie di misure conviene dunque correggere questo deterioramento.

7. Le misure sul cristallo di quarzo furono eseguite alla temperatura di 24°, quelle sul cristallo di berillo alla temperatura di 26°. A noi conviene conoscere le dimensioni a 0°; perciò dobbiamo tener conto tanto della dilatazione del cristallo, quanto di quella della vite di acciajo dello sferometro. Prenderemo i seguenti valori dati dal Fizeau pei coefficienti medî di dilatazione tra 0° e 100:

Acciajo	0,000 011 12
Quarzo parallelo all'asse	0,000 007 99
» perpend. »	0,000 014 43
Berillo parallelo »	—0,000 000 95
» perpend. »	0,000 00 170

Indicando con c_0 lo spessore del cristallo a 0°, con c il numero trovato alla temperatura t, con α_c ed α_a i coefficienti di dilatazione del cristallo e dell'acciajo, il valore ridotto sarà dato dalla formula:

$$c_0 = c \frac{1 + \alpha_a t}{1 + \alpha_c t}$$

o approssimativamente da:

$$c_0 = c - ct (\alpha_c - \alpha_a)$$

Le correzioni risultano così:

mm
+ 0,001 05
— 0,001 16
+ 0,004 35
+ 0,003 40

Ed i quattro valori delle altezze, ridotti a 0°, sono:

mm. 14,080 74
14,619 30
13,885 74
13,876 98.

8. Resta finalmente un'ultima correzione relativa al valore del passo della vite che abbiamo fin qui supposto uguale esattamente a mezzo millimetro.

La verifica della vite fu fatta mediante un comparatore Gambey nel modo seguente. Ad un'estremità del banco fu fissato un sostegno speciale, appositamente costruito, sul quale può venir stabilito orizzontalmente ed a breve distanza dal piano del banco, lo sferometro, col suo asse parallelo alle guide del carretto del comparatore, analogamente alla vite micrometrica che forma parte del comparatore stesso. Contro l'estremità della vite si pone la testata d'un metro di ottone, suddiviso in millimetri di valore accuratamente determinato per tutta la sua lunghezza. Il passo della vite si paragona con uno o con parecchi di questi millimetri, puntando sui tratti del metro col microscopio del comparatore, e facendo avanzare il metro per mezzo della vite dello sferometro. Con questo metodo, diversamente applicato, si fecero quattro serie di confronti. Nella prima e terza si sono confrontati i passi a dieci a dieci tutti coi medesimi cinque millimetri, sopra ai quali si riconduceva sempre il microscopio, mediante la vite di trazione che serve a dare i piccoli movimenti al carretto; nella quarta si passi a due a due sempre con un medesimo millimetro, e nella seconda pure a due a due con millimetri diversi. Le differenze si leggevano in millesimi di millimetro sulla testa stessa dello sferometro.

Da tutti i risultati così ottenuti, deduciamo i valori in millimetri dei passi a dieci a dieci come son dati dai quattro confronti. Nei numeri che qui riportiamo è già tenuto conto della correzione da attribuirsi a ciascun millimetro del metro:

Passi della vite	Valore in millimetri. I Confronto	II Confronto
80—70	4,9887	4,9981
70—60	4,9916	4,9741
60—50	4,9970	5,0032
50—40	4,9947	4,9888
40—30	4,9930	4,9857
30—20	4,9887	4,9817
20—10	4,9936	4,9936
	Media 4,9924	Media 4,9893

	III Confronto	IV Confronto
75—65	4,9969	4,9930
65—55	4,9957	4,9908
55—45	4,9935	4,9886
45—35	4,9962	4,9902
35—25	4,9924	4,9819
25—15	4,9874	4,9847
	Media 4,9937	Media 4,9870

Ricaviamo pel valor medio in millimetri di due passi della vite, i quattro risultati seguenti:

	mm
I	0,998 48
II	0,997 74
III	0,998 74
IV	0,997 40

Le osservazioni da cui sono dedotti questi numeri si possono ritenere abbastanza concordanti fra di loro. Le quattro determinazioni non hanno però tutte ugual peso, perchè nella prima e terza il termine di confronto era un intervallo di cinque millimetri, nelle altre di un millimetro solo. Ora, la correzione di ciascun millimetro ha, in media, un errore medio ε, la puntata nelle nostre osservazioni un certo errore ε_1, quindi nel primo caso si commette su cinque millimetri un solo errore ε_1, nel secondo caso, sui cinque millimetri, se ne commettono 5, avremo dunque, indicando con c la correzione trovata per cinque millimetri, nel 1° caso:

$$5^{mm} = 10^p + c \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 + 5\varepsilon^2}$$

nel secondo:

$$5^{mm} = 10^p + c' \pm \sqrt{5(\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2)}\,.$$

Supponendo, come è lecito, $\varepsilon = \varepsilon_1$, potremo dare alle diverse determinazioni pesi inversamente proporzionali ai quadrati degli errori medî, cioè il peso 10 alla prima e terza, il peso 6 alla 2ª e 4ª. Di più la 1ª e la 2ª risultano da 7 misure, la 3ª e 4ª da 6; i pesi da attribuirsi sono così definitivamente:

$$7,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 4.$$

Tenuto conto di questo, abbiamo per valore medio di due passi:

$$2^p = 0^{mm},9982 \pm 0^{\mu},2.$$

Il piccolo errore che potrebbe provenire dal difetto di orizzontalità della vite non ha influenza sensibile su questo risultato.

La temperatura dell'aria durante le esperienze era di 21°; per la riduzione a 0°, prendendo come coefficienti di dilatazione dell'acciajo e dell'ottone rispettivamente

$$\alpha = 0{,}000011$$

$$\beta = 0{,}000019,$$

troviamo la correzione:

$$-t(\alpha - \beta) = +0{,}000\ 17;$$

onde avremo definitivamente:

$$2'' = 0^{mm},9984 \pm 0'',2.$$

I numeri ottenuti nel precedente paragrafo vanno moltiplicati per questo valore, poichè in essi si era supposto 2' = 1; i risultati sono i seguenti:

Cristallo di quarzo	parallelamente all'asse	. . .	mm.	14,0568
» »	perpendicolarm. »	. . .	»	14,5944
» di berillo	parallelamente »	. . .	»	13,8621
» »	perpendicolarm. »	. . .	»	13,8534.

L'errore probabile, in causa dell'incertezza nel valore del passo, diventa molto maggiore ($0^{mm},0028$); vedremo in seguito che, ciò nonostante, esso ha sui risultati un' influenza trascurabile.

9. L'altra lunghezza da misurare è lo spessore della lamina d'aria. Per eseguire questa determinazione, terminata una serie di esperienze si porta il treppiede col cristallo sul piatto dello sferometro, dopo aver sostituito alla lente piano-convessa una lastrina piana di vetro a facce parallele, di spessore conosciuto, e si fa una misura sulla faccia superiore della lastrina, indi, tolta quest'ultima, se ne fa una seconda sulla faccia superiore del cristallo; la differenza delle due dà lo spessore complessivo della lamina d'aria e della lastrina di vetro.

Nel nostro caso la media di numerose osservazioni, fatte collo sferometro Laurent, ha dato per lo spessore della lastrina:

$$3^{mm},9769 \pm 0{,}0008.$$

L' errore probabile di questo risultato è assai maggiore di quello trovato nelle determinazioni analoghe fatte sui cristalli, perchè allo sferometro si dovettero applicare dei piedi di acciaio molto più lunghi degli ordinarî, il che rende lo strumento più pigro; tuttavia anche questa causa di errore si può ritenere trascurabile.

10. *Misura delle temperature.* I termometri sono introdotti verticalmente nella stufa interna per due fori praticati nella sua parete superiore, e si ripiegano orizzontalmente all'esterno, cioè nello spazio compreso tra le due stufe. L'uso di due termometri è utile come controllo dell'esattezza delle correzioni; noi però non abbiamo potuto adoperarne che un solo: esso è diviso in gradi da -1^0 a $+101^0$; ciascun grado è lungo circa $0^{mm},8$ e, col cannocchiale, se ne può valutare il decimo con sufficiente precisione.

Si presenta qui la questione di dedurre dalle indicazioni del termometro il vero valore della temperatura, questione che ha la massima importanza in questo,

come in molti altri generi di ricerche, ma che forse non ha ancora avuto una soluzione completa. Per le ragioni che esporremo non abbiamo creduto di dover seguire il metodo di correzione adottato dal dott. Benoit nella citata Memoria. Ci siamo invece limitati a fare, al principio ed alla fine di ciascuna serie di esperienze, una determinazione del 100 del termometro mediante il solito apparecchio, ed un confronto alla temperatura dell'ambiente, compresa tra 20⁰ e 24⁰, con un buon termometro campione diviso in quinti di grado, che non veniva mai sottoposto a forti variazioni di temperatura. E, perchè tali verifiche potessero essere abbastanza frequenti, abbiamo preferito fare numerose serie di esperienze, anzichè fare un gran numero di esperienze in una medesima serie.

La seguente tabella dà le correzioni ottenute in questo modo:

Data	Correzione del termometro		Differenza	Correzione media	Spostamento della scala
	a 100°	tra 20° e 24°			
1-3 giugno	+ 0°,50	+ 0°,51	— 0°,01	+ 0°,50	+ 0°,27
8-10 »	0,80	0,75	+ 0,05	0,77	+ 0,04
22 »	0,84	0,78	+ 0,06	0,81	+ 0,30
27 »	1,14	1,08	+ 0,06	1,11	— 0,03
2-3 luglio	1,05	1,10	— 0,05	1,08	+ 0,18
7 »	1,22	1,30	— 0,08	1,26	± 0,00
13 »	1,25	1,27	— 0,02	1,26	+ 0,14
20 »	1,39	1,40	+ 0,01	1,40	+ 0,11
27 »	1,51	1,51	± 0,00	1,51	+ 0,09
7 novembre	—	1,60	—	1,60	

Nella quarta colonna sono scritte le differenze tra le correzioni trovate alle due diverse temperature, nella quinta la media tra queste correzioni e nell' ultima le variazioni avvenute tra due determinazioni successive, che comprendono sempre una serie di esperienze.

Queste variazioni, come si vede, non hanno mai superato 0°,30, ed abbiamo ragione di credere che esse, anzichè ad alterazioni nello stato del vetro, si debbano piuttosto ad una parziale condensazione del vapore di mercurio durante il raffreddamento dell'apparecchio. Infatti, osservando con un microscopio la piccola camera superiore del termometro, si è sempre visto che vi erano goccioline minute di mercurio; il volume totale di queste goccioline andava successivamente aumentando ad ogni nuova serie di esperienze, finchè, terminate tutte queste, cioè dopo il giorno 7 novembre, si potè verificare che in totale il volume del mercurio rimasto nella camera superiore, era appunto equivalente alla lunghezza di circa 1⁰,6, cioè al valore dell'ultima correzione determinata.

Non è difficile persuadersi che la condensazione del vapore di mercurio possa avere un così considerevole effetto, quando si ponga mente al modo con cui varia la temperatura nell'apparecchio che stiamo studiando ed alla particolare disposizione del termometro in esso. Infatti durante il primo periodo di riscaldamento tutto il cannello del termometro e la sua camera superiore raggiungono la temperatura più elevata prima del bulbo; tutto lo spazio libero resta così saturo di vapor di mercurio

alla tensione massima corrispondente a quella temperatura. Ma allorchè al periodo di riscaldamento succede quello di raffreddamento, la parte del termometro che rimane fuori della stufa interna si raffredda prima della parte rimanente, e tale anticipazione, come abbiamo detto sopra (v. n.° 3), è molto sensibile; ne segue che, durante tutto il tempo in cui la temperatura diminuisce, si produce una distillazione continua del mercurio dal bulbo verso la camera superiore.

Le piccole goccioline di mercurio non possono da sè ricadere nel cannello perchè rimangono aderenti alle pareti e perchè la parte superiore del termometro è disposta orizzontalmente; anzi riesce sempre molto difficile il farle ricongiungere col mercurio rimanente, ragione per cui tra una esperienza e l'altra noi le abbiamo lasciate nella camera superiore.

Durante i successivi periodi di riscaldamento e di raffreddamento il fenomeno si riproduce nello stesso modo; le piccole gocce prima esistenti si evaporano in parte, ma è chiaro che, ad ogni raffreddamento, il volume totale di esse tende ad aumentare. Questo volume dopo un certo numero di variazioni nella temperatura è senza dubbio funzione non solo della temperatura attuale, ma anche del tempo e del modo con cui è avvenuto il raffreddamento; riesce pertanto estremamente difficile, e forse assolutamente impossibile, determinare la legge con cui varia la quantità di mercurio contenuta nella camera superiore e quindi la correzione da applicarsi alle indicazioni del termometro per ogni singola temperatura. Così nel far la correzione delle letture, abbiamo creduto inutile tener conto dei risultati delle esperienze eseguite dal sig. Pernet ([1]) sullo spostamento dei punti fissi nei termometri. Abbiamo invece applicato le correzioni medie come sono date dalla 5ª colonna della precedente tabella, ammettendo, come unica approssimazione possibile, che durante una serie di esperienze le variazioni fossero avvenute secondo una legge lineare.

Dall'esame del termometro di cui ora abbiamo parlato risulta che nelle esperienze, per ciò che si riferisce alla suddetta correzione, come per ciò che riferisce alla lettura, si può avere con sicurezza il decimo di grado, ma non più in là; tuttavia, nei numeri che più avanti sono riportati, stanno scritti anche i centesimi, perchè generalmente ciascuno risulta dalla media di parecchie letture. Talvolta anche il detto limite di precisione si può raggiungere difficilmente in causa delle irregolari refrazioni prodotte dal vetro del cannello in prossimità dei tratti incisi, conviene perciò procurare sempre che l'estremità della colonnetta di mercurio non vada a cadere in quei punti; l'errore che ne potrebbe derivare raggiunge spesso due decimi di grado ed anche più.

Osserveremo in fine che i numeri scritti nella quarta colonna della tabella ci mostrano che possiamo ritenere costante la lunghezza della colonna di mercurio corrispondente all'intervallo delle temperature esaminate; la media di quei numeri infatti è nulla, e nessuno di essi è superiore agli errori che si possono commettere nelle letture necessarie per i confronti (circa $0^0{,}02$ o $0^0{,}03$).

11. *Misura dello spostamento delle frange.* Coi nostri cristalli di quarzo e di berillo le frange di interferenza si producono colla massima facilità e risultano

([1]) V. il citato volume: *Travaux et Mémoires du Bureau intern. des poids et mésures.*

perfettamente definite, tantochè per regolare le viti del treppiede riesce superfluo l'uso dell'apparecchio a ciò destinato. La disposizione e, fino ad un certo punto, la forma delle frange, sono in nostro arbitrio; l'esperienza insegna entro qual limite di larghezza convenga tenerle perchè se ne possano valutare esattamente le frazioni, un soverchio allargamento essendo a scapito della chiarezza.

In pratica conviene che la superficie riflettente sia resa, per quant'è possibile, piana, la leggera convessità che si ottiene, anche non volendolo, essendo sufficiente per la produzione del fenomeno. Ne risulta naturalmente che le frange non hanno l'apparenza di anelli chiusi, ma si presentano in forma di zone sensibilmente parallele.

Abbiamo già detto nel n.° 1, che se la superficie superiore del cristallo è convessa il movimento delle frange avviene verso il loro centro di curvatura quando la distanza tra le due superficie aumenta, e verso la periferia quando diminuisce. Se la superficie fosse invece concava il fenomeno avverrebbe in senso inverso. Le misure fatte collo sferometro (v. n.° 6) ci rendono dunque avvertiti che un movimento delle frange verso il loro centro di curvatura nel periodo di riscaldamento, è indizio d'un allontanamento delle due superficie, cioè della prevalenza della dilatazione del rame su quella del cristallo: del resto per noi non poteva esservi alcun dubbio, perchè questa prevalenza ci era già nota. Se però in altri casi qualche dubbio rimanesse, per esempio quando dalle misure di spessore non risultasse evidente la convessità della superficie, oppure quando le frange fossero o molto irregolari o quasi rettilinee, prima di cominciare una serie di esperienze, converrebbe provocare il movimento delle frange, dando alle viti dei piccoli movimenti di rotazione, e tener conto nello stesso tempo del senso dello spostamento e di quello della variazione subìta dallo spessore della lamina d'aria. Tale osservazione poi potrà sempre servire per accertarsi che la lente di vetro non tocca in nessun punto il cristallo, poichè se tale contatto vi fosse, la rotazione inversa di una almeno delle viti non produrrebbe nessun movimento nelle frange.

La posizione e il movimento delle frange si riferiscono ad un punto fisso della lente, punto che viene inciso su di essa; ma per ottenere maggior precisione, se ne incidono invece parecchî: nelle nostre esperienze si è fatto uso di due lenti delle quali l'una porta 18 e l'altra 23 punti, disposti regolarmente in modo da formare i vertici di triangoli equilateri.

Aggiustando convenientemente il cannocchiale, si vedono contemporaneamente nel campo le frange ed i punti, e, se la temperatura è variabile, si nota nelle prime un lento movimento che, per un dato corpo, ha un senso o l'altro secondo il senso della variazione. Le frange così vanno man mano scomparendo da una parte quando sono giunte al limite della faccia riflettente, e dalla parte opposta ne sopraggiungono altrettante come se davanti all'osservatore si muovesse una estesa superficie coperta di righe gialle e nere, della quale fosse illuminata solo una piccola porzione che, in ogni istante, sta nel campo del cannocchiale. A tutte queste righe possiamo così assegnare un numero d'ordine a partire da un' origine qualunque posta anche fuori del campo, ma scelta in modo che durante una serie di esperienze, nessuna frangia che si registra, porti un numero negativo. La differenza tra il numero f_0 della frangia

passante pel punto medio alla temperatura t_0 e il numero f_1 di quella che occupa la medesima posizione alla temperatura t_1, rappresenta il numero di frange passate per la variazione $t_1 - t_0$. Supponendo $t_1 > t_0$ conviene che $f_1 - f_0$ sia un numero positivo quando la lamina d'aria aumenta di spessore e negativo quando diminuisce; perciò basta che l'origine arbitraria della numerazione venga posta verso il centro di curvatura delle righe in entrambi i casi. Nei numeri f_1 ed f_0 sono comprese, s'intende, anche le frazioni di frangia che si leggono ad occhio, potendosi valutare facilmente il decimo od anche il ventesimo dell'intervallo tra due linee nere successive. Quanto al numero intero, non è necessario determinarlo ad ogni esperienza, ma basta fare due o tre determinazioni preliminari per un ampio intervallo di temperatura, dalle quali si deduce con sufficiente approssimazione lo spostamento medio delle frange per la variazione di 1^0 nella temperatura stessa; in questa guisa, quando si è attribuito alle frange il numero d'ordine per la più bassa delle temperature osservate, si possono immediatamente ottenere i numeri interi da attribuirsi per tutte le altre temperature.

È inutile avvertire che prima di fare una lettura definitiva è necessario che le frange si siano completamente fermate, per il che la temperatura nell' interno dell'apparecchio deve essersi mantenuta costante almeno un pajo d'ore e ridotta uniforme in tutte le parti.

12. La precisione nella lettura è naturalmente variabile colla nitidezza delle frange, colla loro larghezza ed anche molto sensibilmente colla disposizione dei punti di riferimento rispetto ad esse; per distinguere nettamente la posizione di tutti i punti di riferimento conviene, nel disporre la lente, procurare che le rette secondo le quali essi sono disposti non vengano a coincidere colla direzione delle righe; la stessa posizione relativa, si conserverà durante tutta una serie di esperienze, perchè, astrazion fatta dal loro lento movimento, le frange conservano sempre l' identico aspetto.

Se supponiamo che lo spessore del cristallo sia uniforme e le altezze delle tre viti siano uguali, quando la temperatura subisce una certa variazione per ciascuno dei punti di riferimento deve passare un ugual numere di frange. Avremo così tante determinazioni della stessa quantità quanti sono i punti di riferimento, dalle quali potremo calcolare l'error probabile di ciascuna di esse e quello della loro media. La medesima operazione si può ripetere per tutte le esperienze appartenenti ad una medesima serie e combinate a due a due. Il calcolo si fece per esteso su tutti i numeri della prima serie di esperienze, che fornì 648 valori degli scostamenti dalle medie, così distribuiti secondo la loro grandezza:

		f		f
277	compresi tra	0,00	e	0,02
167	»	0,02	»	0,04
100	»	0,04	»	0,06
51	»	0,06	»	0,08
32	»	0,08	»	0,10
15	»	0,10	»	0,12
6	»	0,12	»	0,14

I numeri scritti nella prima colonna concordano sufficientemente colla legge di distribuzione degli errori accidentali conveniente al principio della media aritmetica.

Se ne deduce per ciascuna determinazione un error probabile di $0^f,032$, e ogni determinazione essendo il risultato della differenza tra due puntate, l' error probabile di ciascuna puntata sarà:

$$\frac{0,032}{\sqrt{2}} = 0,023\,;$$

e quello della media di 18 puntate:

$$\frac{0,023}{\sqrt{18}} = 0,006\,.$$

Anche per ciascuna delle altre serie si fece il medesimo calcolo su non meno di 100 valori scelti a caso. Abbiamo così ottenuto:

Serie	Errore probabile di una puntata	Errore probabile della media di 18 o 23
I^a	0,023	0,006
II^a	0,021	0,005
III^a	0,019	0,005
IV^a	0,044	0,010
V^a	0,031	0,007
VI^a	0,036	0,009
VII^a	0,054	0,013
VIII^a	0,039	0,006
Medie:	0,033	0,008

Come si vede, per quanto riguarda la lettura, i valori medî si possono ritenere sicuri fino al centesimo di frangia ed anche più oltre. Sarebbe inutile, nel nostro caso, volere spingere al di là di questo limite la precisione nelle letture; ogni vantaggio sarebbe completamente illusorio in causa della dilatazione orizzontale del piano di rame su cui si appoggia il cristallo. La differenza tra la dilatazione del rame e quella del vetro può produrre degli spostamenti orizzontali nella lente pianoconvessa, e quindi nei punti di riferimento rispetto alle frange; non sarebbe possibile di sottoporre a calcolo le conseguenti anomalie: anche per questa ragione il metallo che più conviene per la costruzione del treppiede è il platino, perchè ha un coefficiente di dilatazione pochissimo differente da quello del vetro.

13. *Calcolo delle esperienze.* Sia λ la lunghezza d'onda della luce del sodio, f_0 la puntata media delle frange (cioè la media delle letture fatte in corrispondenza a tutti i punti di riferimento) alla temperatura iniziale t_0, f_1 quella alla temperatura finale t_1; e_0, e_1 sieno gli spessori della lamina d'aria alle suddette temperature; $f_1 - f_0$ sarà il numero delle frange corrispondenti alla variazione $t_1 - t_0$ ed

$$(f_1 - f_0)\frac{\lambda}{2} = e_1 - e_0 \tag{1}$$

sarà la variazione nello spessore della lamina d'aria, espressa in millimetri poichè λ è dato in millimetri.

Siano l_0, l_1, L_0, L_1 rispettivamente le altezze del cristallo e delle viti alle due temperature t_0 e t_1; le lunghezze L, come si è detto, sono le distanze dal piano su cui si appoggia il cristallo alle punte che sostengono la lente. Indichiamo con α_c e con α_v i coefficienti medî di dilatazione del cristallo e delle viti tra t_0 e t_1. Lo spessore della lamina d'aria a t_0 sarà:

$$e_0 = L_0 - l_0 ;$$

ed a t_1:

$$e_1 = L_1 - l_1 = L_0 [1 + \alpha_v (t_1 - t_0)] - l_0 [1 + \alpha_c (t_1 - t_0)] ;$$

se ne deduce:

$$e_1 - e_0 = (t_1 - t_0) (L_0 \alpha_v - l_0 \alpha_c) ;$$

e quindi:

$$\frac{\lambda}{2} (f_1 - f_0) = (t_1 - t_0) (L_0 \alpha_v - l_0 \alpha_c). \tag{2}$$

Da questa equazione si ricava α_v od α_c secondo che è noto α_c od α_v.

La lunghezza L_0 è data dalla relazione:

$$L_0 = e_0 + l_0$$

dove per l_0 si devono prendere i valori dedotti da quelli dati al n.° 6, e per e_0 i valori trovati per ciascuna serie; per questi ultimi in causa della loro piccolezza, è inutile far la correzione relativa alla temperatura.

Una correzione deve essere fatta a causa della variazione dell' indice di rifrazione dell'aria colla temperatura e la pressione, ossia colla densità. Nel nostro caso essa ha pochissima importanza perchè la lamina d'aria è così sottile da non comprendere più di trenta o quaranta lunghezze d'onda, ma diviene molto considerevole quando si voglia determinare direttamente la dilatazione del treppiede, nel qual caso lo spessore della lamina comprende parecchie migliaia di lunghezze d'onda.

L'indice di rifrazione dell'aria diminuisce al diminuire della densità, cioè, supponendo costante la pressione, all'aumentare della temperatura; la lunghezza d'onda per conseguenza aumenta. Ora, è evidente che il valore della semi-lunghezza d'onda col quale si misura una variazione di spessore rivelata dallo spostamento di una intera frangia di interferenza, è quello corrispondente allo stato dell'aria nel quale è fatta l'osservazione. Con $\frac{\lambda}{2}$ noi abbiamo invece indicato il numero 0,0002944 che corrisponde alla temperatura di 0^0 e alla pressione di 760^{mm}, onde, introducendo senz'altro questo valore nella equazione (2), commetteremmo un errore che deve essere corretto.

Indichiamo in generale con m lo spessore della lamina d'aria, misurato in semilunghezze d'onda; avremo, in millimetri:

$$e_1 = m_1 \frac{\lambda_1}{2} ,$$

$$e_0 = m_0 \frac{\lambda_0}{2} ,$$

dove gli indici 0 ed 1 caratterizzano lo stato dell'aria nell'istante dell'osservazione. Per la variazione $t_1 - t_0$ nella temperatura, abbiamo nello spessore la variazione:

$$(3) \qquad e_1 - e_0 = m_1 \frac{\lambda_1}{2} - m_0 \frac{\lambda_0}{2}$$

ed è chiaro che sarà:

$$(4) \qquad m_1 - m_0 = f_1 - f_0$$

perchè, ad ogni variazione di mezza lunghezza d'onda, corrisponde in qualunque caso, lo spostamento d'una intera frangia.

Indichiamo in generale con n_h e con d_h rispettivamente l'indice di refrazione e la densità dell'aria nello stato fisico h ed in particolare cogli stessi simboli non affetti da nessun indice, i valori delle stesse quantità a 0° e 760^{mm}. Abbiamo allora:

$$(a) \qquad \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n}, \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{n_0}{n}$$

$$(b) \qquad \frac{n_1 - 1}{d_1} = \frac{n - 1}{d} = \frac{n_0 - 1}{d_0}.$$

Dalla prima delle (a) si deduce:

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{n_1 - n}{n},$$

ossia:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1}{2} \frac{n_1 - n}{n}.$$

Essendo n pochissimo differente dall'unità potremo porre approssimativamente:

$$(c) \qquad \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1}{2} (n_1 - n).$$

Dalla prima delle (b) deduciamo:

$$n_1 - 1 = (n - 1) \frac{d_1}{d}$$

e quindi:

$$n - n_1 = (n - 1) \left(1 - \frac{d_1}{d}\right).$$

Per una coincidenza fortuita $n - 1$ è eguale a 0,0002943, cioè numericamente a $\frac{\lambda}{2}$, onde:

$$n - n_1 = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{d_1}{d}\right).$$

La (c) dà quindi:

$$\frac{\lambda_1}{2} = \frac{\lambda}{2} \left[1 + \frac{\lambda_1}{2} \left(1 - \frac{d_1}{d}\right)\right].$$

Analogamente si avrà:

$$\frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda}{2} \left[1 + \frac{\lambda_0}{2} \left(1 - \frac{d_0}{d}\right)\right].$$

Sostituendo nella (3), otteniamo:

$$e_1 - e_0 = \frac{\lambda}{2} \left\{ \left[m_1 + m_1 \frac{\lambda_1}{2} \left(1 - \frac{d_1}{d}\right) \right] - \left[m_0 + m_0 \frac{\lambda_0}{2} \left(1 - \frac{d_0}{d}\right) \right] \right\},$$

ossia:

$$e_1 - e_0 = \frac{\lambda}{2} \left\{ \left[m_1 + e_1 \left(1 - \frac{d_1}{d}\right) \right] - \left[m_0 + e_0 \left(1 - \frac{d_0}{d}\right) \right] \right\};$$

e, per la (4)

$$e_1 - e_0 = \frac{\lambda}{2} \left\{ \left[f_1 + e_1 \left(1 - \frac{d_1}{d}\right) \right] - \left[f_0 + e_0 \left(1 - \frac{d_0}{d}\right) \right] \right\}.$$

Questa è la forma corretta dell'equazione (1); come si vede la correzione equivale ad aggiungere a ciascun numero f_i osservato la quantità:

$$c_i = e_i \left(1 - \frac{d_i}{d}\right).$$

Le variazioni di e_i essendo sempre piccolissime potremo, con sufficiente approssimazione, tenere sempre un medesimo valore per e_i, valore che rappresenteremo con e.

Indicando con A la pressione atmosferica in millimetri, con α il coefficiente di dilatazione dell'aria secca (') e con t la temperatura, potremo porre:

$$c_i = e_i \left[1 - \frac{A}{760\,(1 + \alpha t)} \right].$$

I valori della quantità tra parentesi sono dati di cinque in cinque millimetri di pressione e di cinque in cinque gradi di temperatura da una tabella a doppia entrata calcolata dal dott. Benoit e riportata nella citata Memoria.

Ai numeri dati dalle nostre esperienze abbiamo sempre applicata questa correzione, sebbene nella massima parte dei casi essa si possa ritenere trascurabile; infatti giunge a $0^f,01$ solo per qualche esperienza della quinta serie, nella quale lo spessore della lamina d'aria risultò relativamente grande ($0,^{mm}048$).

14. Il calcolo delle esperienze di ciascuna serie fu eseguito col metodo dei minimi quadrati, esprimendo il valore d'una lunghezza ad una data temperatura mediante la solita formula a due coefficienti che vale generalmente pei corpi solidi. Perciò nella (2) fu posto:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \alpha_v &= a_v + b_v\,(t_1 - t_0) \\ \alpha_c &= a_c + b_c\,(t_1 - t_0) \end{aligned}$$

e quindi:

$$\frac{\lambda}{2}(f_1 - f_0) = (L_0 a_v - l_0 a_c)\,(t_1 - t_0) + (L_0 b_v - l_0 b_c)\,(t_1^2 - t_0^2),$$

nella quale i simboli f esprimono i numeri di frange già corretti nel modo suddetto.

Per $t_0 = 0^0$ si ha:

$$\frac{\lambda}{2}(f_1 - f_0) = (L_0 a_v - l_0 a_c)\,t_1 + (L_0 b_v - l_0 b_c)\,t_1^2$$

(') L'aria interna è mantenuta secca dalla potassa contenuta in una piccola capsula.

dove f_0 rappresenta la puntata media che si sarebbe ottenuta facendo l'esperienza a 0°. Ne deduciamo:

$$f_1 = f_0 + \frac{2}{\lambda}(L_0 a_v - l_0 a_c) t_1 + \frac{2}{\lambda}(L_0 b_v - l_0 b_c) t_1^2 .$$

Se poniamo:

$$(6) \quad \begin{cases} x = f_0 \\ y = \frac{2}{\lambda}(L_0 a_v - l_0 a_c) \\ z = \frac{2}{\lambda}(L_0 b_v - l_0 b_c), \end{cases}$$

avremo per le varie esperienze di una medesima serie il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} f_1 &= x + t_1 y + t_1^2 z \\ f_2 &= x + t_2 y + t_2^2 z \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

I valori più probabili delle incognite x, y, z sono dati dalle tre equazioni normali:

$$\begin{aligned} nx + [t]y + [t^2]z &= [f] \\ [t]x + [t^2]y + [t^3]z &= [tf] \\ [t^2]x + [t^3]y + [t^4]z &= [t^2 f] \end{aligned}$$

dove n rappresenta il numero di esperienze di cui si compone la serie.

Risolute queste equazioni, le (6) ci daranno i valori di a_v e b_v nella forma seguente:

$$\begin{aligned} a_v &= \frac{1}{L_0}\left(l_0 a_c + \frac{\lambda}{2} y\right) \\ b_v &= \frac{1}{L_0}\left(l_0 b_c + \frac{\lambda}{2} z\right), \end{aligned}$$

le quali, ricordando che si ha:

$$L_0 = l_0 + e ,$$

danno infine:

$$(7) \quad \begin{aligned} a_v &= a_c + \frac{\lambda y}{2(l_0 + e)} - \frac{e a_c}{l_0 + e} \\ b_v &= b_c + \frac{\lambda z}{2(l_0 + e)} - \frac{e b_c}{l_0 + e}. \end{aligned}$$

15. Abbiamo già veduto quale precisione si possa raggiungere nella determinazione dei diversi elementi che entrano nel calcolo delle esperienze. Dagli errori probabili proprî di questi elementi possiamo ora dedurre l'errore probabile del risultato finale. Però non possiamo tener conto degli errori di cui sono affetti i numeri a_c e b_c, perchè i relativi errori medî non si possono dedurre dai dati di Fizeau: noi inoltre trascureremo gli errori medî dei termini $\frac{e a_c}{l_0 + e}$ e $\frac{e b_c}{l_0 + e}$ che sono insignificanti.

In tal modo dalle (7) deduciamo:

$$\Delta a_v = \frac{\lambda y}{2(l_0+e)} \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta (l_0+e)}{l_0+e}\right)^2}.$$

Il secondo termine sotto al radicale, ponendo come abbiamo dedotto al n.° 8,

$$\Delta l_0 = 4^{\mu},2 \qquad \Delta e = 1^{\mu},0$$

risulta trascurabile relativamente al primo quale è dato dalle equazioni normali; abbiamo infatti al più $\frac{\Delta (l_0+e)}{l_0+e} = 0{,}0004$, mentre è $\frac{\Delta y}{y} = 0{,}005$ almeno; così pure in Δb_v si ha $\frac{\Delta z}{z}$ almeno di 0,07. Resta così semplicemente:

$$\Delta a_v = \frac{\lambda \Delta y}{2(l_0+e)},$$

$$\Delta b_v = \frac{\lambda \Delta z}{2(l_0+e)}.$$

Gli errori medî Δy e Δz dipendono dagli errori nella determinazione delle temperature, da quelli nella lettura delle frange, e da tutte le altre cause perturbatrici che si possono verificare durante una serie di esperienze e si deducono dalle equazioni del peso. L' errore medio dell'unità di peso, che nelle tabelle numeriche è indicato con r, non è generalmente molto forte, tuttavia varia sensibilmente da una serie all'altra; perciò abbiamo creduto opportuno di attribuire ai numeri dedotti dalle diverse serie di esperienze, un peso inversamente proporzionale al quadrato del relativo loro errore probabile.

16. Finiremo con qualche cenno generale sul modo di condurre le esperienze. Disposto l'apparecchio nel modo sopra descritto, per mezzo della lampada a gas si eleva lentamente la temperatura, finchè il termometro interno dia un' indicazione superiore alla temperatura massima che si vuol raggiungere nella serie; ciò per eliminare l'influenza dei piccoli movimenti che si possono verificare durante il primo riscaldamento. Si lascia poi raffreddare completamente l' apparecchio, oppure si arresta il raffreddamento ad un certo punto, in corrispondenza del quale si fa una puntata delle frange, notando i decimi e centesimi relativi a ciascun punto e la temperatura a cui si è arrestato il termometro; ciò fatto si lascia proseguire il raffreddamento. La seconda osservazione si fa alla temperatura dell'ambiente, della cui costanza bisogna assicurarsi mediante letture del termometro interno, ripetute ad intervalli non minori di mezz'ora. Indi si riscalda fino ad una temperatura elevata, notando, per due o tre punti di riferimento ad una ad una le frange che passano nel campo del cannocchiale. Quando la temperatura voluta sarà raggiunta, si sarà verificato uno spostamento di un certo numero m di frange per una variazione $t_1 - t_0$ nella temperatura; il rapporto $\frac{m}{t_1 - t_0}$ darà lo spostamento medio avvenuto fra t_1 e t_0 per la variazione di 1°; di tal valore si fa uso per calcolare il numero intero da attribuirsi alle frange nelle successive osservazioni, nelle quali non si notano che le fra-

zioni di frangia. Per facilitare questo calcolo è conveniente prendere ad una certa temperatura un disegno delle frange numerate e dei punti di riferimento come si presentano nel campo. Nel leggere le temperature mediante il cannocchiale, si fa scorrere quest'ultimo parallelamente al cannello orizzontale del termometro, in modo da rendere nullo l'errore di parallasse del vetro.

L'invariabilità della temperatura e l'immobilità delle frange nel momento della puntata si ottengono nel modo seguente. Quando la temperatura è prossima al punto al quale la si vuol fermare, si comincia ad osservare il termometro esterno e se ne notano a brevi intervalli di tempo le indicazioni, procurando di mantenerle costanti col moderare l' efflusso del gas mediante la chiavetta regolatrice. Dopochè questa costanza si è ottenuta almeno approssimativamente (entro qualche decimo di grado) per non meno di 30 o 40 minuti, si comincia ad osservare di tanto in tanto il termometro interno, senza mai cessare di leggere anche l'esterno: la lettura delle frange non si fa che quando la temperatura della stufa interna è rimasta costante per altri 30 o 40 minuti. Notate le posizioni di alcuni punti di riferimento una prima volta, si continuano le osservazioni dei due termometri, e ad intervalli di circa 15 minuti si ripete la puntata, finchè non si sia verificato che in realtà il movimento delle frange è completamente cessato. Si fa allora la lettura definitiva che si ripete anch'essa due o tre volte per maggior sicurezza; se nelle diverse letture vi sono delle piccole differenze ora in più ora in meno si prende la media dei diversi numeri ottenuti; se invece le differenze sono troppo grandi e tutte nel medesimo senso, l'esperienza deve essere rifiutata. Operando nel detto modo si riesce a mantenere nell'interno dell'apparecchio per molte ore costante la temperatura, od almeno variabile entro limiti strettissimi: nel quale ultimo caso delle diverse temperature osservate si prende poi la media.

Dal registro delle osservazioni, come esempio dell'andamento delle esperienze, togliamo i seguenti dati numerici, notando però che le osservazioni fatte in realtà, sono, specialmente pel termometro esterno, molto più numerose di quelle che qui riportiamo.

IVª Serie. — Esperienza 8.ª

LETTURA DEI TERMOMETRI

Termometro esterno

Ora	Temp.ª	Ora	Temp.ª
or m	o	or m	o
8.57	31,70	10.09	32,35
9.03	32,00	10.15	32,40
9.09	32,20	10.21	32,45
9.15	32,30	10.27	32,40
9.21	32,35	10.33	32,35
9.27	32,40	10.39	32,30
9.33	32,35	10.45	32,30
9.39	32,30	10.51	32,40
9.45	32,30	10.57	32,45
9.51	32,40	11.03	32,40
9.57	32,40	11.09	32,35
10.03	32,40	11.15	32,30

Termometro interno

Ora	Temp.ª	Ora	Temp.ª
or m	o	or m	o
9.46	31,20	10.36	31,40
9.56	31,30	10.46	31,40
10.06	31,40	10.56	31,50
10.16	31,40	11.06	31,50
10.26	31,50	11.16	31,45

LETTURA DELLE FRANGE

Punti di riferim.	1ª lettura (a 10.14)	2ª lettura (a 10.59)	3ª lettura (a 11.14)
	or m	or m	or m
A	70	70	75
B	30	45	40
C	00	10	10
D	80	85	85
E	35	50	50
F	70	70	70
G	35	35	40
H	00	00	10
I	85	85	80
L	95	00	00
M	65	65	70
N	10	20	25
O	00	05	00
P	70	70	70
Q	90	90	90
R	50	60	55
S	10	10	20
T	90	90	90
U	05	05	05
V	85	90	90
W	50	50	50
X	10	10	10
Y	90	95	90

Come valore della temperatura interna si prende qui la media delle osservazioni fatte dalle $10^{or}.06^{m}$ alle $11^{or}.16^{m}$ che differiscono tra loro di $0^{o},1$ al massimo: per le frange si prende pure la media delle tre letture date nella tabella precedente; si vede che esse sono tra di loro molto concordanti se si considera che i numeri rappresentano centesimi di frangia.

17. I risultati delle nostre otto serie di osservazioni e dei relativi calcoli sono raccolti nelle pagine seguenti. Le prime otto tabelle contengono i numeri dedotti immediatamente dalle osservazioni, nel modo ora descritto. Nella prima linea orizzontale è scritto il numero d'ordine delle esperienze, nella seconda la temperatura corretta nel modo detto al n.° 10, nella terza le altezze barometriche in millimetri ed a 0°; nelle linee orizzontali successive sono scritte le singole letture fatte per i diversi punti, ciascuno dei quali è contraddistinto da una lettera dell'alfabeto; i numeri f' sono le puntate medie, c le correzioni calcolate come nel n.° 13, e finalmente f sono le puntate medie corrette.

La 1ª e 2ª serie sono eseguite col cristallo di quarzo parallelamente all'asse, la 3ª e 4ª col medesimo perpendicolarmente all'asse; la 5ª e 6ª col cristallo di berillo parallelamente, la 7ª e 8ª col cristallo di berillo perpendicolarmente all'asse.

I.ª Serie. — Quarzo parallelo all'asse

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t	25.50	90.12	24.40	80.44	45,83	36.62	70.65	60.38	24.11
A	758.9	758.7	757.3	756.8	756.3	755.7	755.7	755.8	752.4
A	13.70	40.90	13.15	36.65	22.19	18.22	32.56	28.20	12.96
B	11.23	38.40	10.70	34.30	19.75	15.82	30.00	25.70	10.46
C	8.90	36.00	8.30	31.80	17.39	13.47	27.75	23.35	8.06
D	6.60	33.75	6.00	29.50	15.04	11.08	25.35	21.05	5.85
E	11.10	38.20	10.50	34.00	19.56	15.58	29.91	25.60	10.26
F	8.75	35.90	8.20	31.60	17.21	13.27	27.51	23.20	7.90
G	6.47	33.60	5.85	29.40	14.90	10.95	25.22	20.92	5.68
H	10.90	38.00	10.30	33.90	19.38	15.42	29.71	25.32	10.05
I	8.50	35.65	7.90	31.40	16.94	12.97	27.22	22.96	7.67
L	6.18	33.30	5.58	29.10	14.61	10.72	24.90	20.65	5.30
M	3.90	31.00	3.30	26.80	12.36	8.38	22.65	18.30	3.02
N	8.32	35.40	7.70	31.20	16.75	12.80	27.01	22.80	7.48
O	6.05	33.15	5.37	28.90	14.46	10.48	24.72	20.40	5.10
P	3.73	30.85	3.05	26.60	12.06	8.13	22.35	18.10	2.88
Q	8.27	35.40	7.63	31.10	16.67	12.75	26.96	22.70	7.39
R	5.80	32.90	5.20	28.70	14.20	10.22	24.50	20.20	4.92
S	3.53	30.60	2.85	26.30	11.86	7.90	22.16	17.90	2.60
T	1.32	28.40	0.62	24.10	9.66	5.75	19.95	15.70	0.38
f'	7.403	34.522	6.789	30.297	15.833	11.884	26.135	21.836	6.553
c	0.001	0.003	0.001	0.003	0.002	0.001	0.002	0.002	0.001
f	7.404	34.525	6.790	30.300	15.835	11.885	26.137	21.838	6.554

Spessore della lamina d'aria . . . . $0^{mm}.0110$

II.ª Serie — Quarzo parallelo all'asse

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	64.45	21.97	32.31	36.30	21.41	54.38	22.23	45.42	78.65	66.41
A	758.0	756.5	756.5	756.6	757.7	757.9	755.8	754.3	755.1	757.2
A	21.23	3.40	7.72	9.45	3.17	17.23	3.70	13.45	27.32	22.22
B	20.65	2.80	7.07	8.85	2.62	16.67	3.00	12.78	26.73	21.72
C	20.00	2.17	6.48	8.20	2.00	16 02	2.50	12.18	26.13	21.05
D	19.40	1.60	5.93	7.73	1.47	15.49	1.92	11.70	25.63	20.55
E	18.95	1.05	5.35	7.10	0.95	14.93	1.35	11.07	25.02	19.98
F	20.71	2.90	7.17	8.93	2.70	16.72	3.10	12.88	26.80	21.77
G	20.03	2.22	6.65	8.28	2.05	16.05	2.60	12.22	26.13	21.05
H	19.55	1.75	5.97	7.80	1.52	15.61	2.00	11.72	25.72	20.65
I	18.98	1.12	5.47	7.20	0.90	14.98	1.42	11.12	25.07	20.02
L	20.85	2.97	7.25	9.00	2.82	16.82	3.20	12.95	26.85	21.80
M	20.15	2.37	6.77	8.45	2.10	16.18	2.72	12.30	26.18	21.12
N	19.63	1.77	6.13	7.87	1.62	15.70	2.00	11.80	25.72	20.67
O	19.00	1.22	5.53	7.23	1.02	15.03	1.50	11.22	25.10	20.05
P	18.50	0.70	4.97	6.78	0.47	14.56	0.92	10.73	24.63	19.60
Q	20.28	2.50	6.78	8.55	2.22	16.24	2.70	12.45	26.30	21.17
R	19.71	1.90	6.17	7.90	1.75	15.78	2.07	11.82	25.75	20.72
S	19.17	1.30	5 73	7.38	1.15	15.16	1.60	11.28	25.20	20.12
T	18.65	0.77	5.07	6.80	0.60	14.65	0.92	10.78	24.70	19.65
U	20.50	2.62	6.90	8.70	2.35	16.40	2.80	12.55	26.40	21.30
V	19.87	2.00	6.20	8.00	1.80	15.83	2.12	11.90	25.87	20.80
W	19.25	1.45	5.82	7.50	1.20	15.20	1.70	11.38	25.23	20.18
X	18.72	0.80	5.15	6.87	0.70	14.74	1.07	10.82	24.75	19.72
Y	18.17	0.22	4.60	6.32	0.10	14.10	0.50	10.23	24.15	19.12
l'	19.650	1.809	6.126	7.865	1.621	15.656	2.061	11.797	25.712	20.653
c	0.001	0.000	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.001	0.001
l	19.651	1.809	6.127	7.866	1.621	15.657	2.061	11.798	25.713	20.654

Spessore della lamina d'aria 0mm.0058

III.ª **Serie. — Quarzo perpendicolare all'asse.**

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t	57.90	38.85	22.69	79.26	23.26	48.09	23.70	33.02	68.99
A	757.9	757.9	758.2	758.0	757.5	757.7	758.5	758.6	758.6
A	7.58	5.45	3.20	9.75	3.26	6.10	3.30	4.30	8.62
B	8.12	6.12	3.80	10.35	3.89	6.79	3.85	4.92	9.22
C	8.78	6.73	4.28	10.92	4.44	7.34	4.50	5.53	9.80
D	9.10	7.10	4.80	11.35	4.91	7.84	4.90	5.98	10.20
E	7.18	5.17	2.85	9.40	2.91	5.85	2.95	3.99	8.25
F	7.83	5.72	3.40	9.92	3.50	6.37	3.50	4.57	8.85
G	8.22	6.10	3.83	10.47	3.89	6.89	4.00	5.03	9.27
H	6.20	4.15	1.86	8.45	1.93	4.86	1.97	3.02	7.25
I	6.85	4.78	2.42	9.00	2.52	5.43	2.50	3.60	7.90
L	7.25	5.20	2.90	9.55	2.99	5.95	3.00	4.08	8.42
M	7.80	5.75	3.38	10.00	3.49	6.44	3.52	4.61	8.90
N	5.90	3.78	1.46	8.03	1.58	4.51	1.60	2.64	6.95
O	6.32	4.28	2.00	8.67	2.06	5.01	2.10	3.18	7.50
P	6.88	4.78	2.50	9.10	2.59	5.52	2.65	3.69	7.95
Q	4.88	2.71	0.35	7.02	0.49	3.40	0.57	1.60	5.87
R	5.32	3.21	0.95	7.60	1.03	3.99	1.07	2.13	6.45
S	5.90	3.80	1.51	8.07	1.60	4.52	1.62	2.68	7.00
T	6.23	4.10	1.90	8.55	1.92	4.92	2.00	3.05	7.35
f'	7.019	4.941	2.633	9.233	2.722	5.652	2.756	3.811	8.097
c	0.005	0.004	0.002	0.006	0.002	0.004	0.002	0.003	0.006
f	7.024	4.945	2.635	9.239	2.724	5.656	2.758	3.814	8.103

Spessore della lamina d'aria . . . . $0^{mm},0279$

IV.ª Serie. — Quarzo perpendicolare all'asse.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	86.84	53.92	25.11	25.59	75.04	47.12	25.79	32.51	36.80	70.08
A	759.3	759.3	757.3	757.0	755.9	755.3	754.2	753.7	753.1	753.1
A	8.85	5.51	1.92	2.00	7.67	4.76	2.00	2.71	3.30	7.10
B	9.59	6.14	2.67	2.70	8.32	5.47	2.70	3.40	4.00	7.90
C	10.20	6.90	3.23	3.27	9.00	6.05	3.30	4.08	4.70	8.57
D	10.90	7.66	3.92	4.00	9.65	6.87	4.00	4.84	5.30	9.20
E	11.62	8.22	4.70	4.70	10.30	7.51	4.70	5.17	6.05	9.90
F	8.90	5.54	1.93	2.00	7.67	4.78	2.00	2.71	3.27	7.05
G	9.55	6.12	2.60	2.62	8.23	5.43	2.70	3.36	3.97	7.90
H	10.15	6.86	3.22	3.25	9.00	6.03	3.30	4.04	4.70	8.50
I	10.87	7.58	3.90	3.95	9.70	6.81	4.00	4.82	5.25	9.17
L	8.04	4.76	1.08	1.06	6.90	4.00	1.05	1.99	2.47	6.28
M	8.81	5.37	1.90	1.90	7.55	4.71	1.90	2.67	3.13	7.06
N	9.46	6.00	2.57	2.57	8.10	5.26	2.60	3.18	3.88	7.83
O	10.05	6.88	3.08	3.10	8.90	6.00	3.20	4.01	4.57	8.40
P	10.86	7.45	3.85	3.90	9.60	6.73	3.90	4.71	5.15	9.07
Q	8.00	4.67	1.10	1.05	6.87	3.97	1.10	1.90	2.35	6.25
R	8.75	5.37	1.85	1.70	7.50	4.70	1.80	2.55	3.03	7.00
S	9.41	6.00	2.50	2.45	8.10	5.21	2.50	3.14	3.88	7.78
T	10.06	6.77	3.07	3.10	8.90	5.96	3.15	3.91	4.51	8.32
U	7.21	3.98	0.23	0.25	6.00	3.08	0.25	1.04	1.65	5.57
V	7.96	4.67	1.00	1.00	6.80	3.92	1.00	1.86	2.27	6.18
W	8.69	5.24	1.72	1.72	7.42	4.53	1.80	2.50	3.02	6.97
X	9.30	6.00	2.40	2.35	8.00	5.15	2.40	3.10	3.85	7.70
Y	10.01	6.70	3.00	3.00	8.90	5.96	3.00	3.92	4.39	8.12
f'	9.445	6.104	2.497	2.506	8.221	5.343	2.537	3.300	3.854	7.731
c	0.006	0.005	0.002	0.002	0.006	0.004	0.002	0.003	0.003	0.005
f	9.451	6.109	2.499	2.508	8.227	5.347	2.539	3.303	3.857	7.736

Spessore della lamina d'aria . . . . $0^{mm}.0261$

V^a Serie. — Berillo parallelo all'asse.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t	89.10	23.80	32.85	49.69	60.45	23.57	70.44	77.55	38.48
A	. . .	754.6	753.7	753.2	. . .	756.0	755.6	756.6	756.3
A	56.93	2.20	9.70	23.75	32.78	2.00	41.10	47.05	14.47
B	56.35	1.85	9.10	23.16	32.23	1.52	40.75	46.70	13.97
C	55.90	1.25	8.70	22.74	31.77	1.00	40.13	46.05	13.40
D	55.32	0.87	8.10	22.20	31.23	0.52	39.75	45.70	12.95
E	54.90	0.25	7.70	21.75	30.77	0.00	39.12	45.05	12.37
F	56.93	2.30	9.75	23.76	32.78	2.13	41.22	47.10	14.50
G	56.43	1.90	9.14	23.25	32.27	1.60	40.77	46.70	14.00
H	55.98	1.30	8.75	22.76	31.83	1.13	40.22	46.10	13.47
I	55.47	0.90	8.14	22.25	31.27	0.60	39.77	45.70	13.00
L	57.57	2.92	10.27	24.34	33.38	2.70	41.83	47.72	15.00
M	57.00	2.32	9.82	23.88	32.93	2.12	41.23	47.17	14.60
N	56.52	1.90	9.26	23.33	32.35	1.68	40.82	46.70	14.00
O	56.03	1.35	8.89	22.88	31.95	1.17	40.27	46.22	13.63
P	55.55	0.95	8.30	22.34	31.35	0.72	39.87	45.75	13.10
Q	57.68	3.00	10.38	24.45	33.50	2.78	41.93	47.83	15.20
R	57.10	2.47	9.89	23.94	33.00	2.20	41.35	47.25	14.70
S	56.68	2.00	9.47	23.45	32.50	1.78	40.90	46.80	14.15
T	56.10	1.50	8.96	22.97	32.00	1.28	40.38	46.27	13.75
U	58.22	3.60	11.00	25.04	34.05	3.35	42.58	48.45	15.87
V	57.88	3.07	10.48	24.56	33.60	2.85	42.02	47.90	15.25
W	57.15	2.58	10.00	24.02	33.05	2.32	41.53	47.37	14.78
X	56.80	2.10	9.51	23.61	32.65	1.90	41.02	46.90	14.22
Y	56.25	1.70	9.04	23.06	32.10	1.37	40.58	46.45	13.85
f'	56.552	1.925	9.320	23.369	32.406	1.684	40.832	46.736	14.096
c	0.012	0.004	0.005	0.007	0.009	0.004	0.010	0.011	0.006
f	56.564	1.929	9.325	23.376	32.415	1.688	40.842	46.747	14.102

Spessore della lamina d'aria . . . . 0^mm^.0480

VI^a Serie. — Berillo parallelo all'asse.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	45.01	59.56	25.36	38.26	73.81	79.97	51.87	31.32	67.00	24.91
A	755.2	755.2	752.0	755.1	754.8	756.4	756.2	750.7	750.0	753.0
A	23.17	35.40	7.00	17.50	47.32	52.57	29.03	12.00	41.70	6.60
B	22.75	35.00	6.50	17.02	46.90	52.03	28.68	11.60	41.20	6.05
C	22.35	34.62	6.07	16.75	46.55	51.70	28.20	11.17	40.85	5.75
D	22.10	34.43	5.95	16.50	46.35	51.52	28.02	11.00	40.70	5.50
E	21.42	33.72	5.17	15.80	45.60	50.80	27.27	10.25	39.95	4.85
F	21.05	33.28	4.82	15.38	45.20	50.35	26.95	9.92	39.55	4.47
G	20 85	33.00	4.65	15.05	45.00	50.08	26.72	9.70	39.28	4.13
H	20.15	32.45	4.00	14.55	44.30	49.60	26.05	9.00	38.75	3.62
I	19.87	32.02	3.68	14.10	44.00	49.10	25.73	8.70	38.27	3.13
L	19.60	31.85	3.32	13.90	43.70	48.95	25.40	8.40	38.03	2.97
M	19.30	31.60	3.10	13.70	43.45	48.70	25.12	8.13	37.80	2.73
N	18.65	30.85	2.35	12.95	42.75	47.97	24.43	7.40	37.05	2.00
O	18.25	30.53	2.00	12.70	42.35	47.65	24.12	7.13	36.80	1.72
P	18.00	30.25	1.88	12.32	42.15	47.35	23.90	6.93	36.52	1.45
Q	17.20	29.60	1.03	11.70	41.45	46.70	23.12	6.15	35.83	0.73
R	17.00	29.20	0.90	11.33	41.05	46.35	22.93	5.95	35.50	0.45
S	16.90	29.00	0.70	11.07	40.95	46.05	22.72	5.75	35.30	0.17
T	16.68	28.87	0.45	10.93	40.80	45.95	22.48	5.55	35.05	0.00
f'	19.738	31.982	3.532	14.069	43.882	49.079	25.604	8.596	38.229	3.128
c	0.003	9.004	0.002	0.003	0.005	0.005	0.003	0.002	0.004	0.002
f	19.741	31.986	3.534	14.072	43.887	49.084	25.607	8.598	38.233	3.130

Spessore della lamina d'aria 0mm.0206

VII^a Serie. — Berillo perpendicolare all'asse

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t	89.47	24.17	83.28	46.74	25.31	74.74	32.38	25.15	68.36	52.88	25.64	60.78
A	753.6	753.8	753.4	752.9	753.5	754.2	. . .	757.2	757.1	756.4	759.8	758.4
A	54.90	7.02	50.17	23.60	7.95	43.95	13.10	7.85	39.10	28.10	8.15	33.90
B	55.80	7.95	51.02	24.37	8.80	44.90	13.95	8.65	40 02	29.00	9.00	34.80
C	56.90	8.93	52.05	25.37	9.75	45.95	14.90	9.60	41.05	30.05	9.95	35.87
D	58.10	10.00	53.40	26.70	10.92	47.10	16.07	10.80	42.30	31.37	11.10	37.10
E	53.60	5.70	48.90	22.18	6.50	42.67	11.75	6.35	37.85	26.85	6.80	32.52
F	54.50	6.50	49.85	23.05	7.30	43.60	12.55	7.20	38.80	27.80	7.60	33.43
G	55.63	7.40	50.90	24.10	8.23	44.70	13.55	8.20	39.85	28.85	8.55	34.57
H	51.40	3.62	46.73	20.02	4.32	40.43	9.60	4.25	35.70	24.70	4.70	30.35
I	52.25	4.28	47.62	20.93	5.10	41.30	10.30	5.05	36.52	25.48	5.30	31.25
L	53.22	5.20	48.62	21.87	6.00	42.27	11.25	5.95	37.53	26.52	6.25	32.22
M	54.30	6.12	49.75	23.00	7.03	43.42	12.20	7.00	38.72	27.70	7.20	35.33
N	50.25	2.30	45.57	18.90	3.12	39.30	7.33	3.05	34.55	23.45	3.40	29.20
O	51.18	3.17	46.50	19.82	4.03	40.25	8.22	3.90	35.43	24.38	4.25	30.18
P	52.23	4.13	47.57	20.78	4.97	41.25	9.15	4.95	36 47	25.52	5.20	31.22
Q	48.30	0.40	43.70	16.97	1.28	37.38	6.43	1.15	32.68	21.65	1.65	27.30
R	49.25	1.25	44.65	17.88	2.02	38.30	7.30	2.00	33.52	22.43	2.30	28.20
S	50.22	2.20	45.68	18.82	2.95	39.33	8.20	2.93	34.50	23.52	3.20	29.25
T	51.53	3.20	46.82	19.95	4.00	40.57	9.25	4.00	35.73	24.75	4.25	30.50
f'	52.974	4.965	48.306	21.573	5.793	42.036	10.839	5.717	37.240	26.228	6.047	31.955
c	0.008	0.003	0.008	0.005	0.003	0.007	0.003	0.003	0.006	0.005	0.003	0.006
f	52.982	4.968	48.314	21.578	5.796	42.043	10.842	5.720	37.246	26.233	6.050	31.961

Spessore della lamina d'aria . . . . $0^{mm}.0324$

VIIIª Serie. — Berilo perpendicolare all'asse.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
t	26.70	69.12	27.22	61.76	27.09	51.13	27.25	34.55	77.47	27.28	84.39	42.15	27.11
A	753.1	752.5	. . .	. . .	754.6	754.3	756.6	756.8	751.9	758.1	757.9	757.2	. . .
A	1.90	32.30	2.10	26.95	2.05	19.12	2.15	7.33	38.35	2.10	43.35	12.72	2.00
B	2.50	32.82	2.70	27.60	2.65	19.75	2.75	8.00	38.98	2.70	43.90	13.30	2.70
C	3.00	33.42	3.22	28.10	3.20	20.30	3.25	8.57	39.60	3.30	44.60	13.88	3.15
D	3.65	34.00	3.80	28.72	3.80	20.85	3.85	9.07	40.07	3.80	45.05	14.40	3.80
E	4.10	34.65	4.40	29.15	4.25	21.50	4.40	9.70	40.70	4.40	45.70	15.02	4.25
F	1.85	32.20	2.05	26.88	2.10	19.10	2.10	7.30	38.30	2.05	43.30	12.70	2.00
G	2.40	32.78	2.65	27.50	2.60	19.70	2.70	7.83	38.90	2.65	43.80	13.23	2.65
H	3.00	33.27	3.15	28.03	3.10	20.20	3.10	8.40	39.38	3.10	44.35	13.77	3.10
I	3.60	33.83	3.80	28.63	3.70	20.80	3.75	9.00	40.02	3.75	44.90	14.30	3.70
L	1.10	31.50	1.25	26.12	1.20	18.30	1.30	6.60	37.60	1.25	42.60	11.95	1.20
M	1.80	32.07	1.90	26.78	1.90	19.00	1.85	7.15	38.23	1.80	43.10	12.58	1.85
N	2.20	32.68	2.50	27.23	2.40	19.52	2.50	7.80	38.75	2.55	43.75	13.02	2.45
O	2.85	33.13	3.05	27.90	3.00	20.05	3.10	8.22	39.25	3.10	44.20	13.63	3.00
P	3.40	33.78	3.63	28.45	3.60	20.70	3.70	8.82	39.80	3.70	44.80	14.10	3.65
Q	1.05	31.32	1.15	26.05	1.10	18.23	1.20	6.45	37.45	1.20	42.40	11.77	1.10
R	1.65	31.90	1.85	26.70	1.80	18.82	1.80	7.05	38.08	1.70	43.00	12.40	1.80
S	2.15	32.58	2.40	27.22	2.30	19.40	2.40	7.68	38.67	2.35	43.65	12.93	2.30
T	2.80	33.09	3.00	27.78	2.90	20.00	2.00	8.23	39.18	2.90	44.10	13.60	2.90
U	0.25	30.68	0.55	25.30	0.45	17.60	0.60	5.80	36.80	0.60	41.80	11.02	0.40
V	0.90	31.23	1.07	25.97	1.00	18.10	1.10	6.32	37.33	1.10	42.25	11.75	1.00
W	1.50	31.82	1.70	26.55	1.65	18.70	1.70	6.98	37.93	1.70	42.90	12.23	1.65
X	2.00	32.40	2.30	27.07	2.10	19.28	2.25	7.57	38.57	2.25	43.50	12.80	2.15
Y	2.70	32.90	2.90	27.72	2.80	19.90	2.90	8.07	39.10	2.90	44.00	13.47	2.85
f'	2.272	32.624	2.483	27.321	2.419	19.518	2.454	7.736	38.741	2.476	43.695	13.068	2.419
c	0.002	0.004	0.002	0.004	0.002	0.003	0.002	0.002	0.005	0.002	0.005	0.003	0.002
f	2.274	32.628	2.485	27.325	2.421	19.521	2.456	7.738	38.746	2.478	43.700	13.071	2.421

Spessore della lamina d'aria 0mm.0171

18. Dai dati delle esperienze si deducono otto sistemi di equazioni. Per comodità di calcolo nel seguente quadro le equazioni sono disposte secondo l' ordine crescente delle temperature: di più dal numero di frange relativo a ciascuna esperienza si è sottratto il numero intero più piccolo, corrispondente alla temperatura più bassa che entra nella serie; ciò equivale semplicemente a spostare l'origine arbitraria della numerazione, e non ha quindi nessuna influenza sui risultati. Finalmente in parecchie delle equazioni, e precisamente in alcune tra le prime di ciascuna serie, i coefficienti numerici risultano dalle medie di due o tre osservazioni: questo modo di procedere è giustificato dal fatto che per le temperature ordinarie dell'ambiente le osservazioni sono alquanto più incerte che per le altre, in causa della maggior difficoltà di ottenere una costanza sufficiente nella temperatura.

Tutte le equazioni ottenute in questo modo sono raccolte nel seguente quadro, in cui inoltre a fianco di ciascuna equazione si trova scritto il corrispondente residuo ottenuto dopo la risoluzione col metodo dei minimi quadrati.

Serie	Equazioni	*Residui*
I.ª	$x + 24.11\,y + 581.29\,z - 0.554 = 0$	$+ 0.138$
	$x + 24.40\,y + 595.36\,z - 0.790 = 0$	$+ 0.021$
	$x + 25.50\,y + 650.25\,z - 1.404 = 0$	$- 0.135$
	$x + 36.62\,y + 1341.02\,z - 5.885 = 0$	$+ 0.013$
	$x + 45.83\,y + 2100.39\,z - 9.835 = 0$	$- 0.091$
	$x + 60.38\,y + 3645.74\,z - 15.838 = 0$	$+ 0.011$
	$x + 70.65\,y + 4991.42\,z - 20.137 = 0$	$+ 0.050$
	$x + 80.44\,y + 6470.59\,z - 24.300 = 0$	$+ 0.046$
	$x + 90.12\,y + 8121.61\,z - 28.525 = 0$	$- 0.056$
II.ª	$x + 21.41\,y + 458.39\,z - 0.621 = 0$	$- 0.023$
	$x + 22.10\,y + 488.41\,z - 0.935 = 0$	$- 0.044$
	$x + 32.31\,y + 1043.94\,z - 5.127 = 0$	$+ 0.098$
	$x + 36.30\,y + 1317.69\,z - 6.866 = 0$	$+ 0.048$
	$x + 45.42\,y + 2062.98\,z - 10.797 = 0$	$- 0.031$
	$x + 54.38\,y + 2957.18\,z - 14.657 = 0$	$- 0.114$
	$x + 64.45\,y + 4153.80\,z - 18.651 = 0$	$+ 0.122$
	$x + 66.41\,y + 4410.29\,z - 19.654 = 0$	$- 0.060$
	$x + 78.65\,y + 6185.82\,z - 24.713 = 0$	$+ 0.002$
III.ª	$x + 22.69\,y + 514.83\,z - 0.635 = 0$	$- 0.016$
	$x + 23.26\,y + 541.03\,z - 0.724 = 0$	$- 0.034$
	$x + 23.70\,y + 561.69\,z - 0.758 = 0$	$- 0.012$
	$x + 33.02\,y + 1090.32\,z - 1.814 = 0$	$+ 0.096$
	$x + 38.85\,y + 1509.32\,z - 2.945 = 0$	.....
	$x + 48.09\,y + 2312.65\,z - 3.656 = 0$	$+ 0.071$
	$x + 57.90\,y + 3352.41\,z - 5.024 = 0$	$- 0.150$
	$x + 68.99\,y + 4759.62\,z - 6.103 = 0$	$+ 0.030$
	$x + 79.26\,y + 6282.16\,z - 7.239 = 0$	$+ 0.021$

	Equation	
	$x + 25.11\,y + 630.51\,z - 0.499 = 0$	$-\ 0.070$
	$x + 25.69\,y + 659.97\,z - 0.523 = 0$	$-\ 0.016$
	$x + 32.51\,y + 1056.90\,z - 1.303 = 0$	$+\ 0.107$
	$x + 36.80\,y + 1354.24\,z - 1.857 = 0$	$+\ 0.106$
IV.ª	$x + 47.12\,y + 2220.29\,z - 3.347 = 0$	$-\ 0.115$
	$x + 53.92\,y + 2907.37\,z - 4.109 = 0$	$-\ 0.081$
	$x + 70.08\,y + 4911.21\,z - 5.736 = 0$	$+\ 0.050$
	$x + 75.04\,y + 5631.00\,z - 6.227 = 0$	$+\ 0.063$
	$x + 86.84\,y + 7541.19\,z - 7.451 = 0$	$-\ 0.040$

	Equation	
	$x + 23.57\,y + 555.54\,z - 0.688 = 0$	$+\ 0.012$
	$x + 23.80\,y + 566.44\,z - 0.929 = 0$	$-\ 0.038$
	$x + 32.85\,y + 1079.12\,z - 8.325 = 0$	$+\ 0.062$
	$x + 38.48\,y + 1480.71\,z - 13.102 = 0$	$-\ 0.041$
V.ª	$x + 49.69\,y + 2460.10\,z - 22.376 = 0$	$-\ 0.025$
	$x + 60.45\,y + 3654.20\,z - 31.415 = 0$	$-\ 0.008$
	$x + 70.44\,y + 4961.79\,z - 39.842 = 0$	$-\ 0.043$
	$x + 77.53\,g + 6010.90\,z - 45.741 = 0$	$+\ 0.032$
	$x + 89.10\,y + 7938.81\,z - 55.564 = 0$	$-\ 0.002$

	Equation	
	$x + 24.91\,y + 620.51\,z - 0.130 = 0$	$-\ 0.015$
	$x + 25.36\,y + 643.13\,z - 0.534 = 0$	$-\ 0.045$
	$x + 38.26\,y + 1463.83\,z - 11.072 = 0$	$+\ 0.111$
	$x + 45.01\,y + 2025.90\,z - 16.741 = 0$	$+\ 0.051$
VI.ª	$x + 51.87\,y + 2690.50\,z - 22.607 = 0$	$-\ 0.088$
	$x + 59.56\,y + 3547.39\,z - 28.986 = 0$	$-\ 0.036$
	$x + 67.00\,y + 4489.00\,z - 35.227 = 0$	$-\ 0.038$
	$x + 73.81\,y + 5447.92\,z - 40.887 = 0$	$+\ 0.027$
	$x + 79.97\,y + 6395.20\,z - 46.084 = 0$	$+\ 0.019$

	Equation	
	$x + 24.17\,y + 584.19\,z - 0.968 = 0$	$-\ 0.024$
	$x + 25.37\,y + 643.64\,z - 1.856 = 0$	$-\ 0.028$
	$x + 32.38\,y + 1048.46\,z - 6.842 = 0$	$+\ 0.146$
	$x + 46.74\,y + 2184.63\,z - 17.578 = 0$	$-\ 0.026$
VII.ª	$x + 52.88\,y + 2796.29\,z - 22.233 = 0$	$-\ 0.170$
	$x + 60.78\,y + 3694.21\,z - 27.961 = 0$	$-\ 0.097$
	$x + 68.36\,y + 4673.09\,z - 33.246 = 0$	$+\ 0.178$
	$x + 74.74\,y + 5586.07\,z - 38.043 = 0$	$+\ 0.061$
	$x + 83.28\,y + 6935.56\,z - 44.314 = 0$	$+\ 0.044$
	$x + 89.47\,y + 8004.88\,z - 48.982 = 0$	$+\ 0.091$

$$\text{VIII}^a \left\{ \begin{array}{ll} x + 26.70\ y + 712.89\ z - 0.274 = 0 & -0.121 \\ x + 27.10\ y + 734.41\ z - 0.421 = 0 & +0.016 \\ x + 27.25\ y + 742.56\ z - 0.473 = 0 & +0.070 \\ x + 34.55\ y + 1193.70\ z - 5.738 = 0 & -0.015 \\ x + 42.15\ y + 1776.62\ z - 11.071 = 0 & +0.071 \\ x + 51.13\ y + 2614.28\ z - 17.521 = 0 & +0.062 \\ x + 61.76\ y + 3814.30\ z - 25.325 = 0 & -0.070 \\ x + 69.12\ y + 4777.57\ z - 30.628 = 0 & -0.030 \\ x + 77.47\ y + 6001.60\ z - 36.747 = 0 & -0.054 \\ x + 84.39\ y + 7121.67\ z - 41.700 = 0 & +0.066 \end{array} \right.$$

Nel calcolo definitivo della terza serie fu esclusa la quinta esperienza perchè dava un residuo eccezionalmente forte (¹).

Gli otto sistemi di equazioni primitive sopra riportate, danno i seguenti otto sistemi di equazioni normali:

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} 9.00\ x + 458.05\ y + 28497.69\ z - 107.27 = 0 \\ 458.05\ x + 28497.69\ y + 2015679.42\ z - 7639.02 = 0 \\ 28497.69\ x + 2015679.42\ y + 153360111.87\ z - 577412.62 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} 9.00\ x + 421.43\ y + 23078.50\ z - 102.02 = 0 \\ 421.43\ x + 23078.50\ y + 1403796.45\ z - 6187.30 = 0 \\ 23078.50\ x + 1403796.45\ y + 91244700.00\ z - 397782.87 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{III} \left\{ \begin{array}{l} 8.00\ x + 356.91\ y + 19414.71\ z - 25.95 = 0 \\ 356.91\ x + 19414.71\ y + 1205189.89\ z - 1570.64 = 0 \\ 19414.71\ x + 1205189.89\ y + 80768440.67\ z - 102944.20 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{IV} \left\{ \begin{array}{l} 9.00\ x + 453.11\ y + 26912.68\ z - 31.05 = 0 \\ 453.11\ x + 26912.68\ y + 1799972.92\ z - 2032.23 = 0 \\ 26912.68\ x + 1799972.92\ y + 129864260.00\ z - 143353.85 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{V} \left\{ \begin{array}{l} 9.00\ x + 465.91\ y + 28716.61\ z - 217.98 = 0 \\ 465.91\ x + 28716.61\ y + 1985469.45\ z - 15130.39 = 0 \\ 28716.61\ x + 1985469.45\ y + 147211120.15\ z - 1113082.09 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{VI} \left\{ \begin{array}{l} 9.00\ x + 465.75\ y + 27323.38\ z - 202.27 = 0 \\ 465.75\ x + 27323.38\ y + 1744095.47\ z - 13156.19 = 0 \\ 27323.38\ x + 1744095.47\ y + 117597990.37\ z - 889782.70 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{VII} \left\{ \begin{array}{l} 10.00\ x + 558.17\ y + 36151.03\ z - 242.02 = 0 \\ 558.17\ x + 36151.03\ y + 2569655.00\ z - 17177.58 = 0 \\ 36151.03\ x + 2569655.00\ y + 193315900.56\ z - 1280108.70 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{VIII} \left\{ \begin{array}{l} 10.00\ x + 501.62\ y + 29489.60\ z - 169.90 = 0 \\ 501.62\ x + 29489.60\ y + 1940704.93\ z - 11639.21 = 0 \\ 29489.60\ x + 1940704.93\ y + 137126203.14\ z - 833612.21 = 0 \end{array} \right.$$

(¹) Quest'esclusione non fu fatta che dopo averne provata la legittimità, secondo il criterio di Peirce per l'esclusione delle osservazioni dubbie. — V. Chauvenet, *Manual of spherical and practical Astronomy.* Vol. II, pag. 558.

I valori delle incognite dati da queste equazioni sono:

	x	y	z
I Serie	— 9.258	+ 0.41046	+ 0.000 0907
II »	— 8.536	+ 0.42806	— 0.000 0672
III »	— 2.336	+ 0.13383	— 0.000 1609
IV »	— 3.195	+ 0.15332	— 0.000 3591
V »	— 18.692	+ 0.81897	+ 0.000 1618
VI »	— 20.389	+ 0.81945	+ 0.000 1503
VII »	— 16.880	+ 0.73833	— 0.000 0358
VIII »	— 18.570	+ 0.69491	+ 0.000 2378

Dai residui scritti a fianco delle equazioni primitive, si deducono poi i segnenti valori per gli errori probabili r corrispondenti all'unità di peso nelle diverse serie:

I. Serie	$r = \pm$ 0,063	V. Serie	$r = \pm$ 0,028
II. «	$r = \pm$ 0,057	VI. «	$r = \pm$ 0,045
III. «	$r = \pm$ 0,060	VII. «	$r = \pm$ 0,082
IV. «	$r = \pm$ 0,064	VIII. «	$r = \pm$ 0,052

Tenendo conto di questi, risolvendo le equazioni dei pesi e rappresentando rispettivamente con r_x, r_y, r_z gli errori probabili delle incognite x, y e z, si trova infine:

	r_x	r_y	r_z
I Serie	$\pm$ 0.028	$\pm$ 0.0057	$\pm$ 0.000 051
II »	27	61	63
III »	26	68	68
IV »	30	67	62
V »	01	26	24
VI »	24	52	50
VII »	28	79	70
VIII »	30	57	53

19. Dai valori di x, y, z si hanno quelli dei coefficienti a_v, b_v mediante le formule (n.° 14):

$$a_v = a_c + \frac{\lambda y}{2(l_0 + e)} - \frac{e a_c}{l_0 + e}$$

$$b_v = b_c + \frac{\lambda z}{2(l_0 + e)} - \frac{e a_c}{l_0 + e}.$$

Gli altri valori da introdursi in queste formule sono raccolti nello specchio seguente:

Serie	e	l_0	a_0	b_0
I	mm 0.0110	mm 14.0568	0.000 007 102	0.000 000 008 85
II	0.0058			
III	0.0279	14.5944	0.000 013 238	0.000 000 011 90
IV	0.0261			
V	0.0480	13.8621	— 0.000 001 516	0.000 000 005 70
VI	0.0206			
VII	0.0324	13.8534	0.000 000 838	0.000 000 006 65
VIII	0.0171			

Otteniamo così:

I	$a_v = 0{,}000\ 015\ 686$	$b_v = 0{,}000\ 000\ 0107$
II	16 061	074
III	15 907	086
IV	16 302	046
V	15 812	091
VI	15 863	089
VII	16 490	066
VIII	15 586	117

Gli errori probabili r_a, r_b, dedotti come è detto al n.° 15, sono:

I	$r_a = \pm 0{,}000\ 000\ 119$	$r_b = \pm 0{,}000\ 000\ 0011$
II	128	13
III	142	14
IV	140	13
V	054	05
VI	110	11
VII	165	15
VIII	121	11

Ai diversi valori ottenuti daremo pesi inversamente proporzionali ai quadrati dei loro errori probabili, attribuendo un peso uguale all'unità al resultato il cui error probabile è massimo, cioè al VII, tanto per a che per b. Avremo così:

I	$p_a = 1.9$	$p_b = 1.9$	V	$p_a = 9.0$	$p_b = 9.0$
II	1.6	1.3	VI	2.2	1.9
III	1.3	1.1	VII	1.0	1.0
IV	1.4	1.3	VIII	1.9	1.7

e quindi:

$$\Sigma p_a = 20{,}3 \qquad \Sigma p_b = 19{,}2 \; .$$

Mediante le formule:

$$a = \frac{\Sigma p_a a_v}{\Sigma p_a} \qquad b = \frac{\Sigma p_b b_v}{\Sigma p_b}$$

otteniamo infine:

$$a = 10^{-9}\,(15877 \pm 55)$$
$$b = 10^{-11}\,(890 \pm 41) \; .$$

Il coefficiente medio di dilatazione tra 0^0 e t^0 è quindi

$$\alpha = 10^{-9}\,(15877 + 8{,}90\,t)\,,$$

ed il coefficiente vero a t, o il medio tra due temperature la cui media è t, è:

$$\alpha_t = 10^{-9}\,(15877 + 17{,}80\,.\,t)$$

Il Fizean dà pel rame i valori:

$$a = 10^{-9}.1596 \qquad b = 10^{-11}.1025$$

sufficientemente vicini ai nostri: le piccole differenze, che sorpassano alquanto i limiti degli errori di osservazione, possono essere dovute alla diversa costituzione chimica ed al diverso modo di lavorazione del rame, all'incertezza che può essere nei numeri dati dal Fizeau pei coefficienti di dilatazione introdotti nelle formule, e fors' anco alle piccole differenze che possono esistere nella direzione delle facce rispetto agli assi tra i nostri cristalli e quelli studiati dal Fizeau. Del resto l'incertezza che in una misura lineare corrisponde all'incertezza dei nostri dati, supposto esatto il valore ammesso per λ, è molto piccola nei casi ordinarî; ad esempio sulla lunghezza di un metro e per una variazione di 20^0, che è la massima escursione annua nella temperatura del nostro laboratorio, giunge appena ad $1^{\mu},3$.

Allegato VI.

Esame delle viti micrometriche dei microscopî adoperati nella determinazione della Gravità.

Nota del dott. M. Ascoli.

I microscopî sottoposti ad esame sono tutti del medesimo modello e portano i numeri I, II, III, IV. Il micrometro è costituito da una vite del passo di circa un quinto di millimetro, che pone in movimento due sistemi di fili, composti l'uno di due fili paralleli collocati a breve distanza, l'altro di due fili incrociati ad X; nelle diverse osservazioni la preferenza è data all'uno o all'altro sistema, secondo le circostanze e secondo l'abitudine dell'osservatore. I tamburi delle viti sono divisi in 250 parti.

L'esame di cui è oggetto la presente Nota è stato limitato alla determinazione delle lunghezze d'un certo numero di passi per ciascuna vite, numerose osservazioni preliminari avendoci dimostrato che le diverse porzioni di ciascun giro di vite corrispondenti alle divisioni del tamburo non differiscono tra loro di quantità apprezzabili. I passi d'ogni vite che vengono ordinariamente adoperati nelle misure, e che

quindi furono soli studiati, sono quelli che corrispondono alla parte centrale del campo visivo.

Il microscopio sottoposto ad esame venne fissato verticalmente al carretto di una piccola macchina divisoria, sul banco della quale era collocata orizzontalmente una graduazione composta di dieci millimetri divisi ciascuno in dieci parti, ed incisa sopra una lastrina di vetro. Il metodo di verifica adottato consiste nel confrontare la lunghezza di una delle divisioni della lastrina con le diverse porzioni della vite micrometrica.

Nella sua posizione iniziale il microscopio vien disposto in modo che il tamburo del micrometro segni zero ed il sistema di fili paralleli cada approssimativamente in corrispondenza all'origine del primo dei dieci passi compresi nell'intervallo da esaminare. Così disposto il micrometro, mediante la vite della macchina divisoria si sposta il microscopio finchè venga ad essere esattamente puntato il primo tratto inciso sulla lastrina di vetro; girando poi la vite del micrometro si punta il secondo tratto. Nel caso nostro, per questo spostamento è necessario far fare alla vite un giro intero più una frazione di giro espressa con un certo numero δ di parti micrometriche lette sul tamburo. Notato questo numero, si fa retrocedere la vite un po'più della quantità δ, riconducendola poi a 0, in modo che essa risulti avanzata rispetto alla posizione iniziale di un solo giro intero. Girando di nuovo la vite della macchina divisoria si punta nuovamente il primo tratto, e si ripete l'operazione di prima. Così si procede finchè si sia giunti all'ultimo passo dell'intervallo.

Indicando con a la distanza fra i due tratti puntati, con I^p, II^p, ecc. le lunghezze corrispondenti al primo, secondo, ecc. passo esaminato, con δ_1, δ_2, ... δ_{10} i diversi valori ottenuti successivamente per δ, e con ε_1, ε_2, ... ε_{10} le lunghezze corrispondenti ad una parte nei diversi passi, è facile stabilire il seguente sistema di equazioni:

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} I^p = a \dfrac{250\,\varepsilon_1}{250\,\varepsilon_1 + \delta_1\,\varepsilon_2} \\ II^p = a \dfrac{250\,\varepsilon_2}{250\,\varepsilon_2 + \delta_2\,\varepsilon_3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X^p = a \dfrac{250\,\varepsilon_{10}}{250\,\varepsilon_{10} + \delta_{10}\,\varepsilon_{11}} . \end{array} \right.$$

Consideriamo una di queste, per esempio la prima; essa si può scrivere

$$(2)\qquad I^p = a \frac{250}{250 + \delta_1 \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} .$$

Il valore del rapporto $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, come è naturale e come risulta anche dalle nostre misure è molto prossimo all'unità; poniamo

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1 + \alpha$$

ed avremo

$$I^p = a \frac{250}{250 + \delta_1 + \delta_1 \alpha} = a \frac{250}{250 + \delta_1} \left(\frac{1}{1 + \dfrac{\delta_1 \alpha}{250 + \delta_1}} \right) .$$

La frazione $\frac{\delta_1 \alpha}{250+\delta_1}$ è sempre molto piccola, trascurandone le potenze superiori alla prima, si può quindi porre:

$$I^p = a \frac{250}{250+\delta_1}\left(1 - \frac{\delta_1 \alpha}{250+\delta_1}\right). \tag{3}$$

Possiamo però ottenere un'approssimazione maggiore tenendo conto anche del valore prossimo del rapporto $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. Infatti si ha:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{II^p}{I^p},$$

e dalle prime due delle (1):

$$\frac{II^p}{I^p} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\,\frac{250\,\varepsilon_1 + \delta_1 \varepsilon_2}{250\,\varepsilon_2 + \delta_2 \varepsilon_3},$$

e quindi

$$\frac{250\,\varepsilon_1 + \delta_1 \varepsilon_2}{250\,\varepsilon_2 + \delta_2 \varepsilon_3} = 1.$$

Ne consegue:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{250}{250 + \delta_2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} - \delta_1},$$

e perciò la (2) dà:

$$I^p = a \frac{250}{250 + \delta_1 \frac{250}{250 + \delta_2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} - \delta_1}}. \tag{4}$$

Ora ponendo $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = 1 + \alpha_1$, la (4) diviene:

$$I^p = a \frac{250 + \delta_2 + \delta_2 \alpha_1 - \delta_2}{250 + \delta_2 + \delta_2 \alpha_1} = a \left\{ 1 - \frac{\delta_1}{\left(250 + \delta_2\right)\left(1 + \frac{\delta_2 \alpha_1}{250 + \delta_2}\right)} \right\}$$

da cui, se si trascurano le quantità dell'ordine di $\left(\frac{\delta_2 \alpha_1}{250 + \delta_2}\right)^2$, abbiamo:

$$I^p = a \frac{250 + \delta_2 - \delta_1}{250 + \delta_2}.$$

Analogamente si potrebbe procedere ad una terza approssimazione, ma essa sarebbe del tutto superflua nel caso nostro.

Avremo dunque:

$$\left\{ \begin{array}{l} I^p = a \frac{250 + \delta_2 - \delta_1}{250 + \delta_2} \\ II^p = a \frac{250 + \delta_3 - \delta_2}{250 + \delta_3} \\ \dots\dots\dots\dots \\ IX^p = a \frac{250 + \delta_{10} - \delta_9}{250 + \delta_{10}}. \end{array} \right. \tag{5}$$

Il decimo passo non si può calcolare con questa formula mancando il valore di δ_{11}.

Su ciascuno dei quattro microscopî furono fatte le seguenti serie di osservazioni:

Microscopio I.

	Serie 1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
δ_1	82.0	76.9	78.9	79.6	80.6
δ_2	76.0	79.8	80.1	77.4	76.8
δ_3	77.2	77.5	75.5	78.4	75.4
δ_4	76.6	76.5	74.7	72.5	76.4
δ_5	76.8	74.7	75.3	74.0	75.9
δ_6	74.0	72.0	72.6	76.3	77.9
δ_7	77.8	76.7	76.6	78.9	78.1
δ_8	78.7	82.1	77.9	75.6	80.9
δ_9	79.1	78.3	76.8	79.0	79.4
δ_{10}	75.0	74.9	80.0	75.8	79.9

Microscopio II.

	Serie 1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
δ_1	56.6	52.3	48.7	52.0	57.0
δ_2	53.2	53.3	49.3	53.0	52.0
δ_3	52.4	54.4	53.9	53.9	54.1
δ_4	54.9	51.9	53.8	55.5	54.6
δ_5	55.9	54.9	53.7	53.3	54.6
δ_6	56.4	53.6	56.9	56.7	56.4
δ_7	54.5	54.5	57.3	55.5	53.2
δ_8	59.5	54.6	54.2	55.1	54.5
δ_9	57.4	52.0	54.8	59.0	53.7
δ_{10}	54.7	55.2	58.5	59.7	54.7

Microscopio III.

	Serie 1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
δ_1	61.0	62.1	62.7	62.1	59.7
δ_2	63.6	60.1	61.2	61.5	59.2
δ_3	61.2	62.3	63.9	63.4	60.0
δ_4	62.8	59.5	61.9	63.2	60.2
δ_5	63.4	62.9	64.0	61.7	60.9
δ_6	62.1	60.9	62.0	62.2	59.0
δ_7	62.0	60.0	61.0	60.0	59.7
δ_8	63.4	61.0	61.2	63.1	60.9
δ_9	64.9	66.0	60.5	63.5	63.6
δ_{10}	62.0	62.1	62.8	63.3	63.4

Microscopio IV.

	Serie 1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a
δ_1	82.6	79.8	83.2	81.0	78.1	81.7	82.8	82.7	85.5	78.7
δ_2	79.9	81.5	80.4	79.8	82.2	86.1	83.7	82.4	82.8	79.4
δ_3	80.5	82.1	81.0	82.4	81.0	83.7	81.7	82.9	83.2	80.7
δ_4	83.0	84.0	84.6	83.5	81.0	78.6	81.6	84.2	83.1	80.3
δ_5	81.3	83.2	82.3	78.1	81.7	80.9	84.0	80.7	81.0	78.7
δ_6	80.7	82.1	80.0	80.4	80.0	80.3	81.1	78.9	80.9	82.0
δ_7	83.2	8[illegible].7	80.3	79.7	83.0	81.7	81.2	77.8	79.0	76.0
δ_8	82.4	81.5	80.0	79.4	79.2	80.0	79.7	80.7	81.1	79.5
δ_9	77.6	78.7	77.9	77.6	81.4	79.2	79.1	80.0	78.0	78.6
δ_{10}	80.8	79.2	78.9	78.7	79.8	81.4	82.9	80.0	79.5	77.8

Facendo le medie dei valori ottenuti per ciascun passo, abbiamo:

Microscopii

	I	II	III	IV
δ_1	79 60	53.32	61.52	81.61
δ_2	78.02	52.16	61.12	81.82
δ_3	76.80	53.74	62.16	81.92
δ_4	75.34	54.14	61.52	82.39
δ_5	75.34	54.48	62.58	81.19
δ_6	74.56	56.00	61.24	80.64
δ_7	77.62	55.00	60.54	80.26
δ_8	79.04	55.58	61.92	80.35
δ_9	78.52	55.38	63.70	78.81
δ_{10}	77.12	56.56	62.72	79.90

Per ciascun microscopio le differenze tra le diverse quantità δ sono sempre molto piccole. Esse però sono sensibilmente superiori agli errori di osservazione; infatti dai numeri dati dalle diverse serie, si deducono in media i seguenti errori probabili delle medie:

Microscopio I . . . . $r = \pm 0.79$
» II . . . . ± 0.96
» III . . . . ± 0.74
» IV . . . . ± 0.43

mentre le differenze tra i diversi valori medî dei numeri δ sono spesso molto più considerevoli. Possiamo dunque ritenere che si tratti realmente di differenze tra i diversi passi della vite.

La seguente tabella dà le differenze tra due successivi valori δ, che sono necessarie per eseguire il calcolo mediante le formule (5)

	Microscopii			
	I	II	III	IV
$\delta_2 - \delta_1$	—1.58	—1.16	—0.40	+0.21
$\delta_3 - \delta_2$	—1.22	+1.58	+1.04	+0.10
$\delta_4 - \delta_3$	—1.46	+0.40	—0.64	+0.47
$\delta_5 - \delta_4$	—0.00	+0.34	+1.06	—1.20
$\delta_6 - \delta_5$	—0.78	+1.52	—1.34	—0.55
$\delta_7 - \delta_6$	+3.06	—1.00	—0.70	—0.38
$\delta_8 - \delta_7$	+1.42	+0.58	+1.38	+0.09
$\delta_9 - \delta_8$	—0.52	—0.20	+1.78	—1.54
$\delta_{10} - \delta_9$	—1.40	+1.18	—0.98	+1.09

Da queste differenze, non si può dedurre nessuna legge sulla variazione della lunghezza dei passi; onde bisogna limitarci ad eseguire il calcolo indipendentemente per ciascun passo.

Diamo qui i numeri calcolati colle formule (5), cioè i coefficienti numerici pei quali deve essere moltiplicata la grandezza a per ottenere le vere lunghezze dei passi.

		Microscopii			
		I	II	III	IV
Passo	I	0.7573	0.8235	0.8022	0.7540
»	II	0.7613	0.8283	0.8042	0.7535
»	III	0.7639	0.8233	0.8005	0.7535
»	IV	0.7684	0.8222	0.8032	0.7512
»	V	0.7678	0.8220	0.7989	0.7544
»	VI	0.7724	0.8164	0.8028	0.7558
»	VII	0.7641	0.8200	0.8059	0.7570
»	VIII	0.7594	0.8180	0.8026	0.7556
»	IX	0.7600	0.8193	0.7963	0.7611
»	X	0.7642	0.8155	0.7994	0.7579

I numeri relativi al decimo passo sono calcolati colla formula

$$X^{p} = a \frac{250}{250 + \delta_{10}}$$

che si ricava dalla analoga alla (3) trascurando i termini in α. Per dare un' idea dell'errore che in questo modo si commette trascriviamo qui sotto i valori che si ottengono in quest'ultimo caso per i dieci passi del micrometro del microscopio I.

Passo	I	0.7585	Passo	VI	0.7703
»	II	0.7621	»	VII	0.7631
»	III	0.7650	»	VIII	0.7598
»	IV	0.7684	»	IX	0.7610
»	V	0.7684	»	X	0.7642

Nel caso nostro le differenze sono piccole ma possono essere non del tutto trascurabili avendo influenza sul decimo di micron.

Dalla tabella precedente si possono dedurre i rapporti tra le vere lunghezze di due passi della vite micrometrica. Quanto al valore dei passi stessi in millimetri, esso dipende dall'ingrandimento del microscopio, il quale è variabile al variare della disposizione relativa dell'oculare e dell'obiettivo. Per le nostre osservazioni tale valore si può calcolare ponendo per a la sua vera lunghezza in millimetri. Da un precedente esame della graduazione micrometrica tracciata sul vetro, risulta per la lunghezza della prima divisione

$$a = 0^{mm},10024 .$$

Si ottiene così

		Microscopii			
		I	II	III	IV
Passo	I	$0^{mm}.07591$	$0^{mm}.08255$	$0^{mm}.08042$	$0^{mm}.07558$
»	II	0.07631	0.08303	0.08061	0.07553
»	III	0.07657	0.08253	0.08024	0.07553
»	IV	0.07702	0.08242	0.08051	0.07530
»	V	0.07696	0.08240	0.08008	0.07562
»	VI	0.07742	0.08184	0.08047	0.07576
»	VII	0.07659	0.08220	0.08078	0.07589
»	VIII	0.07612	0.08199	0.08045	0.07574
»	IX	0.07618	0.08213	0.07982	0.07629
»	X	0.07660	0.08175	0.08013	0.07597
Medie:		0.07657	0.08228	0.08035	0.07572

Tra i numeri relativi ad un medesimo microscopio le differenze sono molto piccole, in pochi casi solamente superano un micron. Pertanto in tutte le misure nelle quali è sufficiente spingere la precisione fino al micron, si potrà ammettere con sufficiente approssimazione, che tutti i passi della vite su cui abbiamo fatto queste osservazioni abbiano la medesima lunghezza, assumendo come vero valore di ciascuno la media tra i dieci valori trovati.

Fig. 1

Apparato di Bessel

V₁ R₁ U V₂ L H R T V L K

F G E

Fig.3

N

Fig.2

Fig.16

Tavola d'insieme del nuovo apparato

[illegible] dal vero C. Chizzoni

Lit. Bruno e Salomone Roma

C. Chizzoni disᵒ dal vero

Fig. 6
Pendolo

Fig. 8
Termoscopio metallico

C. Chizzoni dis. dal vero

Lit. Bruno e Salomone Roma

Fig. 7 — Apparecchio per la sospensione del pendolo

Fig. 9 — Frangie per lo smorzamento delle oscillazioni

Fig. 10 — Apparecchio per la chiusura automatica del circuito

Estensione della formola pel numero dei covarianti al caso delle trasformazioni lineari indipendenti.

Memoria del prof. ALFREDO CAPELLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia

nella seduta del 4 marzo 1883.

---

1. Supponiamo, per maggior semplicità di ragionamento, che si abbia una sola forma binaria fondamentale:

$$\mathrm{F} = a_x^\alpha\, b_y^\beta\, c_z^\gamma \ldots$$

con le serie *digredienti* (¹) x_1, x_2; y_1. y_2; z_1, z_2; ... Consideriamo simultaneamente altrettante serie ξ_1, ξ_2; η_1, η_2; ζ_1, ζ_2;... risp. *cogredienti* alle precedenti e cerchiamo innanzi tutto di determinare il numero dei covarianti (*di pesi nulli*) di F, che siano di un dato grado g nei coefficienti di F e risp. dei gradi:

$$m,\ n,\ l, \ldots;\ \mu,\ \nu,\ \lambda, \ldots$$

nelle serie di variabili:

$$x,\ y,\ z, \ldots;\ \xi,\ \eta,\ \zeta, \ldots .$$

cosicchè fra i numeri g, m, n, l, ..., μ, ν, λ, ... devono aver luogo le relazioni:

$$m + \mu = g \cdot \alpha\,, \quad n + \nu = g \cdot \beta\,, \quad l + \lambda = g \cdot \gamma\,, \ldots$$

Se poniamo simbolicamente:

$$a_x^\alpha\, b_y^\beta\, c_z^\gamma \ldots = a'^\alpha_x\, b'^\beta_y\, c'^\gamma_x \ldots = a''^\alpha_x\, b''^\beta_y\, c''^\gamma_z \ldots = , \ldots ,$$

tali covarianti, che indicheremo in generale con Φ, hanno per tipo generale:

$$\Phi = \sum_i \mathrm{A}_i \,.\, a'^{m_1}_x\, a''^{m_2}_x \ldots a^{(g)\,m_g}_x\; a'^{\mu_1}_\xi\, a''^{\mu_2}_\xi \ldots a^{(g)\,\mu_g}_\xi \,.\, b'^{n_1}_y\, b''^{n_2}_y \ldots b'^{\nu_1}_\eta\, b''^{\nu_2}_\eta \ldots\ldots$$

dove le A_i sono costanti *numeriche* arbitrarie e gli esponenti sono soggetti solamente alle condizioni:

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} m_1 + \mu_1 = \alpha \\ m_2 + \mu_2 = \alpha \\ \ldots\ldots\ldots \\ m_g + \mu_g = \alpha \end{cases} \qquad \begin{aligned} m_1 + m_2 + \ldots + m_g &= m \\ \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_g &= \mu \end{aligned}$$

$$(\mathrm{II})\ \begin{cases} n_1 + \nu_1 = \beta \\ n_2 + \nu_2 = \beta \\ \ldots\ldots\ldots \\ n_g + \nu_g = \beta \end{cases} \qquad \begin{aligned} n_1 + n_2 + \ldots + n_g &= n \\ \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_g &= \nu \end{aligned}$$

etc. etc.

(¹) Tali cioè che ciascuna può essere assoggettata ad una trasformazione lineare arbitraria *sua propria*, cosicchè i covarianti sono forme che, costruite per la forma fondamentale trasformata, non variano che di un fattore eguale al prodotto di potenze dei moduli delle singole sostituzioni.

Il numero dei sistemi distinti di soluzioni è uguale evidentemente al prodotto dei numeri di soluzioni che competono a ciascuno dei sistemi parziali (I), (II). Questo numero rappresenterebbe precisamente il numero dei covarianti *linearmente indipendenti* (fra cui non può aver luogo alcuna relazione lineare a coefficienti numerici diversi da zero) del tipo Φ, qualora:

$$F_1 = a'^{\alpha}_x \, b'^{\beta}_y \dots$$

$$F_2 = a''^{\alpha}_x \, b''^{\beta}_y \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F_g = a^{(g)^{\alpha}}_x \, b^{(g)^{\beta}}_y \dots$$

fossero altrettante forme generali fra loro indipendenti; giacchè supponendo per es. che le a', b', ..., a'', b'', ..., ... fossero serie di coefficienti *effettivi* fra loro indipendenti, è facile vedere che si può sempre disporre di essi e delle x, y, .., ξ, η, ..., in modo che gli elementi lineari:

$$a'_x\,,\ a''_x\,,\dots,\ a^{(g)}_x,\ a'_\xi\,,\ a''_\xi\,,\dots,\ a^{(g)}_\xi$$

$$b'_y\,,\ b''_y\,,\dots,\ b^{(g)}_y,\ b'_\eta\,,\ b''_\eta\,,\dots,\ b^{(g)}_\eta$$

assumano altrettanti valori assegnabili ad arbitrio, cosicchè fra essi non può assolutamente aver luogo alcuna relazione, cioè fra prodotti di questi elementi elevati a serie *distinte* di esponenti non può aver luogo alcuna relazione lineare.

Nel nostro caso essendo le F_1, F_2, ..., F_g forme fra loro *equivalenti* dobbiamo considerare come uguali tutti quei termini del tipo di Φ, dato di sopra, che si possono ottenere da uno stesso termine permutando fra loro le g serie di esponenti:

$$\begin{array}{c} m_1,\ n_1,\ l_1,\dots,\mu_1,\ \nu_1,\ \lambda_1,\dots, \\ m_2,\ n_2,\ l_2,\dots,\mu_2,\ \nu_2,\ \lambda_2,\dots, \\ \dots\dots\dots\dots \\ m_g,\ n_g,\ l_g,\dots,\mu_g,\ \nu_g,\ \lambda_g,\dots, \end{array}$$

Quindi il numero cercato dei covarianti Φ sarà ancora uguale al numero dei sistemi distinti di soluzioni delle (I), (II),..., purchè però si considerino come *distinti* solamente quei sistemi che non possono ottenersi l'uno dall'altro eseguendo dappertutto una *stessa* permutazione fra gli indici:

$$1,\ 2,\ \dots,\ g,$$

da cui sono affette le indeterminate [1]. Questo numero, che è funzione delle sole α, β, γ, ..., μ, ν, λ, ... e di g, giacchè le m, n, l,.. sono legate a queste dalle relazioni

$$m = g\alpha - \mu\,, \qquad n = g\beta - \nu\,, \qquad l = g\gamma - \lambda\,, \dots,$$

sarà da noi designato con:

$$\varphi(\mu,\ \nu,\ \lambda,\ \dots)$$

[1] Cfr. *Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche* § VIII. Atti della r. Accademia dei Lincei 1882.

giacchè in ciò che segue riterremo costanti le α, β, γ, ... e la g, e soltanto faremo variare le μ, ν, λ, ...

2. Considerando attualmente un sistema di valori delle μ, ν, λ,... tali che:

$$m \geqq \mu, \quad n \geqq \nu, \quad l \geqq \lambda, \ldots,$$

ci proponiamo di determinare il numero dei covarianti linearmente indipendenti Φ, che soddisfano alle equazioni differenziali:

$$x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} = 0$$

$$y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} + y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_2} = 0$$

$$z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_1} + z_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_2} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

o, come scriveremo più brevemente:

$$(1) \qquad D_{\xi x} \Phi = 0, \qquad D_{\eta y} \Phi = 0, \qquad D_{\zeta z} \Phi = 0, \ldots$$

3. Se $f(\overset{m}{x}, \overset{\mu}{\xi})$ è una forma qualsivoglia di grado m nelle x e μ nelle ξ, si possono sempre determinare, come facilmente si deduce dalla formola di Gordan [1], due operazioni $\Delta_{\xi x}$ ed $H_{\xi x}$, composte mediante le operazioni $D_{x\xi}$ e $D_{\xi x}$ sopra definite, tali da avere identicamente:

$$f(\overset{m}{x}, \overset{\mu}{\xi}) = \Delta_{\xi x} \cdot f + H_{\xi x} \cdot f$$

e che godono delle proprietà seguenti:

1) Le operazioni $\Delta_{\xi x}$ ed $H_{\xi x}$ sono del tipo

$$\sum_i A_i \, D^i_{x\xi} \, D^i_{\xi x}$$

dove i coefficienti A_i sono *semplici numeri* funzioni dei numeri m e μ.

2) Tra forme dei due tipi $\Delta_{\xi x} f$, $H_{\xi x} f$ non può aver luogo alcuna relazione lineare, cosicchè se si abbia:

$$\Delta_{\xi x} \varphi(\overset{m}{x}, \overset{\mu}{\xi}) + H_{\xi x} \psi(\overset{m}{x}, \overset{\mu}{\xi}) = 0$$

dev'essere separatamente:

$$\Delta_{\xi x} \varphi(\overset{m}{x}, \overset{\mu}{\xi}) = 0, \qquad H_{\xi x} \psi(\overset{m}{x}, \overset{\mu}{\xi}) = 0$$

3) L'operazione $\Delta_{\xi x}$ è del tipo:

$$\Delta_{\xi x} = \left\{ \sum_i A_i \, D^i_{x\xi} \, D^{i-1}_{\xi x} \right\} D_{\xi x} = \Delta'_{\xi x} \cdot D_{\xi x}$$

dove $\Delta'_{\xi x}$ è un' operazione della stessa natura delle precedenti.

4) Finalmente, nel caso di $m \geqq \mu$, si ha identicamente:

$$D_{\xi x} \cdot H_{\xi x} \cdot f = 0 .$$

[1] Cfr. l. c. §§ III, V.

Applicando le stesse considerazioni alle altre coppie di variabili potremo dunque ritenere le seguenti identità:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
f(\overset{m}{x}, \overset{\mu}{\xi}) &= \Delta_{\xi x} f + \mathrm{H}_{\xi x} f \\
f(\overset{n}{y}, \overset{\nu}{\eta}) &= \Delta_{\eta y} f + \mathrm{H}_{\eta y} f \\
f(\overset{l}{z}, \overset{\lambda}{\zeta}) &= \Delta_{\zeta z} f + \mathrm{H}_{\zeta z} f \\
\ldots &\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

dalle quali, tenendo conto delle proprietà sopra enunciate delle operazioni Δ ed H, risulta chiaramente che il tipo più generale del covariante Φ che soddisfa alle equazioni differenziali (1) è dato da:

$$
(3)\qquad \ldots \mathrm{H}_{\zeta z}\, \mathrm{H}_{\eta y}\, \mathrm{H}_{\xi x} . \Phi ,
$$

cosicchè il nostro problema si è di determinare il numero dei covarianti linearmente indipendenti compresi in questo tipo.

4. Se indichiamo con Ψ il covariante più generale, di pesi nulli e grado g, che nelle $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sia rispettivamente dei gradi:

$$
\mu - i_1 , \quad \nu - i_2 , \quad \lambda - i_3 , \ldots . ,
$$

e per conseguenza nelle $x, y, z, \ldots$ dei gradi:

$$
m + i_1 , \quad n + i_2 , \quad l + i_3 , \ldots ,
$$

esso conterrà, per ciò che precede, $\varphi(\mu - i_1, \nu - i_2, \lambda - i_3, \ldots)$ costanti arbitrarie. Or noi diciamo che si può sempre disporre delle $\varphi(\mu, \nu, \lambda, \ldots)$ costanti arbitrarie di Φ in modo da avere:

$$
\Psi = \ldots \mathrm{D}_{\zeta z}^{i_3}\, \mathrm{D}_{\eta x}^{i_2}\, \mathrm{D}_{\xi y}^{i_1} . \Phi .
$$

Ciò è una conseguenza del teorema, facilmente dimostrabile in base all'identità citata all'art. 3, che se λ è maggiore di λ' si può sempre porre identicamente:

$$
f(\overset{\lambda}{x}, \overset{\lambda'}{\xi}) = \mathrm{D}_{\xi x} . \Delta . f(\overset{\lambda}{x}, \overset{\lambda'}{\xi})
$$

dove f è una funzione qualunque dei gradi λ e λ' nelle x e ξ risp. e Δ è un'operazione della natura delle precedenti a coefficienti puramente numerici che dipendono dai soli numeri λ e λ' (¹).

In effetto si vede che, applicando ripetutamente questa formola alla funzione Ψ, si potrà porre Ψ sotto la forma:

$$
\Psi = \ldots \mathrm{D}_{\zeta z}^{i_3}\, \mathrm{D}_{\eta y}^{i_2}\, \mathrm{D}_{\xi x}^{i_1} . \Delta . \Psi .
$$

Poichè ora Ψ è nelle $\xi, \eta, \zeta \ldots$ risp. dei gradi $\mu - i_1, \nu - i_2, \lambda - i_3, \ldots$, la funzione $\Delta\Psi$ dovrà essere in esse dei gradi $\mu, \nu, \lambda, \ldots$, e, poichè essa è evidentemente un covariante di pesi nulli e grado g, dovrà essere compreso nel tipo Φ, cosicchè determinando opportunamente i coefficienti di Φ si potrà porre:

$$
\Delta \Psi = \Phi .
$$

(¹) Cfr. l. c. § VIII art. 89.

Concludiamo pertanto che il numero dei covarianti linearmente indipendenti del tipo:

$$\dots D_{\zeta z}^{i_3} \, D_{\eta y}^{i_2} \, D_{\xi x}^{i_1} . \Phi$$

è dato da $\varphi(\mu - i_1, \nu - i_2, \lambda - i_3, \dots)$, giacchè questo è il numero dei covarianti indipendenti del tipo Ψ.

5. Di qui è facile dedurre che *il numero dei covarianti linearmente indipendenti del tipo*:

$$\dots \Delta_{\zeta z}^{\varepsilon_3} \, \Delta_{\eta y}^{\varepsilon_2} \, \Delta_{\xi x}^{\varepsilon_1} . \Phi$$

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ *sono esponenti che possono avere soltanto i valori* 0 *ed* 1 *è dato da*:

$$\varphi(\mu - \varepsilon_1, \nu - \varepsilon_2, \lambda - \varepsilon_3, \dots)$$

Indichiamo infatti il numero di tali covarianti con τ. Per la proprietà dell'art. 3, relativa alle operazioni $\Delta_{\xi x}$ si può porre:

$$\dots \Delta_{\zeta z}^{\varepsilon_3} \, \Delta_{\eta y}^{\varepsilon_2} \, \Delta_{\xi x}^{\varepsilon_1} \Phi = \dots \Delta'^{\varepsilon_3}_{\zeta z} \, \Delta'^{\varepsilon_2}_{\eta y} \, \Delta'^{\varepsilon_1}_{\xi x} \dots D_{\zeta z}^{\varepsilon_3} \, D_{\eta y}^{\varepsilon_2} \, D_{\xi x}^{\varepsilon_1} . \Phi \, .$$

onde si vede che:

$$\tau \leqq \varphi(\mu - \varepsilon_1, \nu - \varepsilon_2, \lambda - \varepsilon_3, \dots)$$

giacchè la funzione:

$$\dots D_{\zeta z}^{\varepsilon_3} \, D_{\eta y}^{\varepsilon_2} \, D_{\xi x}^{\varepsilon_1} . \Phi$$

dipende appunto, per l'art. precedente, da $\varphi(\mu - \varepsilon_1, \nu - \varepsilon_2, \lambda - \varepsilon_3, \dots)$ costanti arbitrarie.

Se ora operiamo sull'identità:

$$\Phi = \Delta_{\xi x} \Phi + H_{\xi x} \Phi$$

con l'operazione $D_{\xi x}$, otteniamo:

$$D_{\xi x}^{\varepsilon_1} \Phi = D_{\xi x}^{\varepsilon_1} \, \Delta_{\xi x}^{\varepsilon_1} \Phi$$

poichè per l'art. 3 si ha:

$$D_{\xi x} H_{\xi x} \Phi = 0 \, .$$

Operando su questa identità con $D_{\eta y}$ abbiamo:

$$D_{\eta y}^{\varepsilon_2} \, D_{\xi x}^{\varepsilon_1} \Phi = D_{\xi x}^{\varepsilon_1} \, \Delta_{\xi x}^{\varepsilon_1} \, D_{\eta y}^{\varepsilon_2} \Phi = D_{\xi x}^{\varepsilon_1} \, \Delta_{\xi x}^{\varepsilon_1} . \, D_{\eta y}^{\varepsilon_1} \, \Delta_{\eta y}^{\varepsilon_2} . \Phi \, ,$$

e così di seguito, sinchè avremo:

$$\dots D_{\zeta z}^{\varepsilon_3} \, D_{\eta y}^{\varepsilon_2} \, D_{\xi x}^{\varepsilon_1} . \Phi = \dots D_{\zeta z}^{\varepsilon_3} \, D_{\eta y}^{\varepsilon_2} \, D_{\xi x}^{\varepsilon_1} \dots \Delta_{\zeta z}^{\varepsilon_3} \, \Delta_{\eta y}^{\varepsilon_2} \, \Delta_{\xi x}^{\varepsilon_1} . \Phi \, ,$$

onde poichè il primo membro contiene $\varphi(\mu - \varepsilon_1, \nu - \varepsilon_2, \lambda - \varepsilon_3, \dots)$ costanti arbitrarie ed il secondo dipende dalla funzione:

$$\dots \Delta_{\zeta z}^{\varepsilon_3} \, \Delta_{\eta y}^{\varepsilon_2} \, \Delta_{\xi x}^{\varepsilon_1} . \Phi$$

che, per supposto, ne contiene τ, dovrà essere:

$$\tau \geqq \varphi(\mu - \varepsilon_1, \nu - \varepsilon_2, \lambda - \varepsilon_3, \dots)$$

Da questa diseguaglianza e dalla precedente concludiamo evidentemente:

$$\tau = \varphi(\mu - \varepsilon_1, \nu - \varepsilon_2, \lambda - \varepsilon_3, \ldots)$$

c. d. d.

6. Avendo così determinato il numero dei covarianti dei tipi;

$$(4) \qquad \ldots \Delta_{\zeta z}^{\varepsilon_3} \Delta_{\eta y}^{\varepsilon_2} \Delta_{\xi x}^{\varepsilon_1} . \Phi$$

è facile esprimere per mezzo di questi numeri il numero cercato dei covarianti del tipo:

$$(3) \qquad \ldots H_{\zeta z} H_{\eta y} H_{\xi x} . \Phi .$$

L'espressione cui si giunge è affatto analoga a quella del covariante (3) in funzione dei covarianti (4), cioè:

$$(5) \qquad \ldots H_{\zeta z} H_{\eta y} H_{\xi x} . \Phi = \ldots (1 - \Delta_{\zeta z})(1 - \Delta_{\eta y})(1 - \Delta_{\xi x}) . \Phi$$

che ci è fornita immediatamente dalle identità (2).

Siano H, H' H'', ..., $H^{(r)}$, $r+1$ fra le operazioni:

$$H_{\xi x}, H_{\eta y}, H_{\zeta z}, \ldots$$

prese in un ordine qualunque e Δ', Δ'', $\Delta^{(\rho)}$, ρ fra le operazioni:

$$\Delta_{\xi x}, \Delta_{\eta y}, \Delta_{\zeta z}, \ldots,$$

tali però che nel prodotto:

$$(6) \qquad H . H' \ldots H^{(r)} . \Delta' . \Delta'' \ldots \Delta^{(\rho)} . \Phi$$

non figurino simultaneamente l'operazione $H_{\pi p}$ e l'operazione $\Delta_{\pi p}$ che corrispondono ad una stessa coppia di variabili p, π.

Ponendo per brevità:

$$H' . H'' \ldots H^{(r)} = \Pi(H)$$
$$\Delta' . \Delta'' \ldots \Delta^{(\rho)} = \Pi(\Delta)$$

si ha, per le identità (2):

$$(7) \qquad \Pi(H) . \Pi(\Delta) . \Phi = \Delta_{\pi p} . \Pi(H) . \Pi(\Delta) . \Phi + H_{\pi p} . \Pi(H) . \Pi(\Delta) . \Phi ,$$

onde si vede come la forma (6) si esprime quale differenza di due forme dello stesso tipo che contengono *un fattore* H *di meno*, potendo invece contenere un fattore Δ di più.

Indichiamo con ψ, ψ', ψ'', risp. i numeri di covarianti linearmente indipendenti compresi risp. nelle tre forme:

$$H_{\pi p} . \Pi(H) . \Pi(\Delta) . \Phi$$
$$\Pi(H) . \Pi(\Delta) . \Phi$$
$$\Delta_{\pi p} . \Pi(H) . \Pi(\Delta) . \Phi .$$

Dico che essi sono legati dalla medesima relazione (7) che lega le forme stesse, cioè che:

$$\psi' = \psi'' + \psi .$$

Innanzi tutto dalla relazione (7) si ha evidentemente:

$$\psi' \leqq \psi'' + \psi .$$

D'altra parte se Φ' e Φ'' sono due covarianti del tipo Φ presi affatto ad arbitrio,

possiamo dimostrare che le costanti di Φ possono sempre determinarsi in modo da avere identicamente:

$$\Pi(H).\Pi(\Delta).\Phi = \Delta_{\pi p}.\Pi(H)\Pi(\Delta).\Phi' + H_{\pi p}\Pi(H)\Pi(\Delta).\Phi''.$$

A tale scopo basta prendere evidentemente:

$$\Phi = \Delta_{\pi p}\,\Phi' + H_{\pi p}\,\Phi''.$$

Poichè ora, per la seconda delle proprietà ricordate all'art. 3., fra le forme dei due tipi:

$$\Delta_{\pi p}\left\{\Pi(H).\Pi(\Delta).\Phi'\right\}$$

$$H_{\pi p}\left\{\Pi(H).\Pi(\Delta).\Phi''\right\}$$

non può aver luogo alcuna relazione lineare, la (7) ci dà precisamente:

$$\psi' = \psi'' + \psi.$$

7. Poichè di qui si ha:

$$\psi = \psi' - \psi''$$

si vede come il numero ψ si compone per mezzo di numeri analoghi che si riferiscono a derivate con un minor numero di operazioni H, onde applicando a questi numeri lo stesso procedimento, e così continuando, si verrà infine ad esprimere ψ per mezzo dei numeri $\varphi(\mu - \varepsilon_1,\ \nu - \varepsilon_2,\ \lambda - \varepsilon_3, \ldots)$, trovati sopra, che ci davano appunto il numero dei covarianti del tipo:

$$\Pi(\Delta).L = \ldots \Delta_{\zeta z}^{\varepsilon_3}\ \Delta_{\eta y}^{\varepsilon_2}\ \Delta_{\xi x}^{\varepsilon_1}.\Phi.$$

Di più, essendo le successive relazioni lineari fra i numeri ψ quelle stesse che legano le forme a cui essi risp. si riferiscono, per avere il numero dei covarianti linearmente indipendenti del tipo (6) basterà esprimere questo tipo in funzione dei tipi $\Pi(\Delta)\Phi$ e sostituire in luogo di ciascuno di questi il numero di covarianti indipendenti che esso rappresenta. Così per es. dalla relazione già notata:

$$H_{\eta y}\ H_{\xi x}.\Phi = (1 - \Delta_{\eta y})\ (1 - \Delta_{\xi x}).\Phi = \Phi - \Delta_{\eta y}\,\Phi - \Delta_{\xi x}\,\Phi + \Delta_{\eta y}\,\Delta_{\xi x}\,\Phi$$

si deduce che il numero dei covarianti linearmente indipendenti del tipo:

$$H_{\eta y}\ H_{\xi x}.\Phi$$

è dato da

$$\varphi(\mu,\nu,\lambda,\ldots) - \varphi(\mu-1,\ \nu,\lambda,\ldots) - \varphi(\mu,\nu-1,\ \lambda,\ldots) + \varphi(\mu-1,\ \nu-1,\ \lambda,\ldots).$$

8. Dalla relazione (5) si vede dunque che il numero da noi cercato dei covarianti linearmente indipendenti del tipo:

$$\ldots H_{\zeta z}\ H_{\eta y}\ H_{\xi x}.\Phi$$

si può rappresentare per mezzo dei numeri partitivi $\varphi(\mu,\ \nu,\ \lambda,\ldots)$ in un modo assai semplice.

Se poniamo simbolicamente:

$$\varphi(\mu - \varepsilon_1,\ \nu - \varepsilon_2,\ \lambda - \varepsilon_3,\ldots) = \varphi_1^{\varepsilon_1}\ \varphi_2^{\varepsilon_2}\ \varphi_3^{\varepsilon_3}\ldots,$$

esso sarà rappresentato dal prodotto:

$$(\varphi_1^0 - \varphi_1)\ (\varphi_2^0 - \varphi_1)\ (\varphi_3^0 - \varphi_3)\ldots$$

9. Avendo così risoluto il problema propostoci all'art. 2, resta risoluto contemporaneamente il problema, che forma l'oggetto della presente Memoria, di determinare il numero dei covarianti linearmente indipendenti, Ψ, di:

$$F = a_x^{\alpha}\ b_y^{\beta}\ c_z^{\gamma} \dots$$

che sono di un dato grado g nei coefficienti di questa forma e di dati gradi $g_1, g_2, g_3, \dots$ nelle serie $x, y, z, \dots$ risp.

Se poniamo infatti:

$$\frac{g\alpha - g_1}{2} = \mu, \quad \frac{g\beta - g_2}{2} = \nu, \quad \frac{g\gamma - g_3}{2} = \lambda, \dots,$$
$$\frac{g\alpha + g_1}{2} = m, \quad \frac{g\beta + g_2}{2} = n, \quad \frac{g\gamma + g_3}{2} = l, \dots,$$

il numero cercato coincide con quello, trovato sopra, dei covarianti, di pesi nulli, Φ, dei gradi $m, n, l, \dots$ nelle $x, y, z, \dots$ e dei gradi $\mu, \nu, \lambda, \dots$ nelle variabili *ausiliarie* $\xi, \eta, \zeta, \dots$, che soddisfano alle equazioni differenziali:

$$(1) \qquad D_{\xi x}\ \Phi = 0\,, \quad D_{\eta y}\,\Phi = 0\,, \quad D_{\zeta z}\,\Phi = 0\,, \dots$$

o, che è lo stesso, che appartengono al tipo:

$$(3) \qquad \dots H_{\zeta z}\ H_{\eta y}\ H_{\xi x}\,.\,\Phi\,.$$

Infatti se Ψ è uno qualunque dei covarianti di cui cerchiamo il numero, il prodotto:

$$\dots(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)^{\lambda}\ (\eta_1 y_2 - \eta_2 y_1)^{\nu}\ (\xi_1 x_2 - \xi_2 x_1)^{\mu}\,.\,\Psi$$

è un covariante del tipo Φ che soddisfa evidentemente alle equazioni differenziali (1), epperò appartiene al tipo (3). Reciprocamente ogni covariante Φ che soddisfa alle (1) è divisibile per il prodotto:

$$\dots(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)^{\lambda}\ (\eta_1 y_2 - \eta_2 y_1)^{\nu}\ (\xi_1 x_2 - \xi_2 x_1)^{\mu}$$

ed il quoziente sarà un covariante Ψ. Pertanto ad ogni covariante Φ corrisponde un covariante Ψ e reciprocamente, e se fra gli uni ha luogo una relazione lineare, la stessa relazione lineare ha luogo evidentemente fra i corrispondenti, onde si conclude che il numero dei covarianti Ψ è uguale a quello dei covarianti Φ come si era asserito.

10. In particolare, nel caso di una semplice *corrispondenza*:

$$F = a_x^{\alpha}\ b_y^{\beta}$$

per avere il numero dei covarianti di grado g nei coefficienti di F e risp. dei gradi g_1, g_2 nelle x ed y basterà prendere:

$$\mu = \frac{g\alpha - g_1}{2}, \quad \nu = \frac{g\beta - g_2}{2}$$
$$m = \frac{g\alpha + g_1}{2}, \quad n = \frac{g\beta + g_2}{2}$$

ed il numero cercato sarà dato da:

$$\varphi(\mu, \nu) - \varphi(\mu - 1, \nu) - \varphi(\mu, \nu - 1) + \varphi(\mu - 1, \nu - 1)\,.$$

Per una forma fondamentale a tre serie di variabili:

$$F = a_x^{\alpha}\ b_y^{\beta}\ c_z^{\gamma},$$

fatte le posizioni analoghe, il numero dei covarianti sarà espresso da:

$$\begin{gathered}\varphi(\mu, \nu, \lambda)\\ -\varphi(\mu, \nu, \lambda-1) - \varphi(\mu, \nu-1, \lambda) - \varphi(\mu-1, \nu, \lambda)\\ +\varphi(\mu, \nu-1, \lambda-1) + \varphi(\mu-1, \nu, \lambda-1) + \varphi(\mu-1, \nu-1, \lambda)\\ -\varphi(\mu-1, \nu-1, \lambda-1)\end{gathered}$$

etc. etc.

Sui Copepodi
che vivono nelle Ascidie composte del Golfo di Napoli.

Memoria del dott. ANTONIO DELLA VALLE

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 1 aprile 1883.

(con una tavola)

Se si potesse prestar fede alle *Observations sur des crustacés rares ou nouveaux des côtes de France*, pubblicate a più riprese da Eugenio Hesse, si dovrebbe credere che le ascidie composte del porto di Brest siano albergo di un numero considerevole di forme diverse di copepodi. L'Hesse, almeno, in quattordici anni, dal 1864 al 1878, vi ha distinto ben quarantadue specie nuove, e queste ha ripartite in venti generi, di cui diciannove egli dà come nuovi. Io, in Napoli, ho trovate solo tre specie di copepodi, che vivono nell'interno dei singoli ascidiozoi: due già conosciute per le pubblicazioni di P. J. v. Beneden, e del Kerschner, cioè l'*Enterocola fulgens*, e la *Doroixys uncinata*, l'altra, che non trovo finora descritta, e che per i suoi caratteri obbliga a fondare anche un nuovo genere (*Kossmechthrus*).

Spesso, tagliando una colonia di *Aplidium cristallinum* o di *A. gibbulosum*, e talvolta anche sezionando qualche Didemnide, soprattutto di quelli che hanno cormo carnoso, e vengono pescati dalle acque profonde, avviene di trovare, in mezzo alla sostanza bianco-giallastra dell'ascidiario, piccole masse di colore ametistino assai vivace. Un esame alquanto più attento fa notare, che la sede di questi corpi è nell' interno delle singole ascidie, e che si tratta di sacchi oviferi di uno speciale copepodo, che ha scelto quel luogo per sua dimora. È molto facile, che, parte per la lacerazione del corpo degli ascidiozoi, allorchè si è fatto il taglio, parte per movimenti attivi proprî, l'animale contenuto venga fuori, e comparisca libero in mezzo al detrito. Trovandosi allora a disagio in questo nuovo ambiente, non tarda a contorcersi variamente, e soprattutto ad incurvarsi ad arco, ravvicinando le due metà del dorso, e lasciando così vedere parte delle sue appendici, che prima, nella quiete, rimanevano nascoste. Chi è abituato a vedere siffatto animale, e ne segue successivamente le varie maniere di atteggiarsi, non prova alcuna difficoltà nel riconoscerlo poi in qualunque nuova posizione. Nè si confonde se lo vede senza sacchi oviferi, ed anche senza uova nel corpo, e nemmeno se lo vede apparire ora più o meno grande e gonfio, e di colore amaranto o roseo, ora piccolo ed angusto, con una tinta bianchiccia, o tendente al giallo. Non avviene lo stesso se l'osservazione è poco attenta.

Io sono venuto nella convinzione che precisamente la metà dei generi nuovi, e delle nuove specie fondate dall' Hesse, cioè 10 generi e 21 specie, siano da abolirsi. Difatti, confrontando le sue figure, e mettendole in riscontro con i diversi aspetti

dell'animale giovane o adulto, con uova o senza, ripiegato o in quiete, e tenendo pure tutto il conto possibile dei pochi caratteri, che egli dà nelle sue descrizioni, versanti per lo più su fatti accessorî, e di nessun valore in classificazione, è facile dimostrare che lo scrittore francese ha dichiarato come sempre nuovo, almeno per ventuna volta quel copepodo che 18 anni prima di lui, nel 1846, P. J. v. Beneden aveva descritto col nome di *Enterocola fulgens* (¹).

È molto singolare il luogo di dimora dell'*Enterocola*, giacchè mentre la *Doroixys*, ed il *Kossmechthrus*, come in generale i copepodi commensali delle ascidie semplici, albergano nel sacco branchiale, o almeno nella cavità peribranchiale, invece il crostaceo, di cui discorriamo, se ne sta rimpiattato nello *stomaco* del suo ospite. Ed in questo io trovo una differenza con quello che asserisce il v. Beneden dell'animale, che vive nell'*Aplidium ficus*, e nell'*A. ficoides*, cioè che « se blottit dans le premier compartiment » dell'ascidiozoo. Anche il Giard, parlando dei parassiti e commensali

(¹) P. J. v. Beneden, *Un nouveau genre de crustacé lernéen*. Bull. de l'Acad. de Belgique, t. IX, 2.^{me} Sér. Secondo la mia opinione, i generi e le specie da abolirsi sono:

Adranesius
elatus
ruber
Biocryptus
calthaeus
flavus
roseus
Cryptopodus
albus
angustus
crassus
flavus
viridis
Hypnodes
flavus
Lygephilus
microcephalus
violaceus
Mychophilus
pachygaster
roseus
Narcodes
macrostoma
Pachynestes
violaceus
Polycliniophilus
corisoformis
forficula
similis
Polyoon
lacteum

V. Hesse, *Observations sur des crustacés rares ou nouveaux des côtes de France*. Ann. sc. nat. (Zool.) 1864-1878.

A proposito di sinonimia, voglio quì aggiungere che il copepodo descritto come nuova specie, col nome di *Stellicola Kossmanniana*, a p. 95 del vol. VI, 1881, del Bollettino della Società adriatica di scienze naturali in Trieste, dal mio quasi omonimo A. Valle, non era già nuovo, ma bensì semplicemente una femmina giovane del *Lichomolgus Pteroidis*, di cui io nella mia pubblicazione: *Sui Coriceidi parassiti, e sull'anatomia del genere Lichomolgus*, negli Atti Acc. Lincei 1880, avea già descritti e figurati il maschio, la femmina adulta, ed anche la femmina giovane. Del resto il genere stesso *Stellicola* è un inutile ingombro nella sinonimia, non avendo saputo il suo fondatore (Kossmann, *Reise n. d. Rothen Mar.* 1877 p. 11.) assegnare per esso caratteri di qualche valore per farlo distinguere dall'antico genere *Lichomolgus* Thorell. Per contrario non deve confondersi con questi così detti *Stellicola* il genere *Asterocheres*, che Axel Boeck istituì, e che il Kossmann vorrebbe abolire, trattando quasi il Boeck da visionario. Già le ragioni che mossero il Kossmann contro il gen. *Asterocheres*, cioè il non avere egli trovato sugli echinodermi del Mar Rosso e delle Filippine da lui esaminati copepodi che corrispondessero alla descrizione data dal naturalista norvegio per animali del settentrione, non avrebbero autorizzato nessuno a mettere in dubbio l'esattezza delle asserzioni del Boeck. È noto che molti copepodi affini all'*Asterocheres*, forniti di vero apparecchio boccale, sono stati descritti, dopo del Boeck e del Kossmann, dal Brady (*A Monograph of the free and semi-parasitic copepoda of the British Irlands* Vol. III. London, 1880). Io stesso ho trovato quì in Napoli sull'*Astropecten aurantiacus* Gray un copepodo che per tutti i caratteri si accorda coll'*Asterocheres Liljeborgii* (V. Axel. Boeck. *Tvende nye parasitiske Krebsdyr.* Forhandl. Videnskab-Selskab i Christiania Aar 1859).

delle ascidie di Roscoff, pare che accenni appunto alla dimora dell' *Enterocola* non nel sacco branchiale. Se non che neppure con lui io mi trovo d'accordo. Difatti il Giard, che non ha studiato egli stesso i crostacei, accennando ad un animale dal colore violetto, che si trova in alcuni aplidi, asserisce che esso vive nell' *ovario* dell' ascidiozoo, anzi che a lungo andare mandi in rovina gli organi del suo ospite, essendo cagione ancora che tutta la colonia ne rimanga in fine deformata ([1]). Lo stesso dice pure l' Hesse del *Pachynestes violaceus* e del *Polyoon lacteum* ([2]), ma io questa deformazione non l' ho mai veduta per le ascidie composte del nostro golfo. Lo stomaco, l' intestino, il sacco branchiale, e tutto l'organismo dell'ascidiozoo non soffrono minimamente della presenza dell'ospite. Il quale se ne sta tranquillamente nel fondo del suo nascondiglio, coll' estremità anteriore del suo corpo rivolta verso il cardias, e con la posteriore ricurva verso il piloro, o insinuata nel principio dell'intestino, dove manda i suoi due lunghi sacchi oviferi, che restano così spesso avvolti dalle materie fecali. Sotto quest'ultimo riguardo potremmo paragonare il commensale in esame alla femmina matura del *Botachus cilindratus* Thorell, che, siccome è noto, non vive al pari degli altri notodelfidi, anzi dei maschi della medesima specie, e delle femmine stesse giovani, nel sacco branchiale, ma nel tubo digerente di alcune ascidie semplici, e propriamente non nello stomaco, ma nell'ultima parte dell'intestino in mezzo alle feci ([3]).

Insieme all' *Enterocola* non di raro nella stessa colonia di sinascidie si trova anche il piccolo notodelfide recentemente descritto dal Kerschner, cioè la *Doroixys uncinata* ([4]), ma questo appunto si ferma nel sacco branchiale. Anzi talvolta è curioso vedere che uno stesso ascidiozoo porta nel suo interno ambedue i commensali, uno nella cavità branchiale, l'altro nello stomaco, e nell' intestino. Eppure, l'ascidiozoo non ostante la presenza di due diversi ospiti, in due diverse parti del corpo, non è meno vigoroso degli altri individui della colonia, senza ospiti. La *Doroixys* io l'ho trovata in molte specie delle nostre sinascidie; piuttosto abbondante nell'*Aplidium cristallinum*, e nell' *A. gibbulosum*, più raro nel *Fragarium areolatum*, nella *Diazona violacea*, e nella *Perophora Listeri*.

Il terzo copepodo rinvenuto da me nelle sinascidie di Napoli è molto più raro dei due precedenti, giacchè si limita esclusivamente alla cavità branchiale del nuovo distomide da me altrove ([5]) descritto, sotto il nome di *Distoma Pancerii*. Ivi la sua presenza è facile a scoprire pel vivace colore rosso-scarlatto dell'animale e pel verdecupo del sacco ovifero, che spicca in mezzo alla massa bianco-livida della colonia, non ostante la poca trasparenza della cavità branchiale degli ascidiozoi.

Un fatto comune a tutte e tre le specie di copepodi commensali delle nostre ascidie composte è questo, che dentro dell' ospite non vive se non la sola femmina,

([1]) Giard, *Recherches sur les ascidies composées*. Arch. zool. exp. t. I, 1872, p. 555.

([2]) Hesse, *Observations* ecc. Ann. sc. nat. 1878, VII.

([3]) Wilh. Giesbrecht, *Beiträge zur Kenntniss einiger Notodelphyiden*. Mittheil. d. Zoolog. Station zu Neapel 1882, p. 296.

([4]) Kerschner, *Ueber zwei neuen Notodelphyiden* ecc. Denkschriften d. Akad. d. Wissensch. Wien. Math. Naturw. Classe, Bd. XLI, 1879.

([5]) Della Valle, *Contribuzioni alla storia naturale delle ascidie composte del golfo di Napoli*, 1877.

la quale, intanto, entra nell'ascidia già dopo la fecondazione, per attendere in questo luogo tranquillamente all'incubazione delle uova. Almeno a me non è mai avvenuto di trovare un maschio di qualcuna delle specie più volte nominate, quantunque abbia fatto speciali ricerche per questo fine. Solo ho veduto *Enterocola* e *Kossmechthrus* senza sacchi oviferi, o *Doroixys* senza sacco incubatore pieno d'uova, ma anche questi individui erano semplicemente giovani femmine, siccome dimostra la presenza delle uova nell'interno del loro corpo.

Ho già detto che due delle specie dei copepodi che vivono nelle Ascidie composte del nostro golfo, e propriamente l'*Enterocola* e la *Doroixys*, sono già conosciute per pubblicazioni antecedenti. Della *Doroixys* ha già dato un'esatta descrizione il Kerschner, il quale l'ha trovata nel golfo di Trieste, ed io reputo inutile aggiungere altre parole su di esso [1]. Non così per l'*Enterocola fulgens*; giacchè la descrizione che ne fece il v. Beneden è troppo superficiale, sopratutto per ciò che riguarda le parti boccali, e cade pure in molte inesattezze. Più tardi ha parlato dell'*Enterocola* anche il Claus, aggiungendo maggiori particolarità nell'esposizione dei caratteri, specialmente per ciò che riguarda le parti boccali [2]; ma neppure le sue osservazioni si accordano con le mie. Anzi io credo che il Claus non ha veduto veramente lo stesso animale che io ho esaminato in Napoli, siccome apparisce dalle differenze che io andrò a mano a mano notando.

Enterocola fulgens van Beneden.

Figg. 3-10.

FEMMINA. — Il corpo dell'animale è diviso in dieci segmenti, di cui il primo risulta dalla riunione dell'anello cefalico col primo anello del torace. Questo cefalotorace è di figura semicircolare, e presenta verso la parte anteriore della sua faccia superiore una macchia di pigmento rosso, che è l'occhio. Seguono altri cinque anelli toracici, di cui i quattro anteriori sono tutti eguali per le dimensioni, e per la forma rettangolare, ed il quinto, invece, alquanto più piccolo, presenta due espansioni membranose, che si prolungano indietro ed infuori, e coprono così gli sbocchi degli ovidutti, e quindi il principio dei sacchi oviferi. L'addome è molto corto, sicchè appare come una piccola appendice posta all'estremità posteriore del corpo; è di forma conica, e consta, al solito, di quattro anelli [3], siccome ha pure veduto il Claus. Il v. Beneden dice, nella descrizione che egli dà del suo *Enterocola*, che l'addome è senza segmenti, ma la sua asserzione è contradetta da lui stesso nella sua figura 4,

(1) Le imperfette descrizioni dell'Hesse, non aiutate questa volta nemmeno da figure, non permettono di giudicare con sicurezza del valore delle nuove specie da lui stabilite pel genere *Doropygus*, con i copepodi trovati nelle ascidie composte del porto di Brest. D'altra parte i caratteri accennati come distintivi delle nuove specie: *D. globosipherus*, *D. oblongus*, *D. rufescens*, e *D. sphaerasipherus*, convengono egualmente tutti con quelli delle *Doroixys*.

(2) C. Claus, *Neue Beiträge zur Kenntniss parasitischer Copepoden* ecc. Zeitschr. wiss. Zoolog. 1875, p. 351-352. Tav. XXIV, fig. 31 (Junges Weibchen).

(3) Sulla maniera come io intenda che si debba distinguere la divisione del torace dei copepodi dall'addome cf. la mia pubblicazione: *Sui Coriceidi parassiti, e sull'Anatomia del gen. Lichomolgus.*

in cui è disegnata la parte posteriore dell'animale, e si vedono appunto alcune linee orizzontali che accennano alla segmentazione.

Antenne. Antenne del primo paio. Queste antenne sono relativamente corte, ed hanno una forma conica. Risultano di tre articoli, di cui il primo è molto rigonfio e costituisce quasi da solo tutta l'antenna, essendo di lunghezza circa tre volte quella degli altri due riuniti insieme. All' estremità dell' ultimo articolo sono inserite due setole, o meglio, spine, piuttosto grosse, ma corte.

Le *antenne del secondo paio* sono più grandi di quelle del primo, e di forma anche differente. Il Claus per ambedue le paia di antenne segna: « Die Antennen bleiben kurz und rudimentär, beide undeutlich zweigliederig ». Il v. Beneden inclina a considerare il secondo paio di antenne, come primo paio di piedi mascellari, e trova « la plus complète ressemblance entre ces appendices réunis et les quatre pattes thoraciques ». Invece nell'animale che si trova nell' interno delle nostre ascidie composte, le antenne del secondo paio non presentano alcuna traccia di segmentazione, ed hanno una forma laminare, come di una spatola, col manico alquanto ricurvo, inserito sulla faccia inferiore del cefalotorace, e colla parte larga rivolta infuori. Sul contorno di questa parte dilatata sono disposte, quasi ad uguale distanza fra loro, sei forti spine. Non ostante le loro maggiori dimensioni queste antenne del secondo paio non si veggono quasi mai nell'animale vivo sporgere dalle parti laterali del cefalotorace, ma se ne stanno adagiate nella superficie inferiore. Al contrario le antenne del primo paio, essendo inserite molto avanti, sporgono spesso nella parte anteriore, come nel maggior numero dei copepodi, e quindi riescono facilmente visibili.

Parti boccali. Le *mandibole* sono rappresentate da forti lamine, alquanto ristrette verso la parte interna come per formare un peduncolo, e dilatate nella parte esterna. Nel peduncolo, verso il mezzo del margine superiore, è inserita una grossa setola o spina, munita di ciglia. Il margine libero della porzione esterna laminare, è armata di sei forti spine con i margini seghettati.

Le *mascelle* rassomigliano quasi ad un coltello con larga lamina, e largo manico. La parte libera è di forma triangolare, e presenta, nella faccia inferiore, lungo il margine libero, un inspessimento, come un' incorniciatura, da cui viene limitata una cavità angolare, coll'apice verso la punta. Verso il margine inferiore, là dove la mascella si restringe per formare quello che si potrebbe dire *collo*, è inserita una grossa spina ciliata, che nella sua parte basilare presenta un rigonfiamento o cercine, diviso a sua volta dalla superficie delle mascelle da uno strozzamento, o peduncolo, per mezzo di cui s'inserisce sopra di un tubercolo. Nè le mandibole, nè le mascelle presentano traccia di segmentazione.

I *piedi mascellari* hanno nell' insieme una forma conica, un aspetto grossolano e tozzo; lasciano vedere tutti e due una traccia di segmentazione. I piedi mascellari anteriori hanno il secondo articolo bifido, con i due lati di dimensioni ineguali, e propriamente con l'anteriore più grande del posteriore, privi affatto di setole, di spine, o altre appendici. I piedi mascellari posteriori differiscono dagli anteriori per dimensioni, e soprattutto per la forma. Di fatto sono più piccoli, ed il secondo segmento non è bifido, ma semplice, col margine interno e porzione della superficie inferiore rivestita di molte piccole setole.

Il Claus dice del suo copepodo: « Breite conische Mandibeln liegen unterhalb der Oberlippe, an deren Seiten kleine tasterähnliche Maxillen hervortreten. Dann folgen zwei Paare sehr gedrungenen Greiffüsse, die den Kieferfüssen entsprechen ». Il che, come ognun vede, non corrisponde niente affatto alla descrizione ed alle figure che da me vengono date.

Piedi. I *piedi* sono nel numero di quattro paia, e tutti hanno la stessa conformazione, senza traccia di segmentazione. Ogni piede consta di una brevissima parte basilare, e di due rami, di cui l'interno è molto più sviluppato dell'esterno. Quest'ultimo, anzi, è ridotto ad una piccola appendice cilindroide, terminata da due setole brevissime; l'altro è un grosso corpo ellissoidale, che ha l'estremità libera bilobata, e ciascun lobo, di forma allungata, e conica, è munito di una forte e lunga spina.

Furca. La *furca* consta di due piccole appendici ellissoidali, affatto inermi e nude, senza setole, e senza spine, o uncini. Invece il Claus dice che l'animale da lui esaminato ha una furca, che, al pari dei piedi, invece di finire con lunghe setole, termina con uncini.

L'*apparecchio digerente* si può dire rappresentato da un semplice sacco allungato, di forma quasi conica, con la base convessa che si estende fino al punto di riunione del terzo posteriore col terzo medio del cefalotorace, e, quindi, calcolando le dimensioni dei segmenti toracici liberi, fino al punto in cui comincia il vero torace. La porzione posteriore di questo sacco digerente è più ristretta, ma non giunge mai a prendere la forma cilindrica; cioè che il restringimento del lume si va continuando sempre più dalla parte anteriore, fino all'estremità posteriore del corpo, dove si apre l'orificio anale nello spazio compreso fra le inserzioni delle due appendici addominali. La parete di questo sacco è molto sottile, ed è tappezzata nella sua superficie interna di cellule sferoidali.

Di *apparecchio circolatorio* o *respiratorio* speciale non si vede alcuna traccia. L'*apparecchio riproduttore* femminile consta d'una *glandola ovarica*, e di due *ovidutti.* La *glandola* è situata nella parte anteriore del corpo, sulla faccia superiore dello stomaco; ed è di forma conica, con l'apice indietro, che raggiunge il margine anteriore del terzo segmento toracico libero, e con la base in avanti, a livello dell'articolazione del cefalotorace col primo segmento toracico libero. Dalla base, che è biforcata, partono due rami, che si ricurvano indietro, e si dilatano subito in due ovidutti, che decorrono paralleli indietro, e vanno a terminare nel sesto segmento toracico, o segmento genitale, sotto delle appendici laterali, di cui questa parte del corpo è provveduta. Le *uova* mature sono piuttosto voluminose, e sono bellissime pel loro colore amaranto, che trasparisce assai bene attraverso i sottili tegumenti del copepodo, il quale per tal guisa viene subito riconosciuto anche nell'interno dell'ascidiozoo, non ancora aperto. L'incubazione si fa in due speciali *sacchi oviferi,* cilindroidei, che aderiscono agli sbocchi degli ovidutti, e si distendono liberamente indietro per una lunghezza spesso eguale a quella dell'intero animale.

Kossmechthrus notopus Della Valle.

Figg. 11-23.

Se si bada alla forma generale del corpo, questo nuovo copepodo sembra un *Doropygus*, o altro crostaceo di tal gruppo; ma, invece, facendo l'esame delle singole parti dell'animale, compariscono differenze di somma importanza, le quali fanno vedere chiaramente che le somiglianze si hanno semplicemente alla superficie.

Il capo è piriforme, e la parte anteriore rigonfia presenta una segmentazione ben distinta negl'individui più giovani, ma solo appena accennata nelle femmine mature, siccome d'altra parte è il caso comune anche ad altri animali che vivono una vita parassita. La parte posteriore, invece, assottigliata come una coda, è bene segmentata così nelle femmine giovani come nelle adulte. La prima parte, cioè la rigonfia, è divisa in sei segmenti, di cui il 1°, molto più grande degli altri, rappresenta un cefalotorace; il 2°, ed il 3°, sono presso a poco uguali fra loro; il 4°, alquanto più largo dei due precedenti, si estende nondimeno per la parte dorsale e solo per la parte dei fianchi, in guisa da lasciare scoperto parte del 6° segmento toracico. Il 5° segmento, che porta i piedi, è molto piccolo, e più ridotto del 4°: il 6° è molto sviluppato, e porta le aperture sessuali. L'addome non presenta alcuna singolarità, ma lascia distinguere i quattro segmenti, tutti di eguale dimensione, e di forma cilindrica.

Antenne. Le *antenne del primo paio* sono coniche, con la base molto ingrossata, e risultano di sette anelli, di cui il primo è il più largo, ed il quinto è il più lungo. Il margine anteriore dell'appendice è munito di grosse setole, e propriamente ognuno dei primi cinque anelli porta una setola che s'inserisce sopra una speciale eminenza conica. Il sesto anello ha invece due setole, e l'ultimo, o settimo, ne presenta cinque, di cui quattro piccole ed una grande.

Le *antenne del secondo paio* hanno una lunghezza doppia di quelle del primo paio, ma sono triarticolate, e di forma cilindroidea. Il primo articolo è il più lungo dei tre, ed è cilindrico; il secondo, molto corto, è trapezoidale; l'ultimo è quasi triangolare, e nel suo margine anteriore è munito di sei setole, di cui due piccole, ma forti, e disposte più verso l'interno, e quattro più lunghe impiantate verso l'estremità libera.

Parti boccali. Le *mandibole* constano di una parte basilare e di due rami. La parte basilare è breve e di forma irregolare. Il ramo interno è molto più piccolo dell'esterno, e costituisce un vero organo masticatorio. È di forma triangolare coll'angolo anteriore sottile, e molto acuto, e coll'angolo posteriore più ottuso. Il margine interno è armato di dentellature, finissime nella parte anteriore, più grossolana nella posteriore, dove esiste pure una profonda incisura che separa i due ultimi denti. Il ramo esterno, o palpo mandibolare, è formato di tre articoli, il primo dei quali è cuboide, e sfornito di setole; il secondo è della stessa larghezza del primo, ma più corto, e munito nel suo margine esterno di tre setole ciliate. Finalmente l'ultimo articolo, di una lunghezza maggiore di quella degli altri due presi insieme, nella sua estremità libera presenta quattro setole ciliate.

Le *mascelle* sono pure formate di due rami: l'esterno più piccolo, con quattro setole non ciliate, poste sull'estremità libera; il ramo interno più grosso e più largo, coll'estremità fornita di sei larghe setole ciliate.

Il *primo paio di piedi mascellari* è relativamente poco sviluppato, e consta di una semplice lamina quadrangolare, munita di sei setole robustissime.

Il *secondo paio di piedi mascellari* è molto grosso, e nell'animale si vede sporgere molto oltre il livello delle parti vicine. È di forma conica, e risulta di tre segmenti, di cui il primo è il più grande, e l'ultimo il più piccolo, tutti senza setole. L'organo è terminato da un valido uncino ricurvo.

Piedi. I piedi sono nel numero di cinque paia. I primi quattro sono biramosi, e presentano un'asimmetria singolare, non essendo i piedi del lato destro costituiti nella stessa forma di quelli del lato sinistro. Come è il caso ordinario dei copepodi normali, esiste in ogni piede del *Kossmechthrus notopus* una parte basilare biarticolata, e due rami, ma di questi alcuni sono uniarticolati, altri biarticolati. Difatti mentre i piedi del primo e del secondo paio hanno ambedue i rami uniarticolati, quelli del terzo e del quarto hanno uniarticolato il ramo esterno e biarticolato l'interno. In quanto all'asimmetria, questa si può constatare in tutte le parti del piede, siccome si vede nelle figure, ma si palesa specialmente nella forma dell'articolo del ramo esterno, e nella lunghezza delle setole. In generale si nota che le setole del ramo esterno di destra sono più lunghe di quelle di sinistra.

Nel quadro seguente sono segnati in confronto i caratteri principali dei rami dei piedi del lato destro e quelli del lato sinistro.

DESTRA	SINISTRA
1° paio di piedi.	
Ramo esterno. Piuttosto lungo, alquanto curvo, col margine interno concavo, coll'esterno e posteriore liscio, convesso, armato di sei spine forti, ma corte.	*Ramo esterno.* Di lunghezza eguale a quello di destra, ma di forma irregolare, col margine esterno e posteriore tutto irregolare, con sei setole, molto più grosse di quelle di destra.
R. interno. Grande, curvo, con la concavità rivolta in dietro; margine libero con sette setole ciliate; una piccola setola ricurva sulla faccia inferiore.	*R. interno.* Di forma pentagonale; dimensioni alquanto minori di destra; setole come a destra.
2° paio di piedi.	
R. esterno. Piccolo, di forma irregolare, con cinque spine larghe e corte.	*R. esterno.* Per grandezza un po' maggiore del ramo corrispondente del lato destro, ma di forma irregolarmente rettangolare, con cinque setole piuttosto lunghe, tre sul margine esterno, e due all'estremità.

R. interno. Conico; margine esterno convesso munito di sei setole, di cui due ciliate; margine interno concavo; piccole setole sulla faccia inferiore, verso il lato posteriore.

R. interno. Più piccolo del destro, e di forma quadrilatera, con sei setole, di cui una sola ciliata, e propriamente la più interna; piccole setole come a destra.

3° *paio di piedi.*

R. esterno. Corto, ma largo, e molto irregolare, con sei setole di varia forma, senza ciglia.

R. interno. Biarticolato; articoli cuboidi; una setola nell'articolo anteriore, e quattro nel posteriore; tutte senza ciglia.

R. esterno. Triangolare, allungato, col margine posteriore ed esterno, con sei setole non ciliate, di cui l'ultima è la più lunga.

R. esterno. Come a destra; ma gli articoli in generale più piccoli.

4° *paio di piedi.*

R. esterno. Forma triangolare irregolare; margine interno concavo; margine posteriore convesso, con sei spine corte.

R. interno. Biarticolato, con articoli cuboidi; una setola sul mezzo della faccia inferiore del primo articolo; cinque setole nel secondo, di cui due sulla faccia inferiore, e tre nell'estremità posteriore; tutte le setole senza ciglia.

R. esterno. Allungato, quadrangolare, con quattro setole lunghe, non ciliate.

R. interno. Come a destra. Nel secondo articolo vi sono quattro setole, una delle quali si distingue dalle altre per la sua lunghezza e grossezza maggiore.

I *piedi del quinto paio* si fanno notare per la loro speciale posizione sul dorso. Del resto sono eguali così a destra come a sinistra, e sono rudimentali, essendo ridotti ad una semplice eminenza conica, con la punta armata di due forti setole d'ineguale lunghezza.

Furca. L'addome termina in due appendici cilindriche, munite ciascuna nell'estremità posteriore di quattro validissimi uncini. Tre di questi sono conici ed aguzzi; il quarto è invece ottuso, e dilatato come una spatola.

L'animale porta sul dorso un sacco ovigero, interamente libero, di forma sferica, di dimensioni non molto considerevoli. Le uova non sono molto numerose, ma si fanno notare pel bellissimo loro colore verde-scuro, che spicca molto sul fondo scarlatto dell'animale.

In conclusione i caratteri generici e specifici dei due copepodi da me esaminati restano fissati nel modo che segue:

Enterocola v. Beneden 1846 (char. emend.)

Corpo allungato, completamente segmentato; antenne anteriori piccole divise in pochissimi segmenti, antenne posteriori molto maggiori delle anteriori dilatate, ma non segmentate. Mandibole dilatate non dentate, ma armate di forti spine; mascelle senza spine e senza denti, con palpo rudimentale. Piedi mascellari tubercoliformi; l'anteriore bifido, il posteriore semplice. Piedi nel numero di quattro paia, tutti non segmentati, biramosi, con rami irregolarmente sviluppati. Addome brevissimo. Due sacchi ovigeri esterni.

Enterocola fulgens v. Beneden 1846 (char. emend.)

Femmina. Antenne anteriori trisegmentate; col primo articolo che costituisce quasi da sè solo tutta l'antenna. Antenne posteriori spatoliformi col margine armato di forti spine. Ramo esterno dei piedi rudimentale. Appendici della furca affatto inermi e glabre.

Lunghezza della femmina adulta mm. 1,2. Vive nello stomaco di varî Aplididi e Didemnidi (¹).

Kossmechthrus n. g.

Corpo piriforme, completamente segmentato. Antenne anteriori grosse, corte, con pochi articoli, antenne posteriori più lunghe, ma più sottili, triarticolate. Mandibole denticolate, con palpo triarticolato; mascelle biramose non articolate; piedi mascellari anteriori forniti di setole, non articolati; piedi mascellari posteriori, molto robusti, conici, uncinati, senza setole, triarticolati. Piedi 5 paia, di cui le 4 paia anteriori posti nella faccia inferiore del torace, biramosi, articolati; ed il posteriore sul dorso, rudimentale, non articolato. Un solo sacco ovigero.

Kossmechthrus notopus n. sp.

Antenne anteriori - 7 articolate. Piedi biramosi asimmetrici; 1° e 2° paio con ambedue i rami 1 - articolati; 3° e 4° paio col ramo esterno 1 - articolato, coll'interno 2 - articolato. Furca con validi uncini, di cui uno spatoliforme.

Lunghezza della femmina adulta mm. 1,1. Vive nel sacco branchiale degli ascidiozoi del *Distoma Pancerii* Della Valle.

Giudicando dai caratteri sopraesposti per entrambi i copepodi, che albergano nell' interno delle ascidie composte del nostro Golfo, si resta in grande imbarazzo per la scelta del luogo da assegnare loro nei quadri sistematici. Per l' *Enterocola*

(¹) Il Norman (Norman A. M. *Last Shetland Dredging Report.* Report of the British Association for the advancement of science for 1868, p. 300) ha descritto nel 1868 una nuova specie di *Enterocola*, che ha chiamata *E. eruca*, fondandola su di un individuo, trovato « adhering to the intestine of *Ascidia intestinalis* ». La *Ciona intestinalis* abbondantissima nel nostro Golfo, non mi ha presentato mai nulla di simile. Del resto la brevissima ed incompleta descrizione che ne dà l'autore. senza figure, non permetterà mai ad alcuno di riconoscerè con certezza la presenza di questa nuova specie.

vi sono due proposte. Una è quella del Gerstaecker ([1]), che lo mette fra gli *ascidicolidi*, associandolo così coll'*Ascidicola rosea* Thorell; ma le differenze son tali e tante fra i due copepodi che non vale neppure la pena di discutere questa proposta. L'altra fu fatta dal Claus ([2]), il quale collocò il gen. *Enterocola* v. B. accanto al gen. *Buprorus* Thorell, non ostante, come egli dice, che nel primo si abbia una chiara segmentazione del corpo, e nel secondo questa manchi interamente. Ma non è sola la segmentazione del corpo che rende diversi i due animali; giacchè essi non si rassomigliano neppure per altri caratteri: non, per es. per la forma generale del corpo, raccorciata nel *Buprorus*, ed allungata nell'*Enterocola*; non per la maniera d'incubazione delle uova, non essendovi nell'animale del Thorell formazione di sacchi esterni, ed invece avendosi due sacchi lunghissimi nel copepodo descritto per la prima volta da P. J. v Beneden; e, finalmente, ciò che certamente vale assai più, non presentando alcun carattere di comune in nessuna delle appendici del corpo, cominciando dalle antenne del 1° paio, e continuando, senza eccezione, fino alle ultime, cioè ai rami della furca.

Qualche somiglianza, invece, col genere *Buprorus* la presenta il nuovo genere *Kossmechthrus* da me descritto, cioè per la poco evidente segmentazione del corpo nell'adulto, e, specialmente per la poca segmentazione dei piedi. Ma le differenze delle parti boccali, e quelle della posizione particolare dei piedi posteriori, unita alla forma generale del corpo, ed a quella dell'addome, non permettono neppure quì un ravvicinamento.

Onde, se la scoperta del maschio dei due copepodi, di cui è discorso, non obbligherà per ragione di particolari caratteri ad altre classificazioni, nello stato presente delle nostre conoscenze, l'*Enterocola fulgens* v. Beneden, ed il *Kossmechthrus notopus* n. sp. debbono essere considerati come tipi di due distinte famiglie: ENTEROCOLIDI, e KOSSMECTRIDI.

([1]) Gerstaecker, *Die Klassen und Ordnungen der Arthropoden*. Vol. V. p. 1. *Crustaceen* 1866-79, in Bronn's Klassen ecc. p. 719.

([2]) Claus, *N. Beitraege*, ecc. l. c. p. 351.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

1. Ascidiozoo che presenta ambedue i commensali, la *Doroixys uncinata* Kerschner (*D*) nel sacco branchiale, e l'*Enterocola fulgens* v. Beneden (*E*) nello stomaco, coi sacchi *so* oviferi dentro dell'intestino del tunicato; *ov* ovario dell'ascidiozoo; *t* testicolo.
2. *Doroixys uncinata* Kerschner. Femmina col sacco incubatore molto sviluppato.

Figg. 3-9. *Enterocola fulgens* v. Beneden.

3. Femmina adulta coi sacchi oviferi *so*; *ov* ovario; *od* ovidutto; *sg* segmento genitale; *st* stomaco; *i* intestino.
4. Femmina giovanissima: *n* sistema nervoso; *sg* segmento genitale con le espansioni appena accennate. Addome con due soli segmenti.
5. Antenne: *a* anteriore, *b* posteriore.

6-8. Parti boccali.

6. Mandibole: *p* setola-palpo.
7. Mascella con la setola-palpo *p*.
8. Piedi mascellari: anteriore *a*, posteriore *b*.
9. Aspetto della faccia inferiore del segmento cefalico, per mostrare i rapporti principali delle varie appendici: *a* antenna anteriore, *b* antenna posteriore, ripiegata contro la faccia inferiore del segmento; *md* mandibole; *ms* mascelle; *pm* piedi mascellari anteriori; *pm'* piedi mascellari posteriori.
10. Piedi: *re* ramo esterno; *ri* ramo interno.

Figg. 11-23. *Kossmechthrus notopus* Della Valle.

11. Femmina adulta veduta di profilo: *s* linea di contorno preciso presentata dalle parti marginali dei cinque segmenti del corpo, e che lascia scoperta parte del 6° segmento toracico; *pd* 5° piede o piede dorsale; *so* sacco ovifero.
12. Antenna anteriore.
13. Antenna posteriore.

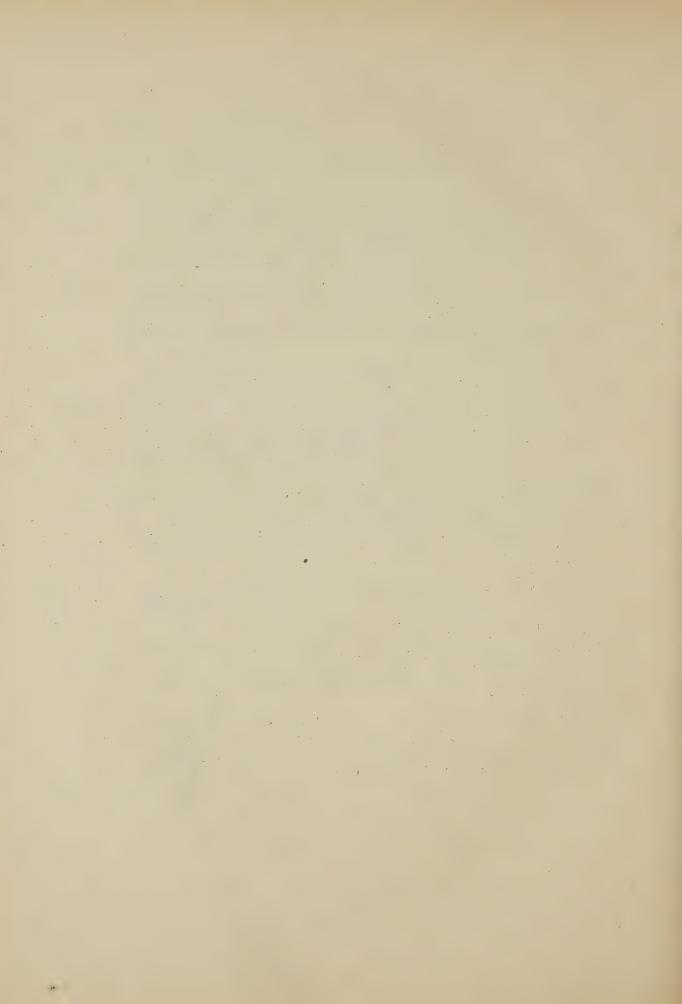
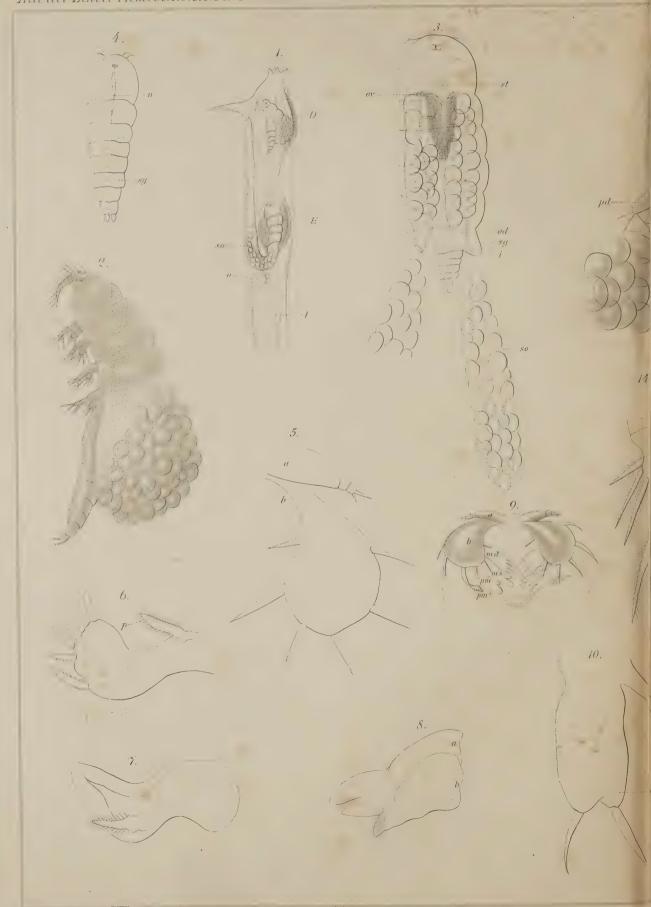
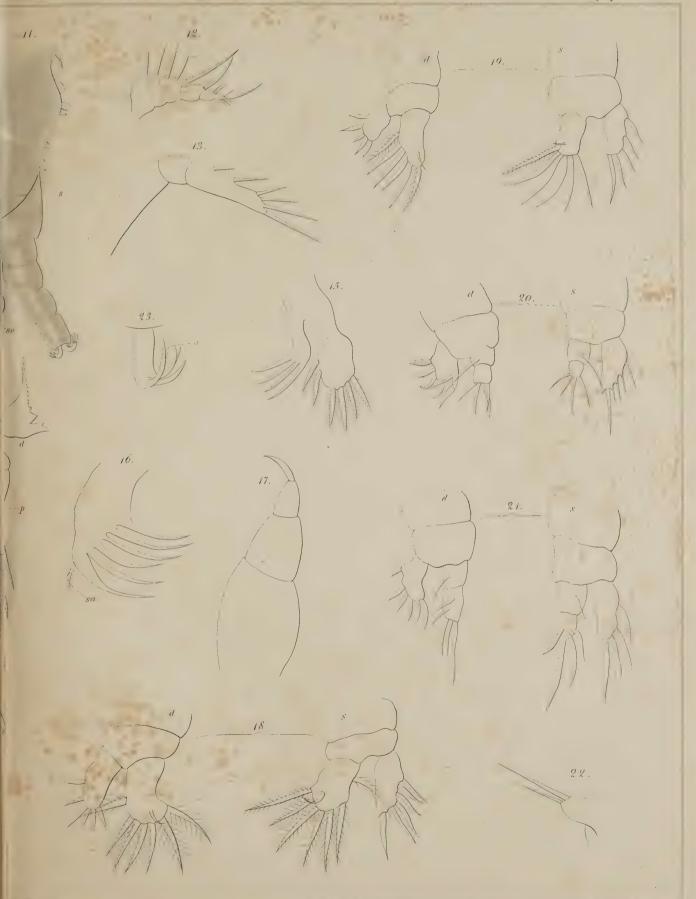
14-17. Parti boccali.

14. Mandibola: *d* lamina denticulata; *p* palpo.
15. Mascella.
16. Piede mascellare anteriore: *sa* setola appendiculare.
17. Piede mascellare posteriore.

18-21. Piedi biramosi asimmetrici veduti dalla faccia inferiore: *d* piede destro, *s* piede sinistro.

18. Piedi del 1° paio.
19. Piedi del 2° paio.
20. Piedi del 3° paio.
21. Piedi del 4° paio.
22. Piedi del 5° paio, o piede dorsale.
23. Appendice della furca ed uncini: *a* uncino spatoliforme.

4.
n
sg
1.
D
E
so
o
t
3.
st
ov
od
sg
i
so
pd
14
2.
5.
a
b
9.
a
b
md
ms
pm
pm'
6.
p
10.
8.
a
b
7.

11.
12.
13.
s
so
d
p
15.
16.
sa
17.
18.
d
s
19.
d
s
20.
d
s
21.
d
s
22.
23.
a

Studî sui composti della serie del pirrolo.
Azione dell' idrogeno nascente sul pirrolo.
Quarta Memoria di G. L. CIAMICIAN e M. DENNSTEDT

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia

nella seduta del 20 maggio 1883.

Alcuni mesi fa abbiamo accennato in una Nota preliminare alla possibilità di trasformare il pirrolo in un alcaloide contenente due atomi di più di idrogeno. Nella presente Memoria diamo la descrizione del nuovo composto.

Il pirrolo estratto dall'olio animale bolle a 130°—131° (¹) (tutta la colonna nel vapore) a 761 mm.

Noi abbiamo fatto agire sul pirrolo, l' idrogeno che si svolge dall'acido acetico colla polvere di zinco. Il rendimento è però poco soddisfacente, perchè si forma sempre molta ammoniaca ed una parte del pirrolo viene trasformata in materie resinose. Anche variando le proporzioni delle tre sostanze messe a reagire insieme, e la durata della riduzione non abbiamo potuto ottenere un notevole miglioramento. E da notarsi ancora che alle volte il rendimento della base dipende da cause che noi finora non abbiamo potuto scoprire: certo vi influisce la concentrazione dell'acido adoperato e la durata dell'operazione. In generale si può dire che colla concentrazione del liquido e la durata della riduzione aumenta la resinificazione e la quantità di ammoniaca che si produce, però anche adoperando un acido molto diluito il rendimento è cattivo, perchè la maggior parte del pirrolo, rimanendo inalterata, si resinifica durante l'ebollizione. La riduzione del pirrolo è un'operazione molto delicata che hà bisogno d' esser ancora studiata prima di giungere a trovare un metodo per ottenere abbondanti quantità di alcaloide.

La via da noi seguìta finora, che in media dà un rendimento di 20 °/₀ della quantità del pirrolo impiegato, tenendo conto del pirrolo che resta inalterato e che si può riottenere, è la seguente: Si riscaldano debolmente, in modo però da mantenere sempre un visibile sviluppo d' idrogeno, in una serie di palloni muniti d'un apparecchio a ricadere, 20 gr. di pirrolo, con 400 gr. d'acido acetico della densità 1,06 e 20 gr. di polvere di zinco, e si aggiungono ancora in intervalli di circa 8 ore altri 20 e poi altri 10 gr. di polvere di zinco. Il liquido che da principio

(¹) Nei trattati di chimica si trova segnato a 133° il punto d'ebollizione del pirrolo; Weidel assieme all' uno di noi trovò 126°,2 (temperatura non corretta) a 746,5ᵐ. (Berl. Ber. XIII, 71).

è scolorato diviene sempre più giallo fino che alla fine dell' operazione — dopo 24 ore circa di ebollizione — esso è di un giallo ranciato carico. Per raffreddamento, o per meglio dire quando cessa lo sviluppo d' idrogeno, il liquido diventa verde, e mantiene questo colore anche se lo si riscalda fino all'ebollizione; il coloramento verde sparisce ed il liquido riprende subito il suo colore giallo se lo si riscalda in presenza di polvere di zinco.

Dopo 24 ore il contenuto dei palloni è quasi tutto solido per l'acetato di zinco che si separa. Per allontanare l'eccesso dell' acido acetico ed il pirrolo rimasto inalterato, è conveniente di distillare la parte liquida a pressione ridotta a b. m. Il residuo è una massa solida grigia e verde che racchiude in sè l'eccesso della polvere di zinco. Il distillato è scolorato, diviene però in breve verdastro e poi bruno. Si può facilmente riavere da quest' ultimo il pirrolo rimasto inalterato, saturando con potassa o soda ed estraendo con etere. Si riottiene così circa 40 % del pirrolo impiegato; si può anche, sebbene con minore vantaggio, rimettere a bollire il distillato con nuove quantità di polvere di zinco.

Il residuo solido rimasto indietro si scioglie facilmente nell' acqua, e la soluzione verde, che ricorda pel suo colore le soluzioni di ossido di cromo, viene separata per decantazione dall' eccesso di zinco. La soluzione che è limpida da principio diviene torbida con lo stare esposta all'aria e prende un colore bruno; trattandola con acido cloridrico si ottiene un precipitato biancastro che per ebollizione si trasforma in una resina simile al rosso di pirrolo. Il precipitato biancastro quando è secco forma una polvere grigio-violetta che facilmente si altera all'aria diventando bruna, e che contiene zinco. Anche il residuo insolubile nell'acqua non è formato solamente dall'eccesso di polvere di zinco inalterata, ma contiene pure una materia resinosa solubile nell'alcool.

Queste sostanze resinose, che somigliano al rosso di pirrolo e che probabilmente si formano, sebbene meno copiosamente, riscaldando il pirrolo solo con acido acetico, si prestano poco ad esser studiate massima in causa della loro grande alterabilità. Il liquido verde venne perciò, senza tener conto di queste materie, trattato in conveniente diluizione con acido solfidrico per liberarlo dallo zinco, ed il liquido filtrato dal solfuro di zinco, svaporato con aggiunta di acido cloridrico fino a secchezza. Si riprende il residuo bruno e resinoso con acqua e si distilla aggiungendo un eccesso di potassa in una corrente di vapor acqueo. Durante la distillazione si sviluppano grandi quantità di ammoniaca. Il distillato venne saturato con un eccesso di acido cloridrico e portato a secco per distruggere le ultime tracce di pirrolo, indi il residuo sciolto in poca acqua trattato con un forte eccesso di potassa solida e distillato nuovamente, raccogliendo separatamente le prime porzioni che contengono quasi tutto l'alcaloide. Trattando questo liquido con potassa solida si separa un olio mentre si sprigionano nuove quantità di gas ammoniaco che vi erano disciolte. L'olio separato dall'acqua e seccato per ebollizione con potassa solida fusa di fresco, passa quasi completamente fra 90 e 91.°

Il nuovo alcaloide è solubilissimo nell'acqua, che assorbe anche dall'aria; assorbe inoltre l'acido carbonico formando un composto solido, che però diviene liquido nuovamente per deliquescenza.

Non ci è stato possibile di ottenere numeri esatti analizzando la base libera, anche dopo averla ripetutamente distillata sulla potassa fusa, e ciò probabilmente perchè è molto difficile di allontanare le ultime tracce di ammoniaca che essa contiene fino dalla sua preparazione e che vi rimangono disciolte, causa il suo poco elevato punto di ebollizione. — Ci siamo perciò risolti di preparare il cloridrato facendo passare una corrente di acido cloridrico secco in una soluzione della base in etere anidro. Si ottiene subito un precipitato bianco polveroso, che si separa dall'etere per filtrazione e che si fa cristallizzare dall'alcool assoluto, dopo averlo seccato nel vuoto. Il cloridrato del nuovo alcaloide è deliquescente, si scioglie facilmente nell'alcool bollente dal quale si separa per raffreddamento in forma di prismi appiattiti. Il composto cristallizzato dall'alcool venne ridisciolto a freddo in una maggior quantità di questo solvente ed indi precipitato frazionatamente con etere anidro. Le ultime frazioni diedero all'analisi i seguenti numeri. Le analisi sono fatte col cloridrato seccato nel vuoto sull'acido solforico fino a peso costante.

I. — 0,3522 gr. di materia diedero 0,5907 di CO_2 e 0,2531 di OH_2.

II.— 0,7560 gr. di materia dettero 1,2695 gr. di CO_2 e 0,5249 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per	
	I	II	C_4H_7NHCl	e C_4H_9NHCl
C	45,74	45,79	45,50	44,65
H	7,99	7,71	7,58	9,30

Il cloridrato fonde a 173°-174°. L'alcaloide riottenuto dalle ultime frazioni analizzate dal cloridrato, precipitate con etere dalla soluzione alcoolica, bolle costantemente a 90°-91° a 750,5^{mm} (colonna tutta nel vapore).

Dalle analisi del cloridrato risulta che la nuova base ha la formola:

« C_4H_7N. »

Essa è dunque un pirrolo biidrogenato, composto che noi chiameremo

« *Pirrolina* »

per accennare così alle sue proprietà tanto diverse da quelle del pirrolo, ciò che non sarebbe egualmente e sufficientemente espresso dal nome diidropirrolo.

Il cloroplatinato di pirrolina $[(C_4H_7NHCl)_2 . PtCl_4]$ si ottiene trattando la soluzione del cloridrato acidificato con acido cloridrico, con cloruro di platino, in forma di un precipitato cristallino giallo ranciato. Esso è poco solubile nell'acqua fredda, si scioglie facilmente nell' acqua bollente e si separa subito per raffreddamento in grossi cristalli. Trattando una soluzione molto diluita del cloridrato con cloruro di platino si ottengono dopo qualche tempo dei cristalli bene sviluppati che furono studiati cristallograficamente dall' ingegnere sig. G. La Valle, il quale ebbe la gentilezza di comunicarci quanto segue:

« Sistema cristallino: Triclino.

« Costanti: $a : b : c = 1,65801 : 1 : 1,58370$

Fig. 1.

« $\alpha = 73°23'$ $\xi = 72° 14' 36''$
« $\beta = 86° 3'$ $\eta = 99° 8' 58''$
« $\gamma = 105° 46' 26''$ $\zeta = 108° 30' 16''$

« Forme osservate: (001), (100), 010), « (101), $(\bar{1}01)$, $(0\bar{1}1)$, $(0\bar{1}2)$, (110), (111), « $(1\bar{1}1)$ (Fig. 1.)

« Combinazioni: idem (Fig. 2).

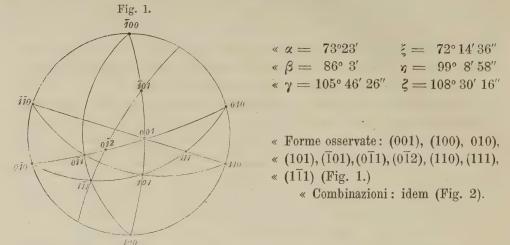



Fig. 2.

Angoli	Misurati	Calcolati
010 : 001	73° 25′	*
001 : $0\bar{1}2$	45° 43′	45° 47′
$0\bar{1}2$: $0\bar{1}1$	25° 50′	25° 35′
$0\bar{1}1$: $0\bar{1}0$	35° 4′	35° 15′
100 : 101	44° 22′	*
101 : 001	41° 41′	*
001 : $\bar{1}01$	45° 30′	45° 26′
$\bar{1}01$; $\bar{1}00$	48° 36′	48° 31′
010 : 111	40° 23′	40° 31′
111 : 101	48° 23′	*
101 : $1\bar{1}1$	49° 42′	49° 39′
$1\bar{1}1$; $0\bar{1}0$	41° 26′	41° 27′
110 : 111	26° 57′ ?	25° 32′
111 : 001	45° 39′	*

« Sfaldatura difficile (100).

« Colore giallo miele.

« Dicroismo mediocre.

« La estrema piccolezza dei cristalli, avendo i misurabili la lunghezza di poco più di un millimetro e lo spessore di meno di mezzo millimetro, non ha permesso le osservazioni ottiche.

« In quanto all'abito dei cristalli, essi si presentano costantemente allungati secondo l'asse delle y, ed appiattiti secondo l'asse delle z. Il pinacoide (001) è la faccia più sviluppata ».

Il cloroplatinato di pirrolina cristallizza senz'acqua di cristallizzazione e l'analisi del sale seccato nel vuoto sull'acido solforico diede i seguenti numeri:

I. — 0,3640 gr. di sostanza diedero 0,1313 gr. di platino.

II.— 0,4759 gr. di materia diedero 0,3036 gr. di CO_2 e 0,1342 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $(C_4H_7NHCl)_2PtCl_4$
Pt	35,79	—	35,82
C	—	17,40	17,45
H	—	3,13	2,91

Le seguenti reazioni dimostrano che la pirrolina è una amina secondaria.

Azione del joduro di metile sulla pirrolina.

Noi abbiamo impiegato per queste esperienze la base riottenuta dal cloridrato analizzato.

Il joduro di metile agisce molto violentemente sul nuovo alcaloide; si fa perciò gocciolare un eccesso di joduro di metile in una soluzione di pirrolina in alcool metilico in un apparecchio a ricadere, munito di un piccola colonna di mercurio. Il liquido si riscalda fino all'ebollizione, per rendere completa la reazione si riscalda in ultimo per qualche tempo a b. m. Si distilla l'alcool metilico e l'eccesso di joduro di metile, ed il residuo solido viene fatto cristallizzare dall'alcool assoluto bollente. Per raffreddamento si separano bellissime squame incolore, di splendore madreperlaceo, che fatte cristallizzare ancora due o tre volte dall'alcool bollente e seccate nel vuoto diedero analizzate, numeri che corrispondono colla formola *del joduro di dimetilpirrolilammonio.*

0,3565 gr. di materia dettero 0,4221 di CO_2 e 0,1847 gr. di OH_2.

In 100 parti

	trovato	calcolato per $C_4H_6NCH_3 \cdot CH_3I$
C	32,28	32,00
H	5,75	5,33

Questo composto ha tutte le proprietà caratteristiche dei ioduri degli ammoni composti; la sua soluzione acquosa non viene scomposta dalla potassa, anzi questa separa dall'acqua il ioduro inalterato. E molto solubile nell'acqua, solubile pure nell'alcool bollente, ma quasi insolubile nell'alcool freddo. Fonde scomponendosi verso i 286°.

Trattato col cloruro argentico, precipitato di fresco, in soluzione acquosa si ottiene il cloruro corrispondente che è solubilissimo nell'acqua e nell'alcool. La soluzione acquosa del cloruro di dimetilpirrolilammonio non dà un precipitato

col cloruro di platino anche se è concentrato, però se ne ottiene subito uno in forma d'una polvere giallochiara, aggiungendovi un poco d'alcool. Lasciando stare la soluzione per qualche giorno, il precipitato polveroso si trasforma in lunghi e grossi aghi giallo-ranciati che sono il cloroplatinato con acqua di cristallizzazione. Le determinazioni di acqua fatte col sale proveniente da diverse preparazioni, diedero, determinando l'acqua nei cristalli seccati prima sul cloruro di calcio e poi nel vuoto sull'acido solforico e a 105°, numeri diversi, di guisa che noi non possiamo decidere con quante molecole d'acqua cristallizzi questo sale.

Le analisi fatte colla sostanza seccata a 105° fino a peso costante diedero i seguenti numeri.

I. — 0,1728 gr. di materia dettero 0,0556 gr. di Pt.

II. — 0,4665 gr. di materia dettero 0,4092 gr. di CO_2 e 0,1705 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per la formola $(C_6H_{12}NCl)_2PtCl_4$
Pt	32,17	—	32,51
C	—	23,92	23,76
H	—	4,04	3,92

Trattando la soluzione del ioduro del dimetilpirrolilammonio con ossido d'argento si ottiene una soluzione senza odore, fortemente alcalina che si può svaporare quasi fino a secchezza senza che si scomponga; distillando il residuo, il liquido diventa bruno e comincia a scomporsi emettendo vapori d'un alcaloide che si condensano in un liquido incoloro o lievemente giallo, poco solubile nell'acqua e d'un odore penetrante, pungente che somiglia a quello degl'isonitrili. Esso si scioglie nell'acido cloridrico formando una soluzione colorata in giallo. Una simile scomposizione avviene distillando direttamente il joduro con potassa solida. Questo comportamento dell'ossidrato e del joduro di dimetilpirrolilammonio, ricorda quello del ioduro e dell'ossidrato del metilpiridilammonio studiato recentemente da Hofmann [1].

Le soluzioni madri dalle quali si ottennero i cristalli descritti contengono ancora un altro sale più solubile nell'alcool, che si ottiene in forma di aghi o prismi svaporandole fino a secchezza. Il residuo venne sciolto nell'acqua e la soluzione distillata con potassa. Si ottiene un liquido dal quale mediante la potassa solida si separa un olio, che dopo esser stato seccato distilla fra 87° e 91°. Trasformato in cloridrato e trattato frazionatamente con cloruro di platino, le singole frazioni analizzate, diedero numeri che dimostrano che il liquido è formato quasi esclusivamente di pirrolina inalterata.

I Frazione: 0,4626 gr. di materia diedero 0,1645 gr. di platino.

II Frazione: 0,1600 gr. di sostanza diedero 0,0566 gr. di platino.

	trovato I	trovato II	calcolato per $(C_4H_7NHCl)_2PtCl_4$	e $(C_5H_9NHCl)_2PtCl_4$
Pt	35,56	35,37	35,82	34,08

(1) Berl. Ber. XIV, 1498.

L'azione del joduro di metile sulla pirrolina avviene dunque principalmente secondo la seguente equazione:

$$2\ C_4H_6NH + 2\ CH_3I = C_4H_6NCH_3 \cdot CH_3I + C_4H_6NH \cdot HI.$$

Nitrosopirrolina.

Per ottenere il nitrosocomposto dell' alcaloide noi abbiamo trattato una soluzione di pirrolina in acido solforico diluito colla quantità calcolata di nitrito.

Si fa bollire fino che tutta l'anidride nitrosa è allontanata e si estrae il liquido con etere. Si può anche saturare con potassa prima di agitare con etere, nel qual caso tutta la parte della base rimasta inalterata viene estratta assieme al nitrosocomposto.

Il residuo etereo è un olio giallognolo che non si può distillare a pressione ordinaria perchè si scompone totalmente. Distillandolo a pressione ridotta, passa un olio che si solidifica per raffreddamento in una massa di cristalli incolori o tinti lievemente in giallo.

Per purificare il nitrosocomposto così ottenuto, lo si spreme fra carta da filtro e lo si fa cristallizzare dall'etere petrolico nel quale è abbastanza solubile a caldo ma poco a freddo. Si separa da questo solvente in forma di aghi senza colore fondenti a 37-38°.

La nitrosopirrolina dà con fenolo ed acido solforico la reazione caratteristica delle nitrosamine; è solubilissima nell' acqua, alcool ed etere ed ha un debole odore aromatico che si rende più manifesto riscaldandola lievemente, riscaldata bruscamente si scompone con leggera deflagrazione lasciando indietro un'aureola di carbone.

L'analisi diede i seguenti numeri:

0,3004 gr. di sostanza diedero 0,5354 gr. di CO_2 e 0,1658 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_4H_6N \cdot NO$
C	48,61	48,98
H	6,13	6,12

Il comportamento della pirrolina verso il joduro di metile e l' acido nitroso dimostra che essa è una base secondaria della formola:

« C_4H_6NH »

Lo studio dei composti idrogenati dei derivati del pirrolo ci occupa presentemente.

Note cristallografiche.
Memoria del dott. P. LUCCHETTI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia

nella seduta del 6 maggio 1883.

(Con una tavola)

---

1. Derivato monoacetilico dell'acido lapacico [1].

$$C_{15}H_{13}O_3 . C_2H_3O .$$

Sistema monoclino:

$$a:b:c = 1.89709:1:1,79445$$
$$B = +X . Z = 93^\circ . 7' .$$

Forme osservate: (210), (11$\bar{1}$), (101), (10$\bar{1}$), (111), (001), (100), (110), ($h0l$) fig. 1.

Combinazioni osservate: (210), (11$\bar{1}$) fig. 2; (100), (210), (001), (101) (10$\bar{1}$), (111), (11$\bar{1}$) fig. 3; tutte le forme insieme fig. 4.

Angoli	calcolati	trovati
100.101	44°.57′	*
101.001	41°.56′	*
001.111	62°.34′	*
210.2$\bar{1}$0	86°.54′	86°.50′
001.$\bar{1}$01	44°.52′	44°.51′
111.101	51°.44′	51°.46′
$\bar{1}$11.001	64°.54′	65°. 3′

Osservazioni: I cristalli, di color giallo citrino, si presentano generalmente come nella fig. 3 dove le facce meno sviluppate spesso mancano affatto.

L'alcool residuario dei cristalli precedenti, che conteneva anche un po' di sostanza resinosa, diede, per successiva evaporazione, i cristalli della fig. 2 di colore giallo aranciato.

2. Cloroplatinato di trimetilfenilammonio [2].

$$[C_6H_5N(CH_3)_3]_2PtCl_6$$

a) dalla chinolina ottenuta dalla cinconina.

[1] Preparato dal prof. Paternò. (V. Gazzetta Chimica, Anno XII, pag. 357).

[2] Preparato dal prof. Körner.

Sistema monoclino:

$$a:b:c = 1{,}37302:1:0{,}842304$$
$$B = +X.Z = 105°.3'.$$

Forme osservate: (110), (111), ($\bar{1}$11), ($\bar{2}$01), (001), (100) fig. 5.

Combinazioni osservate: (001), (110) fig. 6; (100), (110), (111), (001) fig. 7; (110), (111), ($\bar{1}$11), (20$\bar{1}$), (001), (100) fig. 8.

Angoli	calcolati	trovati
110.1$\bar{1}$0	105°.57'	*
001.111	40°.57'	*
001.110	81°.0'.15"	*
$\bar{1}$10.$\bar{2}$01	64°.47'	64°.53'
$\bar{1}$11.001	50°.7'	49°.57'.30"
$\bar{2}$01.001	60°.6'	59°.50'.30"

Sfaldatura osservata (110) buona.

b) dall'anilina.

Sistema monoclino:

$$a:b:c = 1{,}3970:1:?$$
$$B = +X.Z = 105°.25'.$$

Combinazione osservata: (110), (001) fig. 6.

Angoli misurati 1$\bar{1}$0.110 = 106°.47'.30"
001.110 = 80°.52'.40".

Sfaldatura osservata (110) buona.

Osservazione: I due cloroplatinati suddetti, come si vede, sono adunque, con fortissima probabilità, cristallograficamente la stessa cosa.

3. Ioduro di etilchinolinio (¹).

$$C_9H_7N.C_2H_5I.$$

Sistema monoclino:

Forme osservate: (001), (110), (010).

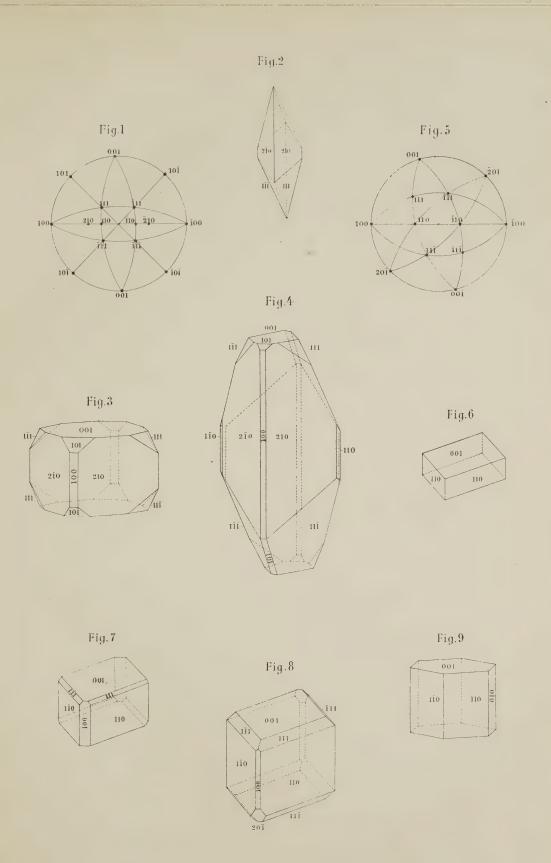
Combinazione osservata: (001), (110), (010) fig. 9.

a) dalla chinolina naturale.
Colore giallo-miele.
B = +X.Z = 97°.40'.40"
a:*b*:*c* = 0,50603:1: ?
angoli misurati:
110:001 = 83°. 8'.30"
1$\bar{1}$0:110 = 53°.16'.

b) dalla chinolina artificiale.
Colore giallo-cromo.
B = +X.Z = 97°.50'
a:*b*:*c* = 0,50328:1: ?
angoli misurati:
110:001 = 82°.59'.40"
1$\bar{1}$0:110 = 53°. 0'. 0".

Osservazione. Pei due ioduri suddetti vale l'osservazione precedente.

(¹) Preparato dal prof. Körner.

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9

Studî sui composti della serie del pirrolo.
I derivati della pirocolla.

Quinta Memoria di G. L. CIAMICIAN e P. SILBER

approvata con relazione al Presidente
nelle ferie accademiche dell' anno 1882-83.

I. Azione del bromo sulla pirocolla.

Facendo agire il bromo sulla pirocolla in soluzione di acido acetico glaciale in tubi chiusi, si ottiene oltre a piccole quantità d'una sostanza insolubile nell'acido acetico un miscuglio di *Monobromo* e *Bibromopirocolla* (¹).

Queste sostanze insolubili nell'acido acetico glac. si ottengono in grande quantità facendo agire direttamente il bromo sulla pirocolla.

Per ottenere questa nuova sostanza abbiamo riscaldato la pirocolla (3 gr. per volta) con un eccesso di bromo in tubi chiusi. Trattando la pirocolla con bromo, la reazione incomincia già a temperatura ordinaria accompagnata da uno sviluppo di acido bromidrico; quando questo è quasi cessato si chiudono i tubi e si riscaldano per alcune ore a b. m. Nell' aprire i tubi si svolge moltissimo acido bromidrico; si riscaldano perciò i tubi aperti ancora un poco a b. m. per scacciare l'acido bromidrico ed il bromo eccessivo, ottenendo così una polvere gialla che è quasi completamente insolubile in tutti i solventi ordinarî.

Per purificare questa sostanza l'abbiamo fatta bollire ripetutamente con acido acetico glaciale a fine di togliere tutto cio che vi era di solubile in questo solvente. Di fatti mentre in principio il filtrato è colorato intensamente in giallo, dopo aver ripetuto diverse volte questo trattamento l'acido acetico finisce col restare perfettamente scolorato.

La sostanza così depurata è una polvere d'un colore giallo chiaro, apparentemente amorfa, che però non è ancora sufficientemente pura; l'analisi seguente dimostra che essa si avvicina nella sua composizione ad una

« *Tetrabromopirocolla* ».

La formola $C_{10} Br_4 H_2 N_2 O_2$ richiede 63,74 % di bromo, trovato 65,16 % Br.

Noi abbiamo tentato di purificarla per mezzo della sublimazione, ma questo tentativo fallì, perchè la sostanza si scompone con sviluppo d' ac. bromidrico. Si

(¹) Vedi Ciamician e Danesi. Memorie della Classe di scienze fis. mat. e nat. della r. Accademia dei Lincei 3ª serie; vol. XII, 1882.

riesce però ad ottenere una tetrabromopirocolla abbastanza pura, facendola cristallizzare dall'acido acetico glac., bollente sotto pressione. Noi abbiamo riscaldato una piccola quantità di sostanza (0,4 gr.) con molto ac. acetico glac. a 130° in tubi chiusi per 8 ore. L'acido acetico si colora in giallo, e una buona parte della polvere amorfa si trasforma in piccoli aghi gialli. Ripetendo l'operazione una seconda volta con una nuova quantità d'acido acetico glac. la trasformazione era quasi completa e la seguente analisi dimostra che la sostanza così ottenuta era tetrabromopirocolla quasi pura.

0,1950 gr. di sostanza diedero 0,2950 gr. di AgBr.

In 100 parti

	trovato	calcolato per $C_{10} H_2 Br_4 N_2 O_2$
Br. . . .	64,36	63,74

La tetrabromopirocolla forma piccoli aghetti gialli; è insolubile in alcool, etere, toluene, cloroformio, e non si scioglie che in piccolissime tracce nell' ac. acetico glac. bollente. Riscaldata a 250° incomincia a scomporsi senza avere un punto di fusione ben definito.

Essendo il metodo di purificazione della tetrabromopirocolla, or descritto, molto lungo non potendosi purificare che piccolissime quantità di materia per volta ci siamo serviti direttamente del composto bollito ripetutamente con ac. acetico glac. per tentare di ottenere *l'acido bibromocarbopirrolico* corrispondente.

Si fa bollire la tetrabromopirocolla con potassa fino che si scioglie completamente. Il liquido raffreddato viene acidificato con ac. solforico diluito ed agitato con etere.

Per purificare l'acido ottenuto, lo si scioglie in ammoniaca e si tratta la soluzione concentrata un poco a b. m., con cloruro baritico. Si forma un precipitato bianco che si fa cristallizzare più volte dall'acqua bollente, dalla quale si separa per raffreddamento in pagliette splendenti. Dal sale baritico abbiamo riottenuto l'acido con ac. solforico ed agitando con etere.

Il residuo etereo fu fatto cristallizzare ripetutamente dall'acqua bollente nella quale è abbastanza solubile, si separa completamente per raffreddamento in forma di tavolette leggermente colorate in giallo, che sono facilmente solubili nell'alcool e nell'etere. L'acido come pure il suo sale baritico non perdono di peso, seccandoli a 100°; riscaldati a 105° si scompongono.

Dalle analisi del sale baritico e dell' acido libero, risulta che molto probabilmente si tratta d'un acido bibromocarbopirrolico, abbenchè i numeri non sieno sufficientemente concordanti colla teoria, e ciò di certo in seguito alla difficoltà di ottenere pura la tetrabromopirocolla in causa della sua insolubilità.

II. Percloruro di Percloropirocolla ($C_{10} C_6 (Cl_8) N_2 O_2$)

Nella Memoria gia accennata furono descritte tre sostanze, che si ottengono dalla pirocolla per azione del pentacloruro di fosforo a temperatura elevata. Una di queste sostanze ha la formola $C_{10} Cl_6 N_2 O_2$ e fu chiamata *Percloropirocolla*, le due altre hanno le formule $C_{10} Cl_{10} N_2 O$ e $C_5 Cl_7 NO$. Quest'ultimo corpo la di cui formola $C_5 Cl_7 NO$ non è che l'espressione più semplice della sua composizione, attirò

già allora l' attenzione degli autori avendo esso la singolare proprietà di svolgere ammoniaca per ebollizione con potassa, trasformandosi in un acido privo d' azoto. Questo comportamento tanto diverso da quello di tutti gli altri derivati della pirocolla fece nascere allora negli autori il dubbio, che il composto $C_5 Cl_7 NO$ non fosse più un derivato del pirrolo nel senso stretto della parola.

Le ricerche che pubblichiamo ora ci sembrano atte a dissipare una tale incertezza e noi crediamo che questa sostanza sia una percloropirocolla con 8 atomi di cloro addizionati, che abbia in analogia con tutti gli altri derivati alogenati della pirocolla la doppia formola « $C_{10} Cl_{14} N_2 O_2$ », e che debba dunque riguardarsi come un

« *Octocloruro* » o « *Percloruro di Percloropirocolla* » $[C_{10} Cl_6 (Cl_8) N_2 O_2]$.

Prima di descrivere la reazione che ci condusse o questo risultato vogliamo fare alcune osservazioni sul modo di preparare questa sostanza. Per procurarci le necessarie quantità di materia, abbiamo preparato la percloropirocolla seguendo il metodo già noto. Vogliamo aggiungere soltanto, che da 10 gr. di pirocolla si ottengono 13 gr. di percloropirocolla pura, e che spesso il corpo della formola $C_{10} Cl_{10} N_2 O$, si forma in quantità molto più piccole di quelle accennate nella Memoria citata. — Da 10 gr. di percloropirocolla si ottengono poi riscaldandola di nuovo con pentacloruro di fosforo 6,5 gr. di percloruro di percloropirocolla, riottenendo circa 2 gr. di percloropirocolla rimasta inalterata. Noi abbiamo inoltre osservato che in questa operazione si formano spesso assieme al percloruro di percloropirocolla, piccole quantità del composto $C_{10} Cl_{10} N_2O$, dal quale però si separano facilmente nel seguente modo. Si scioglie il miscuglio, già purificato (¹) per cristallizzazione dall'acido acetico glac. bollente, a freddo nell'etere e si lascia svaporare spontaneamente la soluzione in un cristallizzatore a fondo piatto. Si ottengono così i grossi cristalli cuboidi del percloruro di percloropirocolla che si separano molto facilmente, meccanicamente dai prismi appiattiti del composto $C_{10} Cl_{10} N_2O$. I cristalli piccoli che si lasciano indietro, si possono separare per ripetute sublimazioni, perchè il percloruro sublima molto facilmente ad una temperatura di poco più di 100°, mentre l'altra sostanza non si volatilizza che a temperatura molto più elevata.

1. Azione dell'idrogeno nascente sul percloruro di percloropirocolla.

Per poter scoprire la costituzione di questo corpo abbiamo tentato di elimminarne il cloro almeno parzialmente evitando però di farne uscire l'azoto. Siccome l'esperienze precedenti avevano dimostrato che la presenza di un alcali basta ad

(¹) L'alcool che serve nella preparazione del percloruro di percloropirocolla a lavare il prodotto greggio, contiene un poco di una materia oleosa che volevamo studiare possedendo una certa quantità di questo prodotto. A tale uopo abbiamo distillato la più parte dell'alcool a b. m. e trattato il liquido distillato con acqua. Si formò una emulsione dalla quale si separarono alcune goccie d'un olio pesante. Il residuo della distillazione depose per raffreddamento dei cristalli che furono ben tosto riconosciuti per cloruro ammonico. Il liquido separato dai cristalli venne distillato con vapor acqueo, e l'olio che passa fu separato dall'acqua e riunito a quello ricavato dai distillati alcoolici. Questa materia è un olio giallo, più pesante dell'acqua, ed ha un odore pungente che ricorda quello della canfora. Sottoposto alla distillazione esso si è scomposto quasi completamente con sviluppo d'acido cloridrico, e ciò ci ha impedito di continuare questa ricerca.

eliminarlo in forma di ammoniaca, ci siamo risolti a studiare l'azione dell'idrogeno nascente in soluzione acida.

Si scioglie a caldo in una storta tubulata, con turacciolo smerigliato, e munita d'un refrigerante ascendente, il percloruro di percloropirocolla nella quantità necessaria di ac. acetico glaciale, si aggiunge tanta acqua fino che la sostanza incomincia a precipitare, e si introduce una quantità corrispondente di polvere di zinco. Incomincia subito una viva reazione che si manifesta con un forte sviluppo di gaz. Oltre all'eccesso dell'idrogeno si svolgono pure grandi quantità di acido carbonico. Quando cessa la reazione spontanea, si continua a mantenere, con debole riscaldamento, il liquido in ebollizione per circa 3 ore. Ad operazione terminata si diluisce il contenuto della storta con acqua e si distilla in una corrente di vapore. Passa un olio che si solidifica formando una massa bianca e cristallina, che ostruisce facilmente il refrigerante. La nuova sostanza viene separata dal liquido acquoso per filtrazione e lavata con acqua; il filtrato, che contiene oltre all' acido acetico ancora notevoli quantità della sostanza solida, viene distillato una seconda volta con vapor acqueo. Si ottengono così da 6 gr. di percloruro circa 2 gr. del nuovo corpo, che si purifica facilmente dopo averlo seccato nel vuoto sul cloruro di calcio, facendolo cristallizzare un paio di volte dall' etere petrolico bollente. Per raffreddamento si ottengono laminette senza colore, che seccate nel vuoto sul cloruro di calcio diedero all'analisi i seguenti numeri:

I. — 0,3220 gr. di sostanza diedero 0,2790 gr. di CO_2 e 0,0270 gr. di OH_2.

II. — 0,1600 gr. di sostanza dettero 0,4460 gr. di Ag Cl.

III.— 0,2455 gr. di sostanza svolsero 14,5 c. c. di azoto misurato a 9° e 767 mm.

In 100 parti:

	trovato			calcolato per C_4Cl_4HN
	I	II	III	
C	23,63	—	—	23,41
H	0,93	—	—	0,49
Cl	—	68,94	—	69,27
N	—	—	7,14	6,83
		100,64		100,00

Dall'analisi risulta che il composto ottenuto dal percloruro di percloropirocolla per azione dello zinco ed acido acetico, ha la formola del

« *Tetracloropirrolo* » [« C_4Cl_4NH »],

e noi crediamo che per le sue proprietà esso debba esser riguardato come tale.

Fonde a 110° scomponendosi, è molto solubile nell'alcool e nell'etere, poco nell'acqua. Il miglior solvente per ottenerlo cristallizzato è l'etere petrolico, nel quale si scioglie facilmente a caldo, e si separa per raffreddamento in pagliette o laminette lunghe alle volte qualche centimetro, d'uno splendore setaceo.

Il tetracloropirrolo è molto volatile ed ha un odore caratteristico, che è simile a quello del vapore del tetrajodopirrolo, e massima a quello della soluzione acquosa bollente dell'acido triclorocarbopirrolico; ricorda pure l'odore del tribromofenolo. Il

tetracloropirrolo è oltremodo alterabile, dopo poco tempo diventa grigio, bruno ed in pochi giorni si trasforma in una massa nera carbonizzata; esso si comporta come un debole acido, la sua soluzione in acqua od in alcool diluito arrossa debolmente la carta di tornasole; si scioglie nei carbonati e negli idrati alcalini e precipita inalterato per aggiunta di un acido. Sciolto nell'ammoniaca da col nitrato argentico un precipitato bianco.

Resiste all'azione dell'acido cloridrico bollente senza alterarsi, nè sciogliersi; viene però completamente ossidato dall'acido nitrico. Il tetracloropirrolo da coll'acido solforico concentrato una reazione caratteristica, che può servire a scoprirne le più piccole tracce. Esso si scioglie in quest'acido, per lieve riscaldamento, formando una soluzione d'un colore rosso bruno intenso, aggiungendo alcune goccie d'acqua si ottiene un bel coloramento violetto; un eccesso d'acqua produce invece un precipitato (o colorazione) verde, che si scioglie nella potassa con un coloramento giallo-ranciato intenso.

Il tetracloropirrolo resiste all'azione dell'amalgama di sodio e della potassa bollente e polvere di zinco.

La formazione di tetracloropirrolo dal composto $C_{10} Cl_{10} N_2 O_2$ ci fa credere che il detto corpo sia ancora un derivato del pirrolo, e ci induce a riguardarlo come un percloruro di percloropirocolla. Si può supporre a nostro avviso, che nella reazione descritta, in una prima fase del processo, per azione dell'acido acetico acquoso avvenga la trasformazione del percloruro di percloropirocolla in acido triclorocarbopirrolico tetraclorurato ($C_4 Cl_3 (COOH) [Cl_4] NH$), e che questo corpo si scinda subito in anidride carbonica ed in tetracloruro di tricloropirrolo ($C_4 Cl_3 H [Cl_4] N H$), il quale a sua volta viene trasformato dall'idrogeno nascente in tetracloropirrolo:

1.) $C_{10} Cl_6 (Cl_8) N_2 O_2 + 2\, OH_2 = 2C_4 Cl_3 (COOH)\ (Cl_4)\, NH$

2.) $C_4 Cl_3 (COOH)\ (Cl_4)\, NH = CO_2 + C_4 Cl_3 H\ (Cl_4)\, NH$

3.) $C_4 Cl_3 H\ (Cl_4)\, NH + H_2 = C_4 Cl_4 NH + 3H Cl$

oppure riassumendo:

$$C_{10} Cl_6 (Cl_8) N_2 O_2 + 2\, OH_2 + 2\, H_2 = 2\, C_4 Cl_4 NH + 2\, CO_2 + 6\, HCl$$

2. Azione dell'acqua sul percloruro di percloropirocolla.

Abbiamo già accennato più sopra, che facendo bollire questo composto colla potassa, si svolge ammoniaca, e si forma un acido deliquescente. Noi abbiamo studiato l'azione dell'acqua a temperatura elevata in tubi chiusi, e su questo argomento abbiamo fatto nello scorso febbraio, una comunicazione preliminare a questa Accademia.

Il percloruro di percloropirocolla riscaldato con acqua in tubi chiusi ad una temperatura di circa 130°, si scompone in ammoniaca, acido carbonico e cloridrico, ed in una materia che non contiene più azoto, la quale è

« *l'acido α bicloroacrilico* »

ottenuta da Bennet e Hill [1] dall'acido mucoclorico.

[1] Berl. Ber. XII, 655.

Riscaldando 4 gr. del composto $C_{10}Cl_{14}N_2O_2$ con circa 20 gr. di acqua per 6 o 7 ore in tubi chiusi a 130°, si ottiene una soluzione perfettamente scolorata. Nell'aprire i tubi si svolge un gas, che fù ben tosto riconosciuto per acido carbonico. Il liquido, trattato ripetutamente con etere cede a questo l'acido α bicloroacrilico mentre la soluzione acquosa contiene ancora acido cloridrico libero, cloruro ammonico ed alcune tracce di materia organica che abbiamo trascurate.

L'acido che si ottiene per svaporamento dell'estratto etereo, e che si fa cristallizzare una o due volte dall'acqua, ha la composizione e tutte le proprietà dell'acido α bicloroacrilico descritto da Bennett e Hill. Esso forma dei piccoli prismi che sono facilmente solubili nell'acqua, nell'etere e nell'alcool mentre si sciolgono più difficilmente nel benzolo e nel solfuro di carbonio freddi. Esso fonde, conformemente a ciò che dissero gli autori già citati, a 85°-86°.

I.) 0,3345 gr. di materia diedero 0,3160 gr. di CO_2 e 0,0490 gr. di OH_2.

II.) 0,1565 gr. di sostanza dettero 0,3170 gr. di AgCl.

In 100 parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per la formola $C_3Cl_2H_2O_2$
C	25,77	—	25,53
H	1,61	—	1,42
Cl	—	50,09	50,35

Anche i sali baritico ed argentico dell'acido da noi ottenuto hanno precisamente le proprietà descritte dai due autori inglesi.

Il sale baritico cristallizza in scagliette con una molecola d'acqua che perde sotto i 100°.

0,3760 gr. di materia disseccata sull'acido solforico perdettero a 100°, 0,0150 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $(C_3HCl_2O_2)_2Ba + H_2O$
H_2O	3,99	4,14

0,3555 gr. di sale baritico deacquificato a 100° dettero 0,1995 gr. di $BaSO_4$.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $(C_3HCl_2O_2)_2Ba$
Ba	32,99	32,85

Il sale argentico si ottiene facilmente, precipitando la soluzione acquosa dell'acido col nitrato d'argento, in forma di lunghi aghi finissimi, che si possono far cristallizzare dall'acqua bollente senza che subiscano alterazione alcuna.

0,4150 gr. di sostanza diedero 0,2385 gr. di Ag Cl.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $(C_3Cl_2HO_2)Ag$
Ag	43,22	43,55

La trasformazione del percloruro di percloropirocolla in acido α bicloroacrilico per azione dell'acqua, può essere rappresentata dalla seguente equazione:

$$C_{10}Cl_{14}N_2O_2 + 10\,OH_2 = 2\,C_3Cl_2H_2O_2 + 10\,HCl + 2\,NH_3 + 4\,CO_2.$$

3. Azione dell'acido acetico diluito sul percloruro di percloropirocolla.

La reazione or descritta rappresenta una scomposizione troppo profonda, della pirocolla ed in seconda linea dell'acido carbopirrolico, da poter bastare da se sola a delle considerazioni teoretiche, abbenchè la formazione di un acido che si ottiene in modo simile dall'acido piromucico, sia un fatto degno di speciale considerazione.

Noi abbiamo studiato perciò i prodotti che si ottengono con una reazione più moderata, impiegando, cioè invece dell'acqua a 130°, una soluzione bollente d'acido acetico diluito.

Si riscaldano in una storta nel modo già indicato prima, 5 gr. di percloruro di percloropirocolla per volta, sciolti nella quantità necessaria di ac. acetico glaciale, aggiungendo tanta acqua, fino che nella soluzione acetica bollente incomincia a prodursi un precipitato. Dopo poco tempo si nota un abbondante sviluppo di anidride carbonica, al quale tien dietro, quando il primo è quasi cessato, uno sviluppo di acido cloridrico. — Dopo circa 4 ore di ebollizione, il cessare dello svolgimento di ac. cloridrico segna la fine della reazione. Si distilla il contenuto della storta a pressione ridotta a b. m., e si ottiene un residuo formato da pagliette lievemente gialle, che si fanno cristallizzare alcune volte dall'acqua bollente. Per raffreddamento si ottengono dei cristalli bianchi, aghiformi, lunghi da 1 fino a 2 cm., che seccati nel vuoto, diedero all'analisi i seguenti numeri:

I. — 0,2690 gr. di materia dettero 0,2835 gr. di CO_2 e 0,0270 gr. di OH_2.
II. — 0,1460 gr. di materia dettero 0,2516 gr. di Ag Cl.
III. — 0,2820 gr. di materia svolsero 20,5 c. c. d'azoto, misurato a 11,°0 e 761 mm.

In 100 parti:

	trovato			calcolato per $C_4 Cl_2 O_2 NH$
	I	II	III	
C	28,74	—	—	28,91
H	1,11	—	—	0,60
Cl	—	42,68	—	42,77
N	—	—	8,67	8,43

La formola « $C_4 Cl_2 O_2 NH$ » risultante dall'analisi è quella d'un imide bicloromaleica o bicloro fumarica, e difatti il nuovo composto ha il comportamento di una imide formando facilmente un composto argentico ed argentammonico. Svolge ammoniaca bollendolo con potassa e si trasforma in un acido deliquescente.

La nuova sostanza fonde a 179°, è facilmente solubile nell'alcool, etere, cloroformio ed acido acetico glaciale; dall'acqua bollente, nella quale è abbastanza solubile, cristallizza per raffreddamento in lunghi aghi bianchi. La sua soluzione acquosa ha una debole reazione acida alle carte di tornasole. Trattandola con nitrato argentico si ottiene dopo qualche tempo un precipitato formato da piccoli aghi. Con nitrato d'argento ammoniacale si ottiene subito un precipitato bianco del *composto argentammonico*, solubile nell'acqua bollente, dalla quale cristallizza in aghi senza colore.

0,2000 gr. di sostanza diedero 0,1000 gr. di Ag Cl.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per la formola $C_4Cl_2O_2N.(AgNH_3)$
Ag	37,60	37,24

Le acque madri dalle quali fu ottenuto il composto descritto contengono ancora piccole quantità di un acido clorurato, scevro d'azoto e deliquescente, che si ottiene estraendo le acque madri con etere. Seccato sull'acido solforico, forma una massa cristallina bianca, deliquescente. Il suo sale baritico cristallizza in tavolette quadrate e deflagra se viene riscaldato. La piccola quantità di materie non ci ha permesso di farne l'analisi.

La formazione d'un composto imidico della formola $C_4Cl_2O_2NH$ dal percloruro di percloropirocolla per azione moderata dell'acqua si può spiegare colle due equazioni seguenti:

I. $C_{10}Cl_6(Cl_8)N_2O_2 + 2H_2O = 2\ C_4Cl_3H(Cl_4)NH + 2\ CO_2$

II. $C_4Cl_3H(Cl_4)NH + 2\ H_2O = C_4Cl_2O_2NH + 5\ HCl.$

oppure riassumendo:

$$C_{10}Cl_6(Cl_8)N_2O_2 + 6\ H_2O = 2\ C_4Cl_2O_2NH + 2\ CO_2 + 10\ HCl$$

Le piccola quantità di materia delle quali disponevamo, in causa della lunga e difficile preparazione della pirocolla, non erano tali da permettere di stabilire direttamente la natura del composto $C_4Cl_2O_2NH$; partendo però dall'idea che esso fosse un'imide biclorofumarica o bicloromaleica abbiamo tentato, non essendo noto nessuno di questi due composti, di ottenerli facendo agire il cloro sull'imide succinica, incoraggiati del fatto che Kisielinski (¹) ottenne assieme ad altre sostanze l' imide monobromofumarica, appunto dall'imide succinica trattandola con bromo.

L'esperienza ha confermato le nostre previsioni, e noi siamo stati in grado di stabilire l'identità del composto proveniente dalla pirocolla con quello ottenuto dall'imide succinica.

Si riscaldano 50 gr. di imide succinica, seccata nel vuoto sull'acido solforico, in un pallone di un litro in un bagno ad olio a 160°-170°, e si fa passare mediante un tubo che pesca nella massa fusa, una lenta corrente di cloro secco. Incomincia subito un forte sviluppo di ac. cloridrico, e dopo 8 ore circa, le pareti del pallone che rimangono fuori dell'olio si ricoprono d'uno strato di cristalli. Questa sublimazione però è effimera e ritorna a fondersi per dar luogo ad una seconda sublimazione che si forma più tardi, e che è molto più abbondante. Dopo circa 20 ore lo sviluppo d'acido cloridrico è molto diminuito e si interrompe l'operazione. È vantaggioso di trattare separatamente la parte bianca e cristallina del prodotto, che è sublimata alle pareti superiori del pallone, dal residuo fuso che rimane al fondo in forma d'una massa bruna e resinosa. Si rompe perciò il pallone, si tratta la parte sublimata (47 gr., da 50 gr. di imide succinica) con acqua e si estrae con etere. L'estratto etereo viene fatto cristallizzare dall'acqua bollente. Durante questa operazione si notò sempre una forte effervescenza del liquido, che emana un'odore molto pungente. La soluzione è intensamente gialla e tinge facilmente la pelle, per raffredda-

(¹) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. Wien Bd. 74, II Abth. pg. 561.

mento si ottiene un'abbondante cristallizzazione formata da aghi e pagliette. È molto facile di separare queste due sostanze in causa della loro diversa solubilità nell'acqua. Dopo due o tre cristallizzazioni dell'acqua bollente si riesce ad avere solamente il corpo cristallizzato in aghi, mentre l'altro resta sciolto nelle acque madri.

Il composto così ottenuto (13 gr. da 50 di succinimide) cristallizza in aghi bianchi lunghi alle volte da 10 fino a 15 cm., fonde a 179° ed è in tutto identico a quello testè descritto, proveniente dal percloruro di percloropirocolla.

I. — 0,4368 gr. di materia diedero 0,4636 gr. di CO_2 e 0,0397 gr. di OH_2.

II. — 0,5408 gr. di materia diedero 0,5726 gr. di CO_2 e 0,0386 gr. di OH_2.

III. — 0,1796 gr. di materia diedero 0,3080 gr. di Ag Cl.

In 100 parti:

	trovato			calcolato per $C_4 Cl_2 O_2 NH$
	I	II	III	
C	28,94	28,88	—	28,91
H	1,01	0,79	—	0,60
Cl	—	—	42,42	42,77

Esso da un precipitato cristallino col nitrato d'argento; trattando la sua soluzione acquosa col nitrato argentico ammoniacale si ottiene un precipitato bianco, formato da piccoli aghi, che è il *composto argentammonico* [$C_4 Cl_2 O_2 N . NH_3 Ag$].

I. — 0,2768 gr. di sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico svolsero 24 c c. d'azoto misurato a 20° e 751 mm.

II. — 0,3344 gr. di sostanza dettero 0,1666 gr. di Ag Cl.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per $C_4 Cl_2 O_2 N . NH_3 Ag$
	I	II	
N	9,80	—	9,65
Ag	—	37,50	37,24

Il composto « $C_4 Cl_2 O_2 NH$ », per la sua composizione e per la sua provenienza non può essere altro che *un imide bicloromaleica* o *biclorofumarica*. Per ragioni che esporremo più sotto noi crediamo ch'esso sia con molta probabilità *l' imide dell'acido bicloromaleico*.

Le acque madri dalle quali fu ottenuto il corpo descritto contengono ancora come si è detto un'altra sostanza più solubile nell'acqua, che cristallizza in pagliette. Per ottenerla si agitano le acque madri con etere, e si fa cristallizzare l' estratto etereo dal cloroformio fino ad ottenere un punto di fusione costante. Il composto così ottenuto è colorato ancora un poco in giallo, e si purifica facilmente facendolo sublimare. Esso forma grandi pagliette senza colore, splendenti, che fondono a 131°.

La loro composizione è quella d'un *imide monoclorofumarica* (*o monocloromaleica*).

I. — 0,2404 gr. di materia dettero 0,2624 gr. di Ag Cl.

II. — 0,2942 gr. di materia diedero 0,3910 gr. di CO_2 e 0,0450 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per C_4ClHO_2NH
C	—	36,23	36,50
H	—	1,69	1,52
Cl	26,99	—	26,99

Questo composto è solubile nell'acqua, nell'etere, nell'alcool e nel cloroformio bollente dal quale cristallizza per raffreddamento in forma di squamette. Col nitrato d'argento si ottiene dopo qualche tempo un precipitato cristallino, con nitrato d'argento ammoniacale si forma istantaneamente un precipitato bianco di piccoli aghi. È volatile ed il suo vapore e la soluzione bollente, hanno un odore pungentissimo che attacca le mucose. Trattando questa imide nuovamente con cloro nel modo descritto prima, si ottiene l'imide bicloromaleica fondente a 179°; di questo comportamento abbiamo approfittato per procurarci maggiori quantità di quest'ultima sostanza che era per noi la più interessante.

Il residuo resinoso suaccennato, che resta in fondo al pallone, contiene anche esso piccole quantità dei due composti descritti, che però non si possono ottenere puri che molto difficilmente. Esso si scioglie in acqua formando una soluzione intensamente giallo-bruna e contiene inoltre ancora altre sostanze delle quali per ora non ci siamo occupati. È nostra intenzione di continuare lo studio dell'azione del cloro sull'imide succinica in diverse condizioni.

4. Azione della potassa sull'imide « $C_4Cl_2O_2NH$ ».

Facendo bollire questa imide colla potassa, si svolge ammoniaca e si ottiene un acido deliquescente. Si continua l'ebollizione fino cho cessa lo sviluppo di ammoniaca e si estrae con etere il liquido acidificato con acido solforico diluito. Lo estratto etereo è un liquido senza colore, molto denso, che posto sull'acido solforico si solidifica formando una massa cristallina bianca, che lasciata esposta all'aria va presto in deliquescenza. Il nuovo acido è pure molto solubile nell'etere e nell'alcool, ma è insolubile affatto nel benzolo anche bollente. Riscaldandolo in un tubicino si ottiene un sublimato che non si scioglie nell'acqua che molto lentamente.

La soluzione acquosa del nuovo acido da un precipitato bianco e cristallino col nitrato d'argento; se la soluzione è diluita il sale argentico cristallizza in aghi sottili.

Esso ha la formola « $C_4Cl_2H_2O_4$ » come lo dimostra l'analisi del *sale argentico*: 0,4288 gr. di materia seccata nel vuoto sull'acido solforico diedero 0,3064 gr. di Ag Cl.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_4Cl_2O_4Ag_2$
Ag	53,77	54,14

Il sale argentico è solubile nell'acqua bollente e cristallizza per raffreddamento; deflagra vivamente se viene riscaldato.

Il composto che si forma dall'acido $C_4Cl_2H_2O_4$ per azione del calore è l'anidride corrispondente. Per ottenerla si distilla l'acido in una corrente di anidride carbonica. Da principio passa una soluzione acquosa dell'acido, ed indi distilla, con

parziale sublimazione, una sostanza che si solidifica nel collo della storta, e che si purifica per sublimazione. Essa forma delle fogliette senza colore che fondono a 119-120°, è molto solubile nell'alcool, nell'etere, nel benzolo e nel solfuro di carbonio; nell'acqua non si scioglie che molto lentamente trasformandosi nuovamente nell'acido.

I. — 0,3102 gr. di materia seccata nel vuoto sull'acido solforico dettero 0,3246 gr. di CO_2 e 0,0140 gr. di OH_2.

II. — 0,2292 gr. di materia dettero 0,3934 gr. di Ag Cl.

In 100 parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_4 Cl_2 O_3$
C	28,53	—	28,74
H	0,48	—	0,00
Cl	—	42,45	42,51

Le proprietà ed il comportamento dell'acido descritto somigliano tanto a quelle dell'acido bibromomaleico, che si ottiene dall'acido mucobromico [1], che noi crediamo assai probabile che il nostro composto sia l'acido bicloromaleico piuttosto che l'acido biclorofumarico, perciò crediamo pure che l'imide « $C_4 Cl_2 O_2 NH$ » debba essere riguardata come imide bicloromaleica.

È inoltre fuor di dubbio che l'acido deliquescente che si forma assieme all'imide, per l'azione dell'acido acetico diluito sul percloruro di percloropirocolla sia pure l'istesso acido bicloromaleico.

Finalmente è da notarsi che l'acido deliquescente, già più volte accennato, che fu ottenuto dal percloruro di percloropirocolla per ebollizione con potassa [2], deve con grande probabilità, essere identico a quello or descritto. Un'analisi del composto che si ottiene per sublimazione di quell'acido, che venne fatta allora ma che non è stata ancora pubblicata, concorda sufficientemente coi numeri richiesti dall'anidride bicloromaleica.

0,2831 gr. di sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico diedero 0,2956 gr. di CO_2 e 0,0118 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_4 Cl_2 O_3$
C	28,49	28,74
H	0,50	—

5. Azione dell'acqua sull' imide bicloromaleica.

Dalle esperienze or descritte risulta che il percloruro di percloropirocolla si trasforma per azione *moderata* dell'acqua in imide bicloromaleica; restava dunque ancora da vedersi se questo ultimo composto, riscaldato con acqua in tubi chiusi desse l'acido bicloroacrilico identico a quello ottenuto nello stesso modo dal percloruro di percloropirocolla.

(1) Hill. *Berl. Ber.* XIII, 736

(2) Ciamician e Danesi. Vedi Memoria citata.

Riscaldando 2 gr. dell' imide con 20 c. c. di acqua per 8 ore a 125°, si nota nell'aprire i tubi un forte sviluppo d'anidride carbonica. Il contenuto dei medesimi è colorato in giallo e contiene un po' di materia carbonizzata. Si filtra e si estrae il liquido che ha reazione acida con etere. L'estratto etereo è formato da un acido che cristallizza dall' acqua in forma di piccoli prismi, esso fonde a 85°-86° ed ha tutte le proprietà « *dell'acido α) bicloroacrilico* » di Bennett e Hill, che si ottiene pure dalla pirocolla.

I. — 0,2772 gr. di materia diedero 0,2598 gr. di CO_2 e 0,0422 gr. di OH_2.

II. — 0,1680 gr. di materia diedero 0,3396 gr. di Ag Cl.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per $C_3H_2Cl_2O_2$
	I	II	
C	25,54	—	25,53
H	1,69	—	1,42
Cl	—	50,00	50,37

Il sale argentico ottenuto trattando la soluzione acquosa dell'acido con nitrato d'argento, in forma di lunghi, finissimi aghi, diede i seguenti numeri;

0,1842 gr. di materia dettero 0,1064 gr. di Ag Cl.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_3HCl_2O_2Ag$
Ag	43,48	43,55

Nel liquido acquoso è facile di riconoscere la presenza di cloruro ammonico. La reazione principale avviene di certo secondo la seguente equazione:

$$C_4Cl_2O_2NH + 2H_2O = C_3Cl_2H_2O_2 + CO_2 + NH_3,$$

e la formazione di acido cloridrico è dovuta ad una reazione secondaria che produce inoltre la materia carbonizzata suaccennata.

6. Sintesi del Tetracloropirrolo.

La facile trasformazione del percloruro di percloropirocolla in imide bicloromaleica ci indusse a tentare la reazione inversa, cioè la sintesi del tetracloropirrolo dalla imide per mezzo del pentacloruro di fosforo.

Le nostre esperienze sono state coronate da un buon successo e noi siamo in grado di dimostrare l'identità del tetracloropirrolo ottenuto per via sintetica con quello ricavato dalla pirocolla.

Il pentacloruro di fosforo non agisce a pressione ordinaria sull'imide bicloromaleica; riscaldando il miscuglio delle due sostanze si ottiene un liquido leggermente giallo, che anche dopo una lunga ebollizione, da per trattamento con acqua l' imide inalterata. Noi abbiamo perciò riscaldato in tubi chiusi a 160° per 8 ore, 3 gr. di imide per volta con circa 12 gr. di pentacloruro di fosforo. Il contenuto dei medesimi dopo il riscaldamento, è formato da un liquido rosso (alle volte è giallo chiaro) e da un residuo di pentacloruro inalterato. Si versa tutto nell'acqua e si distilla con vapore. Passa un olio pesante, d'un odore pungente, che ricorda quello della canfora, e che si rapprende in parte formando una massa semisolida.

Il residuo della distillazione, è giallo e contiene oltre ad un po' di materia resinosa, dell'imide rimasta inalterata (o ripristinata) e piccole quantità di un acido deliquescente.

Il distillato venne agitato con etere, e l'estratto etereo, che è formato da un liquido oleoso, nel quale nuotano dei cristalli, venne senza purificarlo e senza determinare per ora la sua composizione, trattato con idrogeno nascente.

A tal scopo si scioglie il prodotto in acido acetico, e si aggiunge tanta acqua da produrre un precipitato, e della polvere di zinco. Incomincia subito una viva reazione, al finir della quale si riscalda debolmente il liquido per mantenerlo in ebollizione per due o tre ore. Indi si diluisce con acqua e si distilla in una corrente di vapore. Assieme al vapor acqueo passa un olio, che cristallizza nel refrigerante e che separato dall' acqua, seccato e fatto cristallizzare dall' etere petrolico, forma delle laminette senza colore, che fondono a 110° scomponendosi ed hanno tutte le proprietà del tetracloropirrolo ottenuto dalla pirocolla.

0,3952 gr. di sostanza seccata nel vuoto sul cloruro di calcio diedero 0,3430 gr. di CO_2 e 0,0276 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per C_4Cl_4NH
C	23,68	23,41
H	0,78	0,49

Finora non abbiamo potuto eliminare il cloro dal tetracloropirrolo.

Lo studio di questo composto sarà continuato.

7. Conclusioni.

I risultati della presente memoria possono esser contemplati da due lati diversi. In primo luogo essi servono a far risaltare l' analogia dell' acido carbopirrolico (o della sua anidride) con l' acido piromucico, ed in seconda linea mettono il pirrolo ed i suoi derivati alogenati in relazione diretta coll' imide dell' acido maleico (o fumarico).

Qualunque sia la formola di struttura che si voglia dare alla pirocolla, di certo questo composto si comporta come un anidride (a formola doppia) dell'acido carbopirrolico, e la formola:

$$C_4H_3\begin{cases} // N- \\ \diagdown CO- \end{cases}$$

è quasi indipendente da qualunque ipotesi.

È noto che l'acido piromucico si trasforma per azione di un eccesso di cloro in presenza dall'acqua in acido mucoclorico, il quale secondo le ricerche di Hill non è altro che la monoaldeide dell' acido bicloromaleico $\left(C_2Cl_2 \begin{cases} / CHO \\ \diagdown COOH \end{cases} \right)$, inoltre è

pure dimostrato da Bennet e Hill che l'acido mucoclorico si scinde colla potassa in acido α) bicloroacrilico ed in acido formico.

Queste trasformazioni dell'acido piromucico hanno una grande analogia col modo di comportarsi della pirocolla da noi descritto, e noi crediamo che la seguente comparazione dei prodotti di scomposizione di queste sostanze non sia priva d'interesse:

$$C_4H_3\begin{cases} /\!/ NH \\ \backslash COOH \end{cases}$$

acido carbopirrolico

$$C_4H_3\begin{cases} /\!/ O \\ \backslash COOH \end{cases}$$

acido piromucico

$$C_4Cl_3(Cl_4)\begin{cases} /\!/ N— \\ \backslash CO— \end{cases}$$

percloruro di percloropirocolla

?

?

$$C_4H_3(Cl_4)\begin{cases} /\!/ O \\ \backslash COO\,C_2H_5 \end{cases}$$

Etere etilico del tetracloruro dell'acido piromucico

$C_4Cl_2O_2NH$
imide bicloromaleica

$C_4Cl_2O_3H_2$
monoaldeide bicloromaleica
(ac. mucoclorico)

$C_3H_2Cl_2O_2$
acido α) bicloroacrilico

$C_3H_2Cl_2O_2$
acido α) bicloroacrilico

Noi crediamo che l'imide maleica o fumarica abbia una grande importanza per la sintesi diretta del pirrolo, e le nostre esperienze attendono a raggiungere questa meta.

Cranî italici del Piceno: contribuzione all'antropologia italiana.

Memoria del dott. GIUSEPPE SERGI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 giugno 1883.

(Con una tavola)

Occupandomi da qualche tempo dell'antropologia italiana, e stimando che la soluzione di molti problemi a questo riguardo dipenda dallo studio minuto e particolare delle genti antiche che popolarono la penisola nostra, ho fatto qua e là ricerca di cranî antichi delle varie regioni italiche. Per mezzo del ch. prof. Brizio, mio amico, ora ho potuto avere dal sig. Gentiloni conte Aristide di Tolentino, alcuni cranî da lui trovati in antichi sepolcri di quella città. Qui trovo l'occasione di ringraziare pubblicamente l'uno e l'altro per la cortesia usatami.

Tolentino è una città del Piceno, Plinio la ricorda fra le altre (1); ed io stimo opportuno dir qualche parola su questa regione e sulle genti che la popolarono, perchè ciò darà molta luce alle nostre ricerche.

I.

Il Piceno (Picenum) era limitato a settentrione dal fiume Aesis, che lo separava dall'Umbria e dai Galli Senoni; al sud-ovest dalle creste dall'Apennino, che spartivano la regione dei Sabini da quella dei Picentini e degli Umbri; al sud il fiume Salinus divideva il Piceno dai Vestini; all'est era il mare adriatico (2). Era quel territorio che oggi comprende una parte delle Marche da Ancona verso il sud, e dell'Abbruzzo Ulteriore fin presso a Civita s. Angelo, non molto lontano da Pescara.

Il nome alla regione picentina fu dato dalla colonia sabina, che la occupò. I Sabini, molestati spesso dagli Umbri, fecero il voto d'una primavera sacra, secondo il costume italico; a tempo opportuno compiuto il voto, la colonia fu guidata dal picchio (*picus*), uccello sacro a Marte, in quella regione, che dal nome dell'uccello fu denominata *Picenum* (3).

I Picentini erano, quindi, Sabini; e che gente erano i Sabini? — Quando gli antichi scrittori ignoravano la provenienza di un popolo, lo dicevano *autoctono.* Così scrissero dei Sabini. Certo è che il gruppo primitivo di questa gente occupò quella

(1) Nat. Hist. III, 14.

(2) Cfr. Strab., V, 4: Plin., Nat. Hist., III, 13. Vedasi la carta d'Italia antica del Kiepert.

(3) Strab., V, 4. — Cfr. Niehbur, Römische Geschichte, pag. 76, Vol. I. Ed. Calvary, Berlin. 1873; Mommsen, R. G. I, pag. 117.

regione montuosa dell'Apennino posta fra il Piceno, l'Umbria, l'Etruria ed il Lazio. Perciò Catone scrisse che le prime sedi dei Sabini furono in un *vicus* (κώμη) denominato Testrina presso ad Amiterna [1], che fu la città principale dei Sabini, e forse la prima. Da questi siti essi avrebbero fatto escursioni qua e là nel territorio, occupandolo poco alla volta e fondandovi città, fra cui Cure. Il nome ai Sabini, aggiunge Catone, è venuto da Sabo, figlio di Sauco, che era un Dio della tribù [2].

Ma vi è un'altra tradizione, quella di Zenodoto di Troezene, il quale scrive che gli Umbri indigeni erano prima abitatori dell'agro reatino, e che cacciati da Pelasgi vennero nel luogo che ora abitano; mutato sito, mutarono nome, da Umbri in Sabini [3]. Una parentela cogli Umbri, se non è così intima, è certamente incontrastabile.

Pare, ad ogni modo, che i Sabini sieno stati il nucleo primitivo delle genti sabelliche [4], le quali popolarono gran parte d'Italia, dal Piceno alla Lucania, e contribuirono molto all'aumento dei Latini e di Roma stessa [5]. I Sabelli furono sicuramente uno dei rami più numerosi della gente italica appartenente allo stipite indo-europeo.

Ma quando la colonia sabina occupò il Piceno, questo non era privo di abitatori; secondo i ricordi di Plinio, vi erano Siculi e Liburni, come nell'Umbria. Numana sarebbe stata fondata dai Siculi, e Truentum sarebbe stato, in quel tempo, l'unico avanzo dei Liburni in Italia [6].

Poichè la storia tace qui ed altrove, è da credere che le colonie non fossero tanto numerose da distruggere o cacciare totalmente gli abitatori primitivi del suolo; dobbiamo anzi ammettere che dapprima vi sia stata ostilità, in seguito o soggezione o fusione dei primi coi nuovi venuti. E ciò credo che possa mostrarsi ad esuberanza in Italia in varie occasioni; ma qui non è il luogo di occuparci di questo.

II.

I cranî avuti dal conte Aristide Gentiloni, come ho detto, sono stati tratti da una necropoli di Tolentino.

La necropoli è preromana, e senza alcun dubbio, come l'attestano gli oggetti trovati nei sepolcri, neppur uno essendovene di provenienza o di carattere romano. Siccome il Piceno fu sottomesso a Roma 268 anni a. C., si può ammettere che l'età più tarda di questi sepolcri sia del terzo secolo avanti Cristo; forse si potrebbe attribuire ad essi un'età un poco più antica per qualche considerazione che sorge sulla natura dei sepolcri e loro costruzione.

Le tombe sono state ben descritte dallo stesso scopritore sig. Gentiloni [7]; io qui non fo che riassumere la descrizione. La maggior parte di esse contengono scheletri, i combusti sono rari. Le tombe sono scavate nella terra, e non vi ha alcun

[1] Presso Dion, Alic., II, 49.
[2] Loco citato.
[3] Presso Dion. Alic., loc. cit.
[4] Cfr. Niebbur, R. G. Vol. I, pag. 75 e seg. — Mommsen, R. G. Vol. I, cap. 8°.
[5] Nat. Hist., III, 13, 14.
[6] Nat. Hist., III, 14.
[7] Bullettino di Paletnologia italiana 1880, settembre-ottobre.

sostegno di pietre lateralmente, come nei sepolcri umbri ed etruschi di Bologna; il cadavere giace supino, generalmente coi piedi rivolti ad oriente; il capo è piegato verso la spalla destra, qualche volta il corpo è leggermente volto sul fianco destro. I sepolcri contengono molte stoviglie, di fini e di rozze, ed un'urna cineraria, in cui si trovano ceneri, ma non ossa combuste. Il sig. Gentiloni suppone, ed a ragione, che le ceneri sieno di oggetti appartenenti all'estinto e bruciati; si vede, difatti, sul luogo ove giace lo scheletro, avanzi di combustione.

Di vasi fini alcuni sono etruschi, di rozzi ve ne ha parecchi, che non hanno nulla di comune coi primi, per la forma, per la qualità della creta e pel colore. In alcuni di questi vasi, nei sepolcri di Tolentino, trovansi avanzi di alimenti.

Trovansi ancora varî oggetti di ornamento in bronzo ed in vetro, fibule, ed armi di ferro.

Ma degno di attenzione è quest'altro fatto: si trovano « vicino allo scheletro ed anco entro ai vasi schegge di selve lavorata. In alcune tombe (scrive l'autore) ho raccolto pure frammenti di coltellini e punte di frecce » [1].

Queste tombe, a parer mio, secondo gli oggetti che racchiudono, rappresentano tre periodi di civiltà, di cui uno è solo un ricordo, cioè l'età della pietra, l'età del bronzo e l'età del ferro. L'età del bronzo è dei popoli italici; quando essi si staccarono dallo stipite indoeuropeo, conoscevano il bronzo; quando vennero in Italia, ne usavano in larga copia. Nella lingua comune indoeuropea non vi ha ricordo dell'uso della pietra [2]; ciò non vuol dire che questo popolo non avesse traversato questo periodo; per lo meno è certo che nella separazione dei varî rami, essi adoperavano già il bronzo. Ma gli Italici, venendo in Italia, trovarono genti che usavano la pietra, e parte cacciarono, parte sottomisero e s'incorporarono. Non è ben determinata la prima introduzione del ferro in Italia e per quali gente avvenne; certo è che gli Etruschi ed i Romani sin dai primi tempi l'usavano.

Poste così le cose, venendo al caso nostro, risulta che nel sepolcreto di Tolentino, gli oggetti di bronzo, fibule ed altro, sono d'origine italica, o meglio sono rappresentanti della primitiva civiltà italica; il ferro ed i fittili etruschi sono un'importazione. Ed è facile concepire che gl'Italici del Piceno, come i Sabini e gli Umbri, possano avere ricevuto i fittili per commercio cogli Etruschi, ai quali erano così vicini. E la selce lavorata, i coltellini e le punte di frecce? — Per me esprimono il segno della fusione avvenuta fra la colonia sabina e le genti che abitavano anteriormente la regione picentina. Vi erano Siculi e Liburni; queste genti dovevano al tempo dell'invasione sabina trovarsi ancora nell'epoca della pietra; questa, perciò, nei sepolcri tolentinati è solo un ricordo storico, come sopra ho accennato. In altra guisa non saprei spiegare il fatto della presenza di selce lavorata.

III.

Di dieci cranî ricevuti solo cinque sono utili per lo studio e l'osservazione, e questi dopo che con somma cura e pazienza sono stati ricomposti, essendo in pezzi più o meno numerosi. Un solo può dirsi completo, eccetto che nella base, ove man-

(1) Bullettino citato, pag. 159, 163, 164.
(2) Cfr. Fick, *Die ehemalige Spracheinheit der Indogermanen Europas.* Göttingen, 1873 pag. 263, e seg.

cano i margini del forame occipitale. Gli altri sono più o meno incompleti; tre hanno la mandibola. La ricomposizione degli altri è impossibile, mancando varî pezzi intermedi. Rimane infine una calotta incompleta, che merita pel suo spessore considerevole una descrizione a parte.

Dei cinqua cranî tre sono femminili, un solo è di maschio l'altro è difficile a determinare.

Se si segnono le divisioni del Broca sull'indice cefalico, di questi cranî tre sono decisamente dolicocefali (67, 39; 72,98; 73,51); uno subdolicocefalo (76,57): l'altro mesaticefalo (78,85). Come vedesi, l'indice cefalico oscilla da 67, 39 a 78,85; dolicocefali tutti secondo B. Davis e il prof. L. Calori; nessun brachicefalo.

Guardati dalla norma verticale, alcuno di essi presenta un ovale quasi perfetto, (n. 1 della tavola); altri si avvicinano successivamente, il n. 3 è più vicino al n. 1; il 4 vien dopo, e l'ultimo che più si discosta è il n. 2. In altre parole, fra la parte anteriore del cranio e la posteriore vi ha una graduale e quasi insensibile espansione, finchè questa raggiunge il suo massimo nelle bozze parietali.

Benchè dolico e subdolicocefali, l'occipite non è prominente, nè l'osso più sviluppato, se se ne eccettua un solo, n. 4, ed in questo stesso, come negli altri, non si presenta come una protuberanza più o meno appuntita, ma è sempre pianeggiante, simile in ciò ai cranî brachicefali. I parietali hanno un gran sviluppo nel senso della loro larghezza. Le linee sono dolci e regolari, anco nel cranio maschile, le curve belle, non essendovi protuberanze troppo spiccate. Nell'insieme i cranî presentano una figura rotondeggiante, o meglio un'ellissoide regolare.

Il cranio *A* (del quadro millimetrico) è d'individuo vecchio molto; le suture sono completamente ossificate, le cavità delle così dette glandole di Pacchioni sono numerose e profonde, specialmente verso la sagittale, le ossa sono molto assottigliate. Ad eccezione degli altri, questo ha l'occipite appuntito, la bozza sinistra più infuori della destra, cosicchè il cranio ha l'aspetto plagiocefalico. Le gobbe parietali sono depresse assolutamente, il cranio è strettissimo, 124^{mm} appena nel suo diametro parietale massimo.

Osservati dalla norma laterale, appariscono ortognati: la fronte si presenta presso che verticale; le arcate sopraciliari sono poco o nulla sviluppate, le bozze frontali poco rilevate, evanescenti; l'altezza della fronte non esagerata, nè piccola. La volta craniale è presso che piana o pianeggiante, cominciando dalla curva superiore del frontale e per la sutura sagittale fin quasi all'obelio.

I zigomi non sono sporgenti; le orbite sono quadrate; il naso leptorino; la mandibola piuttosto piccola, e di belle curve ed eleganti.

Divisa la circonferenza orizzontale in due metà, una anteriore preauriculare, l'altra postauriculare, si vede prevalente quest'ultima. Così dai tre cranî in cui mi è stato possibile praticare questa misurazione, risulta:

	Parte preauriculare	Parte postauriculare
N. 1	245	259
» 2	245	254
» 3	250	276

La capacità cubica solo in uno è stato possibile calcolarla; ed in questo mi sono servito del metodo del prof. Calori, cioè dividendo il prodotto dei tre diametri massimi per $^{19}/_{45}$, metodo che mi par preferibile a quello del Broca [1].

In due soli ho potuto calcolare l'indice nasale, in uno il faciale, in uno l'orbitario ed il verticale, del quale oltre l'ordinario, cioè quello tratto dal rapporto della lunghezza del cranio, ho creduto opportuno calcolare quello in relazione alla larghezza, il trasverso-verticale (*b*). I cranî mancando delle basi, non si prestano alla misura dell'angolo faciale del mio geniometro [2].

In qualche raffronto che ho potuto fare con altri cranî antichi d'Italia, ho dovuto convincermi che questi da me esaminati presentano una gran somiglianza con quelli studiati e descritti dal prof. Calori come dolicocefali umbri [3]. Molto probabilmente gli uni e gli altri appartengono alla stessa gente, da quel che si può giudicare dalle forme craniali; stirpe italica certamente, frazionata nell'antichità più per nomi diversi che per tipo. Nè è tanto a meravigliarsi di questa conclusione, quando si pensi che Tolentino, luogo ove furono tratti i cranî picentini, e Pievetorina, nel circondario di Camerino, da cui il prof. Calori ebbe i cranî umbri, sono molto vicini, al confine del Piceno e dell'Umbria, e bagnati dallo stesso fiume, il Chienti (Cluentum). Benchè la descrizione dei sepolcri di Pievetorina e degli oggetti che essi contenevano, non fosse stata fatta al ch. prof. Calori con quella precisione ed esattezza, colle quali il sig. Gentiloni descrisse quelli di Tolentino, pure se ne rileva facilmente l'analogia dalla struttura e dagli oggetti fra gli uni e gli altri [4]. Tutte queste analogie, unite e quella della forma craniale, fanno credere che gli scheletri di tutti e due i sepolcreti appartenessero alla stessa gente.

Nè ho trascurato di confrontare questi cranî di Tolentino con cranî romani antichi. Ma qui mancandomi un numero sufficiente per rendere più utile il mio confronto, e più conclusivo, ho dovuto limitarmi a quello di cui posso disporre. Il Museo Civico di Bologna ne possiede due, completo uno, incompleto l'altro, ma importantissimi, perchè hanno tutti i caratteri generali e speciali dei cranî romani, così ben descritti dai professori Nicolucci e Calori [5].

Questi cranî sono dolicocefali veri, con un indice cefalico di 72,34 uno, 73,15 l'altro, con un diametro longitudinale di 188-190, parietale massimo 136-139; ed i dolicocefali romani sono il 70 %, secondo il Nicolucci. La porzione preauriculare è soverchiata dalla postauricolare, essendo in un cranio 260 mm. su 534, nell'altro 256 su 536 di circonferenza orizzontale. Le arcate sopraciliari sono molto spiccate, le gobbe frontali ben rilevate e ben distinte (Nicolucci).

Le orbite hanno forma quadrangolare e disposizione orizzontale (Nicolucci).

L'occipite è sporgente molto con le linee semicircolari molto rilevate.

[1] Cfr. Calori, *Della stirpe che ha popolato l'antica necropoli alla Certosa di Bologna* 1873. Bologna, pag. 70. — Broca, *Instructions craniométriques et craniologiques.* Paris 1875, pag. 112 e seg.

[2] Su questo confr. la mia Memoria: *L'angolo faciale ed un nuovo goniometro*, Firenze 1882 (In Archivio per l'antropologia).

[3] Cfr. Calori, op. cit., Tav. I-II.

[4] Vedi Calori, op. cit., pag. 67 e seg.

[5] Nicolucci, *Antropologia dell'Etruria.* Napoli, 1869. pag. 41 e seg. — Calori, op. cit., pag. 77. Cap. VIII.

Ma a me sembra che un carattere di somma importanza sia sfuggito all'osservazione dei due antropologi sopra nominati; carattere di tanto maggior rilievo, che è quello che forma, come io credo, l'apparenza esteriore, a primo aspetto, tipica, della testa romana antica. I due cranî che esaminiamo hanno chiaro e spiccato questo carattere.

Chi ha veduto statue romane, sa subito distinguerle dalle greche, guardandole solo nella testa e per la norma frontale, se ne accorge, cioè, che lateralmente il cranio è molto largo poco sopra del livello del forame auditivo esterno, cosicchè le orecchie rimangono come incassate; invece comincia a restringersi in sù verso i parietali, finchè in alcuni il sincipite ha l'apparenza della sommità d'una cupola. Vi ha perciò un declivio verso il frontale, ed uno analogo, ma più rapido, dalla sutura sagittale agli spigoli (che così appariscono le sporgenze ove le pareti verticali si piegano in sù) dei parietali.

Nel cranio quest'apparenza speciale corrisponde ad una realtà; il diametro bitemporale, misurato un poco al di sopra ed all'indietro del foro auditivo, è maggiore del biparietale massimo. Nei nostri due cranî, infatti, il bitemporale in uno è di 141 mm, il biparietale di 136, nell'altro il bitemporale è di 143, il biparietale di 139. Vi ha quindi un allargamento dei parietali verso la base del cranio è poi un piccolo restringimento verso le apofisi mastoidee. Il diametro bimastoideo nel primo è di 130, nel secondo di 134.

Se, quindi, si guarda il cranio dalla norma occipitale, dal diametro bitemporale in sù, esso presenta l'apparenza d'un semicerchio ben definito, o meglio, d'un poligono esagonale, a cui manchino due lati, gl'inferiori (fig. 5); mentre gli altri cranî generalmente hanno un'apparenza diversa, perchè la loro larghezza massima trovasi nei parietali, donde comincia il restringimento che va fino all'unione dei temporali, e continua fino alle apofisi mastoidee (fig. 1 *d*).

I cranî picentini descritti non hanno questo carattere speciale dei cranî romani; il restringimento discensivo, mi si conceda l'espressione, è costante e in tutti cinque i cranî esaminati, più o meno chiaramente, spiccatissimo in quello rappresentato dalla fig. 1, *d*. Ho potuto osservare che in alcuni di quelli esaminati dal prof. Calori, e sopra menzionati, quel carattere si presenta come iniziale, come una tendenza, ma non così definito come nel cranio romano ([1]).

Pei caratteri descritti di questi cranî romani, nessuna somiglianza si rileva fra essi e i picentini, di cui specialmente ci occupiamo. Non vi ha dubbio però che altri cranî romani hanno somiglianze coi nostri, come con quelli esaminati dal prof. Calori ([2]). Ma d'altro canto io non esito di dire che la forma caratteristica del cranio romano deriva dalla fusione perfetta di elementi diversi provenienti dalle razze che contribuirono alla fondazione di Roma ed alla formazione del popolo latino, di cui, senza dubbio, molta parte spetta alla stirpe italica; ed inoltre deriva dallo sviluppo fisico successivo delle genti latine.

Noi possiamo, con molta probabilità rannodare questi cranî picentini alla famiglia italica ben definita nella storia col nome di sabellica o di umbro-sabellica.

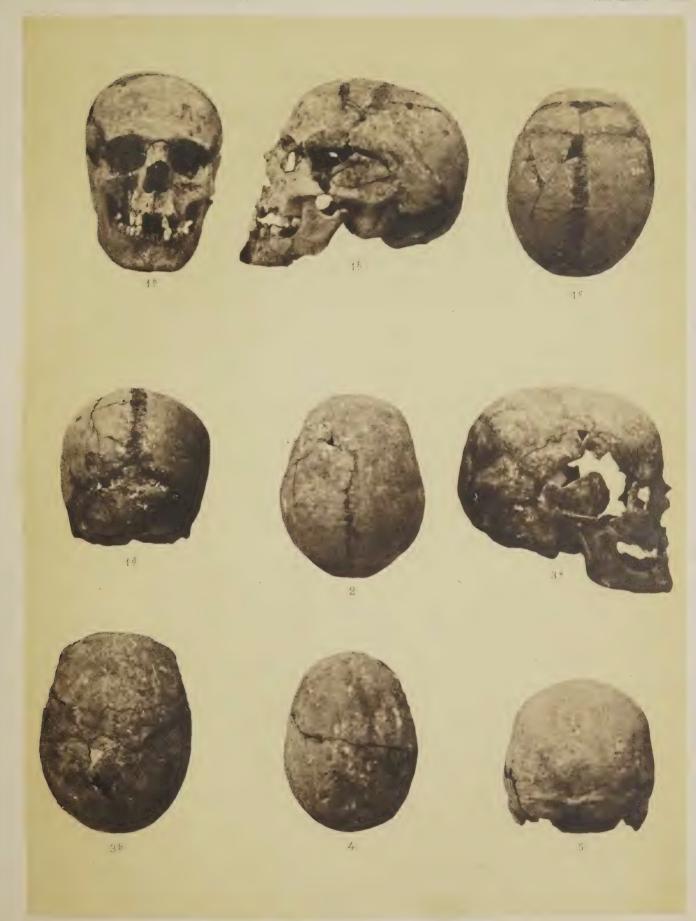
([1]) Vedi Tav. II, fig. 3a, e Tav. III, fig. 4a dell'op. cit.
([2]) Op. cit. pag. 79.

Prospetto craniometrico di V crani antichi del Piceno e di II romani.

No. secondo la Tavola	1	2	3	4	A	5 (romano)	B (romano)
Sesso	F	F	M.	F	F?	M.	M.
età (probabile)	24 c.	40 c.	60 c.	60 c.	80 c.	50 c.	60 c.
Diametro longitudinale	175	175	185	174	184	188	190
Diametro trasverso biparietale	134	138	136	127	124	136	139
Diametro trasverso bitemporale	121	130	»	»	»	141	143
Diametro bimastoideo	111	116	»	108	»	130	134
Diametro minimo frontale	94	86	104	»	»	92	95
Diametro stefanico	120	108	118	»	»	108	120
Diametro verticale	136?	»	»	»	»	138	130
Distanza fra gli apici mastoidei	95	103	»	90	»	110	115
Curva fronto-occipitale	363	367	376	380	366	380	383
a) porzione frontale	125	133	125	125	136	130	101
b) » parietale	130	124	131	125	122	127	133
c) » occipitale	108	110	120	130	108 ?	123	119
Circonferenza orizzontale	504	499	526	»	515	534	536
Semicirconferenza preauriculare	245	245	250	»	»	260	250
» postauriculare	259	254	276	»	»	274	286
Capacità cubica	1325?	»	»	»	»	1489?	1450
Lunghezza della faccia ofrio-alveolare	80	»	81	»	»	»	93
Lunghezza della faccia ofrio-mentale	126	»	129	»	»	»	141
Lunghezza della faccia naso-alveolare	63	»	63	»	»	»	69,5
Larghezza bizigomatica	114	»	»	»	»	»	134
Naso — altezza	45	»	48,5	»	»	»	52
» — larghezza	20,5	»	21	»	»	»	26
Orbita — altezza	33	»	»	»	»	35	32
» — larghezza	36	»	»	»	»	36	38,5
Mandibola — altezza senza denti (sinfisi)	32	29,5	30	»	»	»	30
» » coi denti	38	38,5	40	»	»	»	39
» larghezza fra i fori mentali	42,5	41	42	»	»	»	50
» distanza dal mento all'angolo	82	83	83	»	»	»	95?
» alt.za della branca ascendente	50	57	69	»	»	»	72?
» larghezza di questa al centro	29	29	29,5	»	»	»	37
» distanza intercondiloidea	115	107	113	»	»	»	»
» » biangolare	95	83	92	»	»	»	»
» » fra gli alveoli (ultimi molari)	50	47	44,5	»	»	»	52
» spessore al livello della linea miloioidea	14	14	14,5	»	»	»	18
Indici:							
cefalico	76,57	78,85	73,51	72,98	67,39	72,34	73,15
verticale (*a*)	77,72	»	»	»	»	73,38	68,42
verticale (*b*) (trasv.)	101	»	»	»	»	101	93,52
faciale	70	»	»	»	»	»	69,32
nasale	45,55	»	43,30	»	»	»	50
orbitario	91,66	»	»	»	»	97	83

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1*a*, 1*b*, 1*c*, 1*d*. Cranio picentino femminile.
» 2. Cranio picentino femminile.
» 3*a*, 3*b*, Cranio picentino maschile.
» 4. Cranio picentino femminile.
» 5. Cranio romano maschile.

1ª
1ᵇ
1ᶜ
1ᵈ
2
3ª
3ᵇ
4
5

Sopra talune forme cristalline che potrebbero simulare il bacillo del tubercolo.

Nota dei dott. ANGELO CELLI e GIUSEPPE GUARNIERI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 17 giugno 1883.

(con una tavola)

Poichè il bacillo della tubercolosi, scoperto, com' è noto, da R. Koch, intorno a sè richiama oggigiorno l'attenzione di tutti i patologi, reputiamo non inopportuno il darne queste brevi notizie, dopo già che da parecchi mesi, colla guida del metodo della colorazione di Weigert, siam venuti rintracciandolo ne' più diversi prodotti tubercolari.

L'abbiamo così ritrovato in 94 su 100 sputi tubercolosi, in 9 su 11 diarree di tisici, e non mai invece in 100 sputi d'altre svariatissime malattie di petto, e in 10 diarree di non tisici, come pure non mai nel sangue de' malati delle ordinarie forme di tisi polmonale, preso anche nei diversi stadii della febbre etica, come fu parecchie volte constatato da uno di noi (Celli). Nei tessuti tubercolari poi l'abbiamo sempre rinvenuto nella peritonite (5 casi), nella pleurite (3 casi, in uno primitiva), nella meningite (10 casi, in uno primitiva), ne' tubercoli solitari del cervello (1 caso), in molti casi di tubercolosi polmonale, nelle ghiandole linfatiche scrofolose (2 casi), nelle ghiandole linfatiche meseraiche d'un bue affetto da tubercolosi (morbo perlato); e al contrario non mai in altro numero di varî tessuti patologici. Finalmente l'abbiamo sempre incontrato nell'occhio di conigli invaso da' processi morbosi causati dall'inoculazione di sputi e di tessuti tubercolari, di ghiandole scrofolose e di morbo perlato (¹).

In tutti questi prodotti tubercolari i bacilli specifici appaiono (v. fig. 1) per lo più flessuosi, o almeno incurvati, quasi mai rigidi, di una lunghezza, che nel medesimo campo microscopico può talora andare dalla metà a due volte il diametro d'un globulo rosso, di larghezza uniforme ma varia e non sempre in rapporto colla lunghezza, qualche volta così sottili che potrebbero facilmente sfuggire ad occhio poco esercitato in simili ricerche, ordinariamente provvisti di una serie di spore lungo tutto il bacillo, isolati, o intrecciati, o in pochi riuniti insieme per uno stesso polo, o in grandi accumuli disposti a fasci.

Avendo avuto l'agio in numerose ricerche di sorprendere le molte varietà di forma che può offrire questo parassita, potemmo subito ben giudicare un fatto che

(¹) Confr. la nostra Nota: *Sulla presenza del bacillo del tubercolo ne' diversi prodotti tubercolari.* Gazzetta degli Ospedali. N. 37-40, Milano, 1883.

ci occorse in una serie d'esperienze indirizzate a svelare se dagli sputi umidi, correnti d'aria possono trascinar via i bacilli del tubercolo che vi sono contenuti. Cioè tanto ne' liquidi di lavaggio delle correnti d'aria sterilizzata e passata a contatto di sputi tubercolosi, o strisciandovi sopra o gorgogliandovi in mezzo, quanto nel prodotto d'evaporazione degli stessi sputi pienissimi di bacilli di Koch, dopo il diseccamento e coloramento secondo il metodo di Weigert, si ritrova un numero variabile di forme lineari, che conservano lo stesso colorito violetto, che prende il bacillo della tubercolosi, col quale si possono a prima vista confondere. Senonchè risaltano subito sufficienti caratteri differenziali.

Difatti (v. fig. 2) queste, che chiameremo forme pseudobacillari, sono sempre rigide, diritte, molto variabilmente lunghe, di forma e grandezza diversa, cioè alcune grosse ed affusate, altre sottili e d'uniforme larghezza, talora disposte a raggi ineguali di stella, e non mai nel modo come si raggruppano i bacilli della tubercolosi. Mentre poi quasi ognuno dei bacilli negli sputi in esperimento era sporigeno, tale non era mai alcuna delle forme pseudobacillari. Oltre a ciò questi falsi bacilli scompaiono, o più non si colorano dopo il semplice trattamento con una soluzione di potassa, alla quale, come si sa, resistono i veri schizomiceti. Sovrabbondano quindi i caratteri che ne escludono ogni natura micotica.

E v'ha di più che da lunga serie di ricerche fatte intorno alla profilassi della turbercolosi secondo i più rigorosi e recenti mezzi di studio delle malattie infettive fra le altre abbiamo potuto con certezza ritrarre anche questa conclusione; che cioè gli sputi tubercolosi freschi o conservati da più giorni ma ancora umidi, nè evaporando, nè venendo in qualunque modo a contatto delle correnti aeree a velocità diversa, posson trasmettere all'aria i bacilli della tubercolosi e in generale il virus tubercolare che contengono ([1]).

Ma restava tuttavia il ricercare da quale sostanza in realtà originassero. E siccome nell'escreato bronchiale in genere, ed in ispecie in quello de' tubercolosi, possono esservi ([2]) cristalli degli acidi palmitico e stearico, e forse anche della tirosina, a questi tre corpi rivolgemmo le indagini, dalle quali risulta che gli acidi grassi ora menzionati incorporano i colori di anilina (violetto di metile e di genziana, bleu di metilene, fussina, vesuvina, tropeolina); e che trattati col metodo di Weigert possono talora non reagendo alla vesuvina mantenere il colorito del violetto di genziana, come i bacilli del tubercolo. La tirosina poi sembra comportarsi diversamente cogli stessi colori, assorbendone alcuni (tropeolina, bleu di metilene, vesuvina), non fissandone gli altri. Osservazioni più numerose saranno dirette a meglio definire il vario nesso genetico e le altre proprietà di queste forme cristalline, che pare non siano contenute nella semplice saliva.

Ma intanto da quel che finora sappiamo discendono taluni corollari.

Ossia nell'esame di un focolaio caseoso, che può contenere cristalli degli acidi palmitico e stearico, come anche nell'esame degli sputi, massime quando i bacilli

([1]) Confr. la nostra memoria: *Intorno alla profilassi della tubercolosi.* Studî d'Igiene sperimentale. Archivio di Bizzozero, vol. VII.

([2]) Hoppe-Seyler. *Handbuch der Physiologisch- und Pathologischen Chemischen Analyse.* 5 Auflage.

di Koch sono scarsissimi, si dovrà tenere a mente che non tutte le forme lineari colorate in violetto sono bacilli del tubercolo.

Inoltre se potrà pur essere che negli sputi o in un focolaio caseoso siano sparse delle forme cristalline che hanno apparenza di bacillo tubercolare, fra questo e quelle si hanno molte note differenziali così manifeste, che tolgono fondamento alle nuovissime obbiezioni di Schmidt [1] e di Klebs [2], i quali hanno preteso negare la vera natura micotica de' bacilli di Koch rifugiandosi nell' ipotetico dubbio che potrebbero essere delle forme cristalline.

[1] Fortschritte der Medicin von D. C. Friedländer. Berlin, 1883, n. 5.
[2] Archiv für experimentelle Pathologie und Pharmacologie. 17 Band.

Fig. 1ª

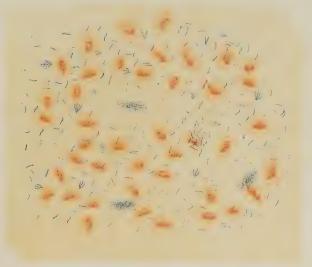
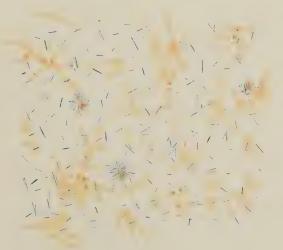
Fig. 2ª

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1ª Bacilli del tubercolo negli sputi di un tisico. - Le parti colorate intensamente in rossomogano sono i nuclei delle cellule. Ingr. Oc. Hartnack Nº 3. Obb. Zeiss 1/12. Apparato di Abbe.

Fig. 2ª Forme cristalline pseudobacillari. Ingr. come sopra.

Lit. Bruno e Salomone Roma

Sui prodotti di decomposizione dell' acido santonoso.

Memoria del Socio S. CANNIZZARO

letta nella seduta del 17 giugno 1883.

Nella Memoria sui due acidi isomeri *santonoso* ed *isosantonoso* di S. Cannizzaro e G. Carnelutti (¹) è stato già detto, che l'acido santonoso fonde a 178-179° senza alterarsi notevolmente e che distilla anche del tutto inalterato tra 200° e 260° sotto la pressione di 5^{mm} di mercurio. Sotto la ordinaria pressione atmosferica però scaldato sopra i 300° gradi distilla in piccola porzione e nel resto si decompone.

Ho studiato i prodotti di questa decomposizione come quelli, che danno qualche luce sulla costituzione dell'acido santonoso.

In questa Memoria espongo il risultato di tale studio.

Ho scaldato l'acido santonoso in una storta tubulata connessa con un pallone recipiente alla cui tubulatura è adattato un cannello di vetro ripiegato, che pesca dentro il mercurio contenuto al fondo d'un cilindro, ripieno nel resto d'acqua; alla bocca del cilindro è adattato con turacciolo un tubo convenientemente ripiegato, la cui estremità pesca in un bagno ad acqua a fine di raccogliere i gas se mai se ne sviluppassero. La tubulatura della storta porta un turacciolo con due fori pei quali passano due cannelli di vetro, uno assai corto serve per dar passaggio al termometro graduato sino a 360°, l'altro penetra dentro della storta sino alla superficie dell'acido santonoso, potendosi all'uopo alzare ed abbassare, e ripiegandosi fuori del turacciolo è messo, per mezzo di un tubo di caoutchuc in comunicazione con un apparecchio generatore di gas acido carbonico convenientemente disseccato. Una pinza di Mohr serve ad aprire e chiudere la comunicazione con quel gas. Per scaldare la storta ho impiegato un bagno metallico di lega di piombo e stagno.

Ho condotto l'operazione nel modo seguente.

Introdotto nella storta l'acido santonoso ed adattato il turacciolo portante il termometro ed il cannello in comunicazione col gas acido carbonico, riempio tutto l'apparecchio di questo gas, che fo passare lentamente tenendo un po' alto il cannello a fine di non trascinare polvere dell'acido.

Sospendo la corrente di gas; fondo l'acido scaldando la storta con un bagno ad olio; immergo il bulbo del termometro nell' acido fuso ed abbasso il cannello sino alla superficie di esso.

Solidificato questo, riapro la comunicazione colla sorgente di gas carbonico per compiere la eliminazione dell'aria. Quando questo effetto è raggiunto, sospendo la

(¹) Gazz. chim. ital. t. XII, 1882, pag. 393.

corrente gassosa, immergo la storta nel bagno metallico appena fuso e continuando a scaldare porto e mantengo la temperatura dell'acido fuso a 300°: incomincia allora la distillazione dei prodotti di decomposizione; innalzo poi gradatamente la temperatura; quando si vuol spingere questa al disopra di 360° tolgo il termometro adattato con sughero al cannello, che chiudo rapidamente con altro turacciolo, e continuo a scaldare il bagno metallico, notando i limiti di temperatura, che ha oltrepassato, per mezzo della fusione di piombo o di zinco contenuti in tubi di vetro chiusi.

Nel modo ora descritto ho replicate volte decomposto quantità diverse di acido santonoso: ho fermato la decomposizione ora ad una, ora ad altra temperatura per esaminare il residuo della storta ed i prodotti distillati nei varî periodi; altre volte ho spinto il riscaldamento finchè nella storta rimaneva un piccolissimo residuo carbonoso.

Non parendomi conveniente descrivere in dettaglio tutte queste svariate operazioni, ne riassumo ora i risultati costanti.

L'acido santonoso fuso tenuto per più ore tra 300° e 320° sviluppa bollicine gassose; distilla allora un liquido acido ed una sostanza cristallizzata imbevuta d'olio, la quale si condensa sulle prime nel collo della storta. Continuando a scaldare sino a 360°, la materia fusa nella storta spumeggia, si ottiene nuovo liquido acido, una nuova quantità di materia cristallina ed una rilevante quantità di olio vischioso giallognolo. Sino a tale temperatura non apparisce sensibile sviluppo di gas.

Spingendo il riscaldamento oltre a 360° finchè non resta nella storta, che poco residuo carbonoso, distilla sopratutto olio simile al precedente e di tempo in tempo si sviluppano alcune bolle di gas combustibile.

Le porzioni distillate sino a 360° contengono acqua, acido santonoso inalterato, acido propionico ($C^3 H^6 O^2$), biidrodimetilnaftol ($C^{12} H^{14} O$), dimetilnaftol ($C^{12} H^{12} O$) ed un olio che colla potassa si scompone in acido propionico e biidrodimetilnaftolo, come etere propionico di questo ultimo. L'acqua e l'acido santonoso inalterato predominano nelle prime porzioni, che passano a 300°; nelle porzioni successive viene l'acido propionico ed il biidrodimetilnaftolo, quindi l'etere propionico di quest' ultimo naftolo.

Le porzioni distillate sopra 360° consistono principalmente di questo etere con una piccola quantità di dimetilnaftalina ($C^{12} H^{12}$).

Ciò che rimane nella storta quando il riscaldamento non è andato sopra i 300° e si è sospeso dopo che distillarono acqua, acido santonoso e tracce di altri prodotti, è evidentemente un' anidride dell'acido santonoso. Questa anidride si solidifica sotto forma di resina trasparente e fragile, non si scioglie sensibilmente nell'alcool e nell'etere; scaldata per qualche tempo con una soluzione alcoolica di potassa si discioglie; svaporando l'alcool e sostituendolo coll'acqua si ha una soluzione alcalina dalla quale il gas acido carbonico non separa alcun fenolo e l'acido cloridrico precipita un acido, che depurato nel modo altrove descritto presenta tutti i caratteri dell'acido santonoso, compreso il potere rotatorio (¹).

(¹) Per una soluzione alcoolica contenente g. 4,138 di questo acido in 100 cc. si è trovato alla temperatura di 15° $[\alpha]_D = + 77,66$.

Ciò che resta nella storta dopo che è stata scaldata sino a 360° e si è ridotto a metà del peso dell'acido impiegato si solidifica anche coll' aspetto simile di resina trasparente; non si scioglie nell'alcool e nell'etere e dopo trattata con potassa alcoolica bollente e svaporato l'alcool e sostituito con acqua, dà una soluzione alcalina, dalla quale il gas acido carbonico precipita in quantità relativamente piccola biidrodimetilnaftol, che si separa dal liquido sia per filtrazione, sia facendolo distillare per mezzo del vapore d'acqua. Dalla soluzione limpida si precipita coll' acido cloridrico un acido, che ricristallizzato ha anch'esso tutti i caratteri dell'acido santonoso puro, fondendo a 177-178° ed avendo il potere rotatorio $[\alpha]_D = + 74,65$ (¹).

Quando poi si è oltrepassata la temperatura di 360°, il residuo della storta resinoso scuro trattato nel modo sopraindicato, dà un po' di miscuglio di biidrodimetilnaftol ed una piccolissima quantità di acido santonoso assai impuro, che si è potuto riconoscere dopo reiterate cristallizzazioni.

Se la temperatura è giunta al di là dei 400°, quel po' di residuo bruno, che rimane nella storta, non dà alcun prodotto riconoscibile.

Da ciò che ho sommariamente esposto pare, che le decomposizione proceda nel modo seguente:

Una porzione dell'acido santonoso ($C^{15} H^{20} O^3$) perdendo acqua dà un' anidride ($C^{15} H^{18} O^2$). Il vapore dell'acqua formatosi trascina un po' di acido santonoso inalterato. Un' altra porzione dell'acido in presenza del vapor d'acqua che si viene sviluppando si scinde nettamente in biidrodimetilnaftol ed acido propionico secondo l'equazione seguente:

$$C^{15} H^{20} O^3 = \underbrace{C^3 H^6 O^2}_{\text{acido propionico}} + \underbrace{C^{12} H^{14} O}_{\text{biidrodimetilnaftol.}}$$

Quando tutta l'acqua, che si può formare si è sviluppata, l'anidride $C^{15} H^{18} O^2$ si trasforma per l' azione del calore nell'etere propionico del biidrodimetilnaftol ($C^{12} H^{13} O - C^3 H^5 O = C^{15} H^{18} O^2$).

Il dimetilnaftol ($C^{12} H^{12} O$), che si produce in quantità variabilissima dall'una all' altra operazione e la piccola quantità di dimetilnaftalina, che viene nella fine della distillazione, sono evidentemente prodotti secondarî della decomposizione del biidrodimetilnaftol.

Il poco di biidrodimetilnaftol, che si ottiene per l'azione della potassa sulla resina rimasta nella storta, vi è ritenuto probabilmente nello stato di etere santonoso.

Esporrò ora il modo tenuto per separare e riconoscere i sopraindicati prodotti della distillazione e descriverò il biidrodimetilnaftol.

I prodotti della distillazione sono trattati con soluzione acquosa di carbonato sodico, la quale scioglie gli acidi santonoso e propionico e lascia indisciolta una materia vischiosa, che è il miscuglio dei naftoli e dell'etere propionico del biidrodimetilnaftol.

Dalla soluzione acquosa filtrata si precipita con acido solforico l'acido santonoso. Il liquido filtrato si sottomette alla distillazione: il distillato è una soluzione acquosa

(¹) Questo potere rotatorio fu determinato con una soluzione alcoolica di quest'acido contenente g. 4,277 in 100 cc. alla temperatura di 15° con un tubo della lunghezza 219^{mm},65 e con una deviazione di gradi 7,01 $[\alpha]_D = + 74,65$.

di acido propionico. Si trasforma in sale di bario e si svapora a secco: si ridiscioglie il sale, si filtra la soluzione, si precipita il bario con acido solforico, ed il liquido acido filtrato si distilla; il distillato neutralizzato con carbonato baritico puro portato a secco, ridisciolto e nuovamente svaporato dà il sale di bario sufficientemente puro per essere riconosciuto.

Ha dato all'analisi i seguenti risultati:

	Materia	Solfato baritico	Carbonato baritico
I.	gr. 1,3273	1,0913	
II.	gr. 0,36,81	0,3006	
III.	gr. 0,1853	0,1491	
IV.	gr. 1,0535		0,7300

Deducendo la composizione centesimale e comparandola a quella calcolata si ha:

Trovato Ba %				Calcolato
I.	II.	III.	IV.	per $Ba\langle^{C^5H^5O^2}_{C^3H^5O^2}$
48,33 —	47,97 —	47,33,	48,19	48,40

La materia vischiosa non sciolta nel carbonato alcalino si tratta con soluzione acquosa di idrato potassico, la quale discioglie i naftoli e lascia indisciolto un olio denso, che è l'etere propionico del biidrodimetilnaftolo.

Dalla soluzione di potassa con una corrente di gas acido carbonico si precipita il miscuglio dei naftoli, che si separa dal liquido per filtrazione o meglio per distillazione a vapore. Si separa poi il biidrodimetilnaftol dal dimetilnaftol nel modo, che sarà più sotto descritto.

L'olio denso, che rimane indisciolto dopo il trattamento col carbonato e coll'idrato alcalino si pone a bollire per più ore in apparecchio a ricadere con una soluzione alcoolica concentrata di potassa: poi si distilla l'alcool e si sostituisce con acqua facendo passare nel liquido una corrente di vapore. Coll'acqua distilla quella porzione d'olio, che non fu decomposta, la quale si torna a trattare colla potassa alcoolica nel modo sopra indicato. Bisogna ripetere più volte tale trattamento per giungere a scomporre tutto l'etere propionico del biidrodimetilnaftol.

Quando questo proviene da una operazione, che è stata spinta sino alla totale decomposizione dell'anidride santonosa rimane una piccola quantità di olio ribelle all'azione della potassa: raccolto per distillazione a vapore e separato dall'acqua distillata per mezzo dell'etere dà con una soluzione alcoolica di acido picrico il composto giallo arancio, che depurato per cristallizzazione offre l'apparenza ed il punto di fusione 139° del composto della dimetilnaftalina descritta nella Memoria sui due acidi isomeri santonoso ed isosantonoso.

Le soluzioni alcaline ottenute coi reiterati trattamenti dell'olio sopraindicati, si sottomettono all'azione di una corrente di gas acido carbonico: si precipita così il biidrodimetilnaftol, che si separa sia per filtrazione sia per distillazione a vapore.

La soluzione alcalina da cui è stato separato questo naftolo si acidifica con acido solforico puro e si sottopone alla distillazione. Il distillato acquoso contiene un

acido, che ha l'odore dell'acido propionico; se ne prepara il sale baritico dal quale si riottiene l'acido propionico, che si ridistilla e si trasforma in sale baritico, reiterando questo trattamento, quanto occorre per avere un sale baritico puro.

Analizzato ha dato il seguente risultato:

Gr. 0,5429 di sale baritico hanno dato gr. 0,4376 di solfato ciò che fa per il Ba 47,35 %.

Il propionato baritico richiederebbe 48,40 % di Ba.

Non è da maravigliare di questa piccola differenza essendo difficilissimo in questo trattamento ottenere l'acido propionico completamente puro da tracce di naftolo, che rimangono disciolte nel liquido acquoso e passano per distillazione coll'acido.

L'acido santonoso subisce una decomposizione simile a quella sinora descritta se è scaldato in tubi chiusi.

Scaldato così soltanto sino a 200° rimane inalterato solidificandosi sotto forma di una resina trasparente, la quale si scioglie completamente nell'etere; da tale soluzione cristallizza l'acido santonoso puro.

Scaldato sino a 400° dà un olio, che decomposto con potassa alcoolica dà il biidrodimetilnaftol. Il medesimo olio ottiensi scaldando l'acido in tubi chiusi al disopra di 400°. In quest'ultimo caso l'olio è di colore oscuro.

Descriverò ora il biidrodimetilnaftol, che insieme all'acido propionico è il prodotto costante della decomposizione dell'acido santonoso.

Biidrodimetilnaftol.

$$(C^{12} H^{14} O) = \overset{H^2}{\overset{|}{C^{10}}} H^5 \begin{cases} (CH^3)^2 \\ OH \end{cases}$$

Questo naftol si ottiene dal suo etere propionico scomponendolo colla soluzione alcoolica di potassa nel modo sopradescritto. La soluzione alcalina ottenuta dopo svaporato l'alcool si satura di gas acido carbonico e si distilla in una corrente di vapor d'acqua. Nel distillato acquoso cristallizza bianco questo naftol. Si raccoglie sopra un filtro, si scioglie in alcool, e si precipita con acqua bollente. Col raffreddamento cristallizza in lunghi aghi sottilissimi setacei. Si ripete due o tre volte questo modo di cristallizzazione e si ottiene purissimo col punto di fusione costante di 113.°

Più difficile riesce di ottenerlo puro da quella porzione di naftoli, che vengono liberi tra i prodotti distillati e che si estraggono sciogliendoli in una soluzione acquosa diluita di potassa, e saturando questa soluzione filtrata con gas acido carbonico e distillando a vapore. Nel distillato cristallizzano dei naftoli, che si tornano a cristallizzare, sciogliendoli nell'alcool e precipitandoli con l'acqua calda. Si ottiene così un prodotto di apparenza omogenea, che ha i caratteri dei fenoli. Questo prodotto fonde a 92-93° se è stato estratto dai primi prodotti della distillazione dell'acido santonoso scaldato soltanto a 300°; ha invece il punto di fusione 122°-123° se è stato ottenuto dagli ultimi periodi della distillazione. Sì l'uno, che l'altro miscuglio non muta di punto di fusione sottomettendolo a reiterate cristallizzazioni coll'alcool e l'acqua, tantochè ebbi per molto tempo il dubbio, che fossero due nuovi fenoli e come tali furono sottomessi all'analisi.

Il prodotto, che fonde tra 92° e 93° diede però all'analisi numeri, che si avvicinano tanto alla composizione del biidrodimetilnaftol, che fui bentosto convinto essere questa ultima sostanza, il cui punto di fusione è abbassato da una piccola quantità di un altro fenol, che fu riconosciuta per dimetilnaftol $C^{12}H^{12}O$.

Sottomettendo difatti il prodotto a reiterate cristallizzazioni nel petrolio, ho potuto separare un poco di dimetilnaftol fondente a 136,° che è restato nella parte indisciolta; la parte disciolta cristallizzata più volte frazionatamente ha dato porzioni con punti di fusione intermedî ed una piccola quantità di biidrodimetilnaftol puro col punto di fusione 113.°

L'analisi del prodotto prima di essere ricristallizzato nel petrolio ha dato i seguenti risultati, che si avvicinano alla composizione del biidrodimetilnaftol $C^{12}H^{14}O$.

Gr.0,2416 di sostanza diedero CO^2 gr.0,7329 e H^2O gr.0,1802, ciò che fa per 100:

Carbonio 82,69
Idrogeno 8,28

La formula $C^{12}H^{14}O$ richiederebbe:

Carbonio 82,77
Idrogeno 8,00

La parte meno solubile nel petrolio di questo prodotto ha dato poi all' analisi risultati, che si avvicinano un poco alla composizione del dimetilnaftol. Difatti:

	Materia	Anidride carbonica	Acqua
I.	gr.0,2760	gr.0,8439	gr.0,2032
II.	gr.0,1932	gr.0,5888	gr.0,1412

Deducendo la composizione centesimale e comparandola a quella calcolata si ha:

	Trovato		Calcolato	
			per biidrodimetilnaftol	per dimetilnaftol
	I.	II.	($C^{12}H^4O$)	($C^{12}H^{12}O$)
C	83,12 —	83,11 —	82,77	83, 72
H	8,10 —	8,12 —	8,00	6, 96

Il prodotto che fonde con apparente costanza a 122-123°, sottomesso a reiterate cristallizzazioni frazionate nel petrolio leggiero, diede una più notevole quantità di dimetilnaftol puro e piccola quantità di biidrodimetilnaftol. Il dimetilnaftol così separato aveva il punto di fusione 136° e diede all'analisi elementare i seguenti risultati che non lasciano alcun dubbio essere identico a quello già descritto nella Memoria più volte citata (¹).

Materia	Anidride carbonica	Acqua
Gr. 0,2438	0,7481	0,1542

Deducendo la composizione centesimale comparata a quella calcolata si ha:

Calcolato per $C^{12}H^{12}O$	Trovato
C^{12} C 83,72	C 83,68
H^{12}H 6,96	H 7,02

(¹) Gazz. chim. ital. t. XII, 1882, pag. 393.

Non evvi dunque dubbio, che i due prodotti con caratteri fenici separati dal primo e dall'ultimo periodo della decomposizione dell'acido santonoso sono miscugli di biidrodimetilnaftol e di dimetilnaftol. Nel prodotto fusibile a 92°-93° predomina il biidro e nel prodotto fusibile a 122° predomina l'altro.

Il biidrodimetilnaftol depurato nel modo sopra descritto e cristallizzato dal petrolio leggero si presenta in aghi bianchissimi e splendenti Fonde a 113°, è solubilissimo nell'etere, nell'alcool, solubile nella benzina e nel petrolio, più a caldo che a freddo, quasi insolubile nell'acqua fredda. È volatile e si può distillare inalterato col vapor d'acqua.

Ha dato all'analisi elementare i seguenti resultati:

	Materia	Anidride carbonica	Acqua
I.	gr. 0,3184	gr. 0,9645	0,2283
II.	» 0,2834	» 0,8568	0,2066
III.	» 0,2102	» 0,6380	0,1514

Deducendo la composizione centesimale e comparandola a quella calcolata si ha:

Calcolato per		Trovato	
$C^{12}H^{14}O$	I.	II.	III.
C 82,77	C 82,44	82,45	82,75
H 8,00	H 7,96	8,10	8,04 (¹).

Il biidrodimetilnaftol ($C^{12}H^{14}O$) perde per l'azione del persolfuro di fosforo gli elementi di una molecola d'acqua e dà dimetilnaftalina identica a quella, che è stata ottenuta dal dimetilnaftol: è perciò corrispondente alla bibromonaftalina di Glaser fondente a 81°.

Sono anche riuscito a disidrogenare il biidrodimetilnaftol e convertirlo nel dimetilnaftol identico a quello, che si ottiene nell'azione della barite sull'acido santonoso ad alta temperatura.

Per ottenere la dimetilnaftalina ho mischiato 4 gr. di biidrodimetilnaftol con gr.0,60 di fosforo rosso e gr.1,60 di solfo: scaldai a bagno ad aria in una stortina munita del suo recipiente. Si osservò forte sviluppo di idrogeno solforato e distillò una sostanza oleosa. Si estrasse con etere tanto il distillato che la materia carbonosa nera rimasta nella stortina. La soluzione eterea fu agitata con soluzione acquosa di potassa; decantato l'etere e svaporato si distillò il residuo in una corrente di vapor d'acqua.

Si ottenne così un olio scolorato più pesante dell'acqua; si estrasse con etere, il quale svaporato lasciò indietro l'olio. Se ne fece il picrato, il quale presentò l'apparenza, il colorito, aghi giallo arancio, ed il punto di fusione 139° del picrato della dimetilnaftalina corrispondente alla dibronaftalina fondente ad 81°.

Per disidrogenare il biidrodimetilnaftol se ne mischiò intimamente un grammo con gr. 0,2 di solfo e si mise a scaldare in un tubetto. Il miscuglio fuse da prima, quindi lo zolfo fuso si separò al fondo: in seguito si sviluppò idrogeno solforato e scomparve lo zolfo.

La massa fusa fu sciolta in una soluzione acquosa diluita di potassa, che fu poi saturata di gas acido carbonico e distillata a vapore.

(¹) Le due prime combustioni sono state fatte con biidrodimetilnaftol, cristallizzato solo nell'alcool e acqua, mentre quello della terza è stato ricristallizzato nel petrolio.

Passò prima un po' di naftol fondente a 113-118°, quindi un' altra porzione fondente a 113-120° ed infine una porzione a 134°. Non vi ha dunque dubbio, che una porzione del biidrodimetilnaftol rimase inalterato e un' altra si trasformò nel dimetilnaftol, che passa l'ultimo nella distillazione.

Questa trasformazione pare avvenga a temperatura elevata in modo simile a quello, che siegue colle idronaftaline. A questa causa deve attribuirsi la presenza nei prodotti della decomposizione dell' acido santonoso di dimetilnaftol, che viene perciò in maggiore quantità negli ultimi periodi della decomposizione. A questa medesima causa deve anche attribuirsi la formazione del dimetilnaftol nella fusione dell'acido santonoso con idrato baritico.

I risultati descritti in questa mia Memoria e quelli precedentemente pubblicati insieme a G. Carnelutti si possono interpretare considerando l'acido santonoso come un derivato tetrasostituito dalla tetraidronaftalina ($H^4 C^{10} H^8$).

I gruppi sostituiti sarebbero due metili nel posto dei due bromi della dibromonaftalina fondente ad 81°; un ossidrile nel posto non ancor determinato, che ha nel dimetilnaftol ed un residuo dell'acido propionico. Ciò che si esprime colla seguente formula:

$$H^4 C^{10} H^4 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ OH \\ CH^2—CH^2—COOH \end{cases}$$

Potrebbe dunque dirsi acido *tetraidrodimetilossinaftilpropionico.*

Col riscaldamento, due dei 4 atomi dell' idrogeno aggiunti si impiegherebbero a distaccare il residuo dell'acido propionico formando;

$$H^2 C^{10} H^4 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ OH \\ H + CH^3—CH^2—COOH \end{cases}$$

Biidrodimetilnaftol Acido propionico.

La sostanza resinosa, che si formerebbe per l'eliminazione di una molecola d'acqua sarebbe un' anidride interna nella quale il residuo dell'acido propionico, avendo perduto l'ossidrile acido si sarebbe attaccato all'ossigeno fenico, come negli eteri dei fenoli ciò che è indicato dalla seguente equazione:

$$H^4 C^{10} H^4 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ OH \\ CH^2—CH^2—COOH \end{cases} —H^2O=$$

$$=H^4 C^{10} H^4 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ O — CO \\ CH^2—CH^2 \end{cases}$$

In questa anidride per l'azione del calore due dei 4 atomi di idrogeno aggiunti distaccherebbero il residuo dell'acido propionico dal nucleo naftalico lasciandolo attaccato per l'ossigeno, come radicale acido e formando così l'etere propionico del biidrodimetilnaftol rappresentato dalla seguente formula:

$$H^2C^{10}H^4\begin{cases}CH^3\\CH^3\\O-CO-CH^2-CH^3\\H\end{cases}$$

Potrebbe anche ammettersi, che nell'acido santonoso non preesistano tutti e due gli anelli della naftalina, ma che l'uno si formi coll'azione del calore.

Il fatto osservato da me e da Carnelutti della formazione di un dimetilbenzol nella scomposizione dell'acido santonoso darebbe qualche appoggio a questa ipotesi. Gli ulteriori studî, che continuo sull'acido santonoso e i suoi derivati daranno nuovi argomenti per scoprire definitivamente la costituzione dell'acido santonoso e del suo isomero.

Osservazioni sulla Melanoflogite.

Memoria del Socio corrispondente GIORGIO SPEZIA

letta nella seduta del 3 giugno 1883.

(Con una tavola)

Il dott. Tito Chionio, assistente al Museo mineralogico di Torino, nell'esaminare alcuni esemplari di solfo della Sicilia trovò sopra cristalli coperti da una patina silicea, alcuni piccoli cubi che egli ritenne per Melanoflogite dal carattere particolare del minerale di annerire quando sia riscaldato.

Sebbene la quantità del minerale fosse piccola, tuttavia mi parve opportuno di fare alcune osservazioni, nei limiti del materiale disponibile, sia riguardo al cambiamento di colore che vi opera la temperatura, sia riguardo al vario modo di presentarsi, sia per l'associazione del minerale nella sua giacitura, ed anche eseguire qualche saggio sulla sua composizione.

E siccome gli esemplari da me studiati mi offrirono dati un poco diversi da quelli osservati dal Lasaulx che scoperse la Melanoflogite, così credo bene di comunicare le osservazioni da me fatte, colla speranza che possano servire a chi, meglio fornito di materiale, vorrà completare lo studio di detto minerale così singolare per la sua composizione chimica.

Dalla prima descrizione della Melanoflogite fatta dal Lasaulx [1] risulterebbe che i cubi anneriscono completamente se riscaldati ad alta temperatura, ed anzi servì tale proprietà per meglio separarli dalla patina silicea sulla quale stanno, di modo che i piccoli cubi od anche gli aggregati cristallini di essi sarebbero costituiti interamente da Melanoflogite.

Dagli esemplari osservati dal Lasaulx dovrebbe poi essere la Melanoflogite il minerale più recente nella sua associazione collo solfo, la celestina, la calcite e la silice. Gli esemplari del Museo nei quali si osserva la Melanoflogite sono costituiti solamente da solfo, calcite e naturalmente da silice, ma in nessun esemplare contenente celestina dei giacimenti solfiferi siciliani rinvenni traccia del minerale.

Negli esemplari osservati dal dott. Chionio, la Melanoflogite si presenta sia in cubi sia in aggregati cristallini sferoidali e sempre sopra l'esile patina silicea che riveste i cristalli di solfo.

In altro esemplare da me esaminato io constatai anche lo stesso minerale, ma con struttura ed associazione differenti e di cui tratterò in particolare.

[1] *Neues Jahrbuch für Min. u. Geo.* 1876, p. 250.

Cominciando le mie osservazioni sulla patina silicea la quale copre i cristalli di solfo, non mi pare essere uguale a quella degli esemplari di Lasaulx che fu da esso chiamata *Quarzhaut* ossia una pellicola di quarzo. La patina da me esaminata contiene 9% di acqua alla cui espulsione per il calore è dovuto senza dubbio non solo l'imbiancarsi ed il divenire opaca, ma anche il piegarsi che fa quando sia rapidamente portata al colore rosso. Inoltre osservata al microscopio la superficie rugosa superiore vi si scorge distintamente una struttura mammellonare. Se poi si aggiunge la facilità con la quale essa si scioglie nella soluzione di potassa caustica, è certamente da ascriversi ad opale e non a quarzo la sostanza della patina da me osservata. Differenza assai importante quando si volessero fare degli studî sui rapporti di paragenesi fra la Melanoflògite e la silice che costantemente l'accompagna.

I cubi osservati al microscopio dopo averli anneriti col riscaldamento presentarono, con mia sorpresa, il fatto che rompendoli avevano l' interno di color bianco opaco e tale si manteneva anche dopo prolungato riscaldamento degli stessi frammenti. Allora mi decisi di fare qualche preparazione microscopica e vi riuscii usando molta pazienza perchè si trattava di eseguire sezioni con determinata direzione in cubi di lato non maggiore di $^3/_4$ di millimetro.

Feci quindi sezioni di cubi naturali e di quelli anneriti tenendo il piano di sezione parallelo ad una faccia del cubo e scegliendo cubi per la cui posizione detto piano fosse perpendicolare alla patina silicea.

Ora tali sezioni di cubi previamente anneriti si presentano come nella fig. 1ª, (l'ingrandimento delle figure dalla 1ª alla 10ª oscilla fra i 30 e 40 diametri) ossia indicano un involucro nero esterno con limiti rettilinei e corrispondenti alla parte che emerge dalla patina, ed una massa bianca nell'interno con limiti irregolari.

Altra sezione fatta nella stessa direzione sopra un cubo naturale, senza cioè essere stato annerito, ed esaminata alla luce polarizzata si presenta fra i prismi paralleli come nella fig. 2ª, ossia si vede un involucro esterno a struttura omogenea ed un campo interno nel quale si osservano i fenomeni d'interferenza caratteristici degli aggregati cristallini; invece fra i prismi incrociati si presenta per l' intiera circonferenza come nella fig. 3ª nella quale è scomparso l'involucro omogeneo e rimane solo il campo dell' aggregazione cristallina. Se si confrontano anche per sovrapposizione le due figure riesce facile scorgere che la figura 3ª rappresenta la figura 2ª meno l'involucro esterno, il quale comportandosi come sostanza isotropa rimane oscuro fra i prismi incrociati, mentre nell'interno la sostanza si presenta anisotropa. Se poi si osservano e si confrontano alla luce polarizzata le sezioni sia prima che dopo il riscaldamento, è evidente l'interessantissimo fatto che l'involucro il quale si presenta isotropo corrisponde a quello che annerisce per calore, mentre il campo interno degli aggregati cristallini corrisponde alla parte che non annerisce.

A proposito di osservazioni ottiche nella Melanoflogite debbo dire che io non potei naturalmente constatare come Mallard [1] che la Melanoflogite non sia monometrica, ma bensì formata dalla riunione di sei piramidi a base quadrata coi loro vertici al centro del cristallo costituendo le basi le sei faccie del cubo; ed anzi parve

[1] Bulletin de la Société minéralogique de France. T. III (1880) p. 160.

inutile nel mio caso di ricorrere all'ingegnoso modo del Mallard di spiegare un'anomalia ottica, dal momento che questa non compariva alle mie osservazioni, le quali indicavano palesemente ed in modo semplice essere i cubi composti di due sostanze con caratteri ottici e chimici differenti, ossia di un involucro isotropo che annerisce per calore, e l'interno che rimanendo bianco presenta i normali fenomeni d' interferenza degli aggregati cristallini di quarzo in ispecie della calcedonia, l' orientazione dei quali vicino alle faccie dei cubi è perpendicolare ad esse.

Gli aggregati sferoidali sono in maggiore quantità dei cubi, e la loro superficie ha un aspetto rugoso prodotto dall'aggregazione di cubi minutissimi; il diametro di tali aggregati non sorpassa il millimetro e si trovano talvolta riuniti due a due; ed anch'essi sono sovrastanti sempre alla stessa patina come i cubi. Riscaldati anneriscono come i cubi ed alla stessa temperatura, e l'annerimento totale della superficie lascia anche per essi supporre che tutta la sostanza dell' aggregato sia Melanoflogite. Ma osservati nell'interno si presentano come nella figura 4ª la quale rappresenta una sezione perpendicolare alla patina silicea di due aggregati uniti insieme che abbracciavano lo spigolo di un cristallo di solfo. La figura 5ª poi rappresenta la sezione di un aggregato, parallela alla patina. Dall' esame di entrambe le figure risulta chiaramente come negli aggregati vi sia un involucro esterno che annerisce come nei cubi e che inoltre siavi pure un nucleo interno che assume lo stesso colore dell' involucro, e come fra le due parti nere vi sia una zona la quale non annerisce.

La figura 10ª rappresenta un aggregato non riscaldato unito alla patina alla quale è parallelo il taglio della sezione. Il foro circolare che trovasi al centro dell'aggregato attraversa generalmente la patina e comunica colla superficie dei cristalli di solfo.

In tali sezioni vi ha pure un involucro cristallino trasparente ed un nucleo centrale a struttura radiata, ed entrambi alla luce polarizzata si comportano isotropi, mentre la corona interna presenta l' interferenza degli aggregati cristallini; tale corona è la parte che non annerisce per temperatura la quale agisce invece sull'involucro ed il nucleo come appare evidente paragonando la fig. 10ª alla 5ª.

Riguardo al color nero prodotto dal calore io ne feci speciale studio massime perchè anche secondo Lasaulx, costituisce un fatto abbastanza singolare e difficile a spiegarsi.

Secondo Lasaulx l'annerimento non potrebbe derivare da qualche colore epatico prodotto dalla presenza dello solfo e del ferro perchè resiste a tutti gli acidi, nè da sostanza organica perchè non potè farlo scomparire neppure tenendo il materiale ad alta temperatura in contatto dell'aria.

Le mie esperienze mi diedero tuttavia per risultato che la materia costituente il colore nero debba essere carbonio.

Io presi alcuni cubi ed aggregati sferoidali ed anneritili li posi parte in un tubo di porcellana nel quale mantenevo un' atmosfera di ossigeno a 40 centimetri d'acqua di pressione e li riscaldai al color bianco per 4 ore di seguito. Estratti dopo raffreddamento, vidi che erano di color grigio ed osservati al microscopio constatai che tale colore era prodotto da mescolanza di nero e di bianco, e che era avvenuta una parziale decolorazione dei cubi e degli aggregati nel loro involucro e nel nucleo di questi, rimanendo però la forma intatta.

E fatta una sezione di un aggregato così imbiancato si presentava come nella figura 6ª, dove si scorge che in confronto della figura 5ª la parte nera è quasi tutta scomparsa e lo sarebbe stata completamente prolungando l'operazione.

L'altra parte di aggregati anneriti li riscaldai alla stessa temperatura e per egual tempo e circostanze in un'atmosfera di idrogeno, ma il loro colore rimase perfettamente inalterato.

Infine presi ancora alcuni cubi ed aggregati anneriti e li trattai, senza romperli, con acido fluoridrico, ed il risultato fu di osservare alcuni grumi neri rimasti insolubili, i quali, dopo evaporazione dell'acido, portati al calor rosso bruno scomparivano.

Ora la resistenza all'acido fluoridrico ed al riscaldamento nell'idrogeno e l'azione invece dell' ossigeno non potrebbero spiegarsi che coll' ammettere la presenza del carbonio.

Naturalmente che tale carbonio essendo rinchiuso fra le molecole silicee, la sua combustione non può essere così facile; ed è forse perciò che l' esperienza del Lasaulx del riscaldamento in contatto dell'aria non potè fornire analogo risultato. Anzi io aveva aggiunto nel tubo della esperienza coll' ossigeno dei frammenti di grafite cristallizzata e di diamante, la combustione fu perfetta e ciò perchè non eravi interposto alle molecole del carbonio altra sostanza che impedisse o meglio ritardasse il continuo contatto coll'ossigeno.

Come poi si trovi nella Melanoflogite combinato il carbonio colla silice e coll' acido solforico o se vi sia qualche altro elemento insieme, rimane ancora un problema.

Ciò che mi sembra di poter asserire si è che detto carbonio deve trovarsi combinato e costituire il colore leggermente giallognolo che si osserva nella Melanoflogite.

Ed una prova sarebbe che trattando gli aggregati cristallini, non anneriti, con acido fluoridrico rimangono indecomposti leggieri grumi giallognoli i quali portati con precauzione sopra una lamina di platino e riscaldati, prima anneriscono e poi scompaiono.

Vi sono molti composti del carbonio nei quali il calore può separare in parte o in tutto il carbonio. Quindi supponendo che ad uno di essi appartenga la sostanza colorante, è certo che scomponendosi potrà lasciare fra le molecole silicee il carbonio, il quale rimanendo così diviso in esse non potrà facilmente combinarsi coll'ossigeno, e che la prontezza di combustione dipenderà dalla permeabilità della silice rispetto al gas ossigeno.

Riguardo alla composizione chimica della Melanoflogite che si trova in cubi ed aggregati non la ricercai quantitativamente, sia perchè già esiste l'analisi di Bettendorf riferita dal Lasaulx, sia per mancanza di materiale, e mi limitai ad un saggio qualitativo nella parte che annerisce.

Essendo impossibile una separazione meccanica ne esperimentai alcune chimiche e trovai che se si trattano i cubi e gli aggregati con nitrato potassico fuso, la sostanza che annerisce per temperatura è più facilmente decomponibile che la parte bianca la quale rimane di residuo insieme all'opale della patina. Si noti che se il materiale fu prima annerito allora perde la proprietà di facilmente decomporsi.

Anche la potassa caustica in soluzione scioglie la parte che annerirebbe pel

calore, lasciando intatta la parte interna che si presenta anisotropa e che deve essere calcedonia, ma siccome scioglie anche l' opale della patina così feci uso del nitrato potassico.

Trattata in tal modo la sostanza, stata previamente lavata con cloroformio onde togliere le traccie di solfo nativo, constatai nella parte sciolta la silice e l'acido solforico.

Un altro modo di presentarsi della Melanoflogite fu da me osservato in un esemplare di solfo e calcite. I cristalli di solfo sono coperti di una patina analoga a quella silicea che sostiene la Melanoflogite in cubi, con la differenza che invece di avere una struttura mammellonare possiede una struttura affatto cristallina ed al microscopio si vede che è formata da cubi trasparenti ed omogenei che alla luce polarizzata si comportano totalmente come isotropi. La maggiore grandezza dei cubi non sorpassa $^1/_{10}$ di millimetro e la figura 11ª rappresenta un pezzo di tale patina coll'ingrandimento di 70 diametri.

Riscaldata tale patina annerisce completamente dalla parte superiore ed imperfettamente dalla parte inferiore dove si scorge qualche residuo biancastro di un'altra patina molto più esile di opale, la quale sovente per il riscaldamento si stacca da quella annerita, probabilmente perchè contenendo maggiore quantità di acqua la contrazione è diversa di quella nella patina annerita.

Nello stesso esemplare, e sfortunatamente sinora non rinvenni altro, tale patina, ch'io chiamerò melanoflogitica per distinguerla da quella di opale, copre le faccie dei cristalli di solfo ed a sua volta è coperta da minuti cristalli di calcite. Inoltre si trova anche incrostante piccoli scalenoedri di calcite e simultaneamente coperta dello stesso carbonato, talchè eliminata con un acido la calcite si hanno per residuo insolubile o frammenti piani di patina, ovvero incrostazioni rappresentanti la forma di scalenoedri; sopra tali incrostazioni si osservano poi anche microscopiche stalattiti della lunghezza anche di 5 millimetri, e la figura 12ª riproduce un gruppo stalattitico con ingrandimento di 11 diametri. Dette stalattiti hanno parimenti la superficie cristallina a cubi come la patina, e riscaldate diventano nere; osservando poi una sezione perpendicolare alla loro lunghezza, in generale si vede un grosso nucleo interno nero, poi un esilissimo strato di silice e poi ancora un involucro nero.

Sebbene un solo esemplare mi offrisse tale speciale giacitura di Melanoflogite, tuttavia eravi più materiale d'esame che negli altri esemplari coi cubi ed aggregati e procurai perciò di farne un saggio chimico quantitativo separandone i componenti in base all'analisi di Bettendorf fatta colla Melanoflogite in cubi isolati, perchè la caratteristica forma cubica dei microscopici cristalli costituenti la patina e l'annerimento prodotto dal calore non lasciarono dubbio che si trattasse dello stesso minerale, nel quale il detto chimico ha constatato la presenza della silice e dell'acido solforico.

La sostanza composta di frammenti di patina e di stalattiti separati con acido cloridrico dalla calcite, fu lavata accuratamente con cloroformio in modo di togliere ogni traccia di solfo nativo. La quantità fu di grammi 0,1196; la riscaldai prima al calor rosso, così annerì ed in pari tempo vi fu perdita in peso; quindi fusa col carbonato sodico-potassico ne determinai la silice e quindi l'acido solforico col cloruro barico.

Il precipitato bianco insolubile, ottenuto col cloruro barico, riscaldato in corrente di idrogeno svolgeva dopo con un acido idrogeno solforato, ciò per constatare il solfato.

Il risultato dell'analisi fu:

Perdita per calore	2,42	p. %
$Si O^2$	89,46	
$S O^3$	5,60	
	97,48	

Una piccola quantità di materiale trattata con acido fluoridrico non mi aveva indicato all'analisi spettrale nè calcio nè stronzio, perciò ritenni che una parte della differenza a 100 fosse dovuta alla materia colorante ed il resto forse ad una traccia di ferro del quale osservai la presenza durante l'analisi. In conseguenza cercai di determinare almeno il peso del carbonio che costituisce il color nero prodotto dal calore.

Perciò presi grammi 0,0976 di sostanza e completamente annerita la trattai con acido fluoridrico, quindi evaporai a secco e pesai il residuo nero insolubile, poi riscaldai al calor rosso in modo da far scomparire la massa nera; rimase allora nella capsula di platino una traccia rossastra nella quale con una goccia d'acido e col ferrocianuro potassico ebbi la reazione del ferro. La capsula di platino nella quale stava la sostanza era sempre in altra capsula pure di platino ogni qualvolta era sottoposta a temperatura alta onde avere maggior esattezza nel peso.

Il risultato di tale esperienza fu:

Perdita per calore	2,46	p. %
Perdita pel trattamento coll'acido fluoridrico . .	95,76	
Perdita per la scomparsa della sostanza nera . .	1,52	
Residuo rossastro	0,25	
	99,99	

Ripetuta l'esperienza con altra sostanza del peso di grammi 0,0889 sottoponendola, dopo annerita, all'azione del gas fluoridrico ebbi per risultato:

Perdita per calore	2,36	p. %
Perdita per trattamento col gas fluoridrico . .	96,50	
Perdita per la scomparsa senza residuo della sostanza nera	1,14	
	100,00	

Dette esperienze constatarono quindi meglio quelle eseguite sui cubi e sugli aggregati per riconoscere la materia colorante in nero. Adoperando il gas fluoridrico invece della soluzione acquosa di esso, il carbonio residuo, non essendo smosso dal moto del liquido prodotto sia dalle bolle del fluoruro di silicio che si svolge, sia dal maneggio del vaso, mantiene la forma dei frammenti di patina e di stalattiti in modo così perfetto che a vista si direbbe non esservi stata reazione alcuna e solo la grande differenza in peso attesta la decomposizione avvenuta. Ciò prova la eguale distribuzione del carbonio nelle molecole silicee.

Un'altra esperienza fatta trattando con acido fluoridrico grammi 0,0955 di sostanza non annerita diede una perdita di 97,69 % lasciando un residuo di grumi giallognoli equivalenti al 2,31 %, e detto residuo riscaldato maggiormente scomparve quasi tutto lasciando piccola traccia di sostanza nera, eliminata la quale al calor rosso, rimase ancora una traccia di ferro eguale a 0,20 perciò la sostanza colorante sarebbe ridotta a 2,11 %.

Paragonando questa esperienza con quella della sostanza annerita risulterebbe che a costituire la materia colorante insieme al carbonio vi sia altro elemento che si separa per il calore e che rimane quindi unito alla perdita che si ottiene dopo il riscaldamento, la quale non può essere quindi tutta devoluta ad acqua.

Compensando col risultato delle esperienze coll'acido fluoridrico, l'analisi diretta della silice e dell' acido solforico, nella quale naturalmente la piccola quantità di carbonio scomparve durante la fusione col carbonato alcalino, ossia si tiene conto del carbonio e della piccola quantità di ferro l'analisi può considerarsi eguale:

Perdita per calore	2,42
$Si\,O^2$	89,46
SO^3	5,60
Carbonio	1,33
Ossido di ferro	0,25
	99,06

Se si considera l'impossibilità di avere materiale perfettamente scevro da opale, si scorge come tali analisi non possono dare risultati molto esatti perchè è sempre oscillante la quantità di perdita dovuta al calore.

Tuttavia il risultato ottenuto è sufficiente per stabilire, essere la patina cristallina e le stalattiti costituite da Melanoflogite, e le esperienze indicate credo tolgano ogni dubbio sulla qualità della sostanza che causa il color nero.

Io debbo ora accennare ad un altro modo di presentarsi della Melanoflogite, differente nei caratteri morfologici e fisici ed anche nel carattere di annerimento.

Negli esemplari di Melanoflogite in cubi aggregati sferoidali ve ne sono fra questi ultimi, in proporzione non maggiore del 10 %, di quelli che presentano, visti al microscopio, come la forma di un prisma con una piramide esagona a superficie mammellonare perchè rivestiti di una patina di opale sotto la quale si vede un nucleo trasparente di colore giallo miele, che facilmente si distingue dagli ordinarî aggregati sferoidali già descritti. Il loro diametro non è maggiore di quello degli aggregati.

Confrontando la loro giacitura con quella dei cubi e degli aggregati sembra che la patina di opale sulla quale stanno questi ultimi copra invece i nuclei.

Tali nuclei riscaldati diventano completamente neri mentre imbianca il mantello esterno opalino che li involge, ed una sezione parallela alla patina comune che sostiene gli aggregati si presenta come la figura 7ª la quale è fatta in un nucleo riscaldato leggermente in modo che il colore preso non è nero ma giallo e bruno a zone concentriche.

L'annerimento perfetto di tali nuclei avviene ad una temperatura alla quale i

cubi, gli aggregati e le patine melanoflogitiche appena cominciano a cambiar colore, quindi avvi realmente una differenza in questo carattere della Melanoflogite.

Osservando poi alla luce polarizzata una sezione di un nucleo non riscaldato e parallela parimenti alla patina opalina, si vede il campo esagonale in sei parti irregolari con una struttura radiata e vivaci colori d'interferenza; fra i prismi incrociati talvolta è ben distinta la croce nera. La figura 8ª rappresenta la sezione di due nùclei, uno grande e nel quale si vede la forma esagonale e l'altro piccolo di forma circolare, fra i prismi paralleli; e la figura 9ª fra i prismi incrociati dove si scorge che l'opale costituente il mantello interno e la patina scompare. Anche in tali nuclei non riscaldati si osservano delle linee concentriche le quali costituiscono per riscaldamento le zone a differenti colori.

Se poi si osservano alla luce polarizzata le sezioni di nuclei leggermente riscaldate, in modo cioè che siano ancora trasparenti, allora non si vedono quasi più i fenomeni d'interferenza, ed il campo esagonale si comporta come di sostanza isotropa.

Pare quindi che il calore tolga ai nuclei la proprietà di presentare alla luce polarizzata i fenomeni d' interferenza proprî degli aggregati cristallini a struttura radiata.

La troppo esigua quantità di tali nuclei non mi lasciò neppure pensare ad un saggio chimico, ma sono convinto che debbano pure essere di Melanoflogite perchè anneriscono e perchè nelle esperienze coll'ossigeno e coll'idrogeno essendovi ai cubi e agli aggregati aggiunti alcuni nuclei, questi si comportarono ugualmente. Forse vi potrà essere qualche differenza nella quantità di componenti massime per la sostanza colorante; faccio tale supposizione per ispiegare la maggiore facilità di annerire di detti nuclei.

Considerando ora la paragenesi dei minerali, solfo, calcite, opale e Melanoflogite, le osservazioni da me fatte sugli esemplari del Museo offrono un risultato diverso da quello ottenuto dal Lasaulx sopra i suoi esemplari, secondo il quale la Melanoflogite sarebbe il minerale più recente dell'associazione.

Nell'esemplare dove vi sono i cubi, gli aggregati sferoidali ed i nuclei, la Melanoflogite è più recente dello solfo, ma sembra di genesi alternata colla calcite perchè tolto il rivestimento di calcite trovai ancora sottostanti cristalli di solfo con la patina opalina e qualche cubo. L'opale poi sebbene riguardo ai cubi e gli aggregati sia più antica, tuttavia rispetto ai nuclei che involge è più recente, e considerando la zona interna degli aggregati, sebbene non sia da ascriversi ad opale ma bensì a calcedonia, si vede tuttavia un alternarsi della formazione della silice colla Melanoflogite. L'osservazione poi sull'esemplare della patina e stalattiti melanoflogitiche mi dà ancora un altro importante risultato. In esso vi sono dei cristalli di solfo coperti di patina melanoflogitica e sopra questa si trovano altri piccoli cristalli di solfo i quali staccati dal grosso cristallo portano seco la patina sottostante. Le stalattiti poi e le patine coprono la calcite e ne sono anche ricoperte.

Io posso quindi concludere che i detti minerali dovevano formarsi alternativamente, ossia che la Melanoflogite potè prodursi anche quando la genesi dello solfo non era ancora terminata. D'altronde l'osservazione dà che non esiste Melanoflogite senza opale e siccome non è raro trovare negli esemplari di solfo della Sicilia delle

incrostazioni di opale le quali dimostrano evidentemente, per la loro parziale inclusione, di avere impedito il completamento delle faccie dei cristalli di solfo, così rimane più accertata la genesi simultanea o alternata dei due minerali.

Queste poche esperienze ed osservazioni da me fatte sulla Melanoflogite non hanno nè credo possano avere altro scopo che di aiutare coloro i quali, con maggior materiale, volessero continuare lo studio di così interessante minerale; massime che può ancora rimanere il dubbio se realmente sia a considerarsi la Melanoflogite come un minerale secondo stabilì Lasaulx, ovvero ritenerla per una pseudomorfosi come lascierebbero credere altri mineralogi.

A mio avviso le ragioni di ritenere la Melanoflogite per un minerale del sistema monometrico sarebbero più valide che per una pseudomorfosi.

In favore di una pseudomorfosi potrebbe naturalmente stare la singolare composizione chimica, sebbene ve ne sia una analoga nella sulfuricina molto incompletamente descritta dal Guyard [1] e la quale potrebbesi secondo Brezina [2] considerarsi in stretto rapporto colla Melanoflogite, nonostante il carattere di acidità proprio della sulfuricina che non ha la Melanoflogite, e la mancanza o almeno non indicata proprietà in quella di annerirsi per calore come il nostro minerale.

Anche le osservazioni da me fatte di non essere i cubi isolati intieramente di Melanoflogite potrebbero essere in favore di una pseudomorfosi.

Ma d'altra parte parlerebbero contro una pseudomorfosi le patine melanoflogitiche coi microscopici cubi affatto omogenei e trasparenti che si comportano assolutamente come isotropi.

Inoltre non potrebbe rimanere senza importanza il fatto della genesi delle patine melanoflogitiche durante quella della silice e del solfo, la qual cosa è più in favore della formazione di un minerale che di una pseudomorfosi.

Certamente i nuclei esagonali che si comportano come anisotropi possono offuscare il concetto di un minerale monometrico, ma l'azione del calore il quale toglie la proprietà di dare i fenomeni d'interferenza e, si noti bene, senza che essi ritornino dopo il raffreddamento, diminuisce naturalmente l'importanza del fatto. Perchè si può ammettere che realmente la Melanoflogite sia monometrica e tale si presenti nelle proprietà ottiche quando si trova in cubi, quando cioè ebbe il campo di cristallizzare senza essere soggetta ad influenze che potessero turbare l'ordinamento molecolare isometrico. E che invece nei nuclei sia stata la sostanza soggetta, nel solidificarsi, a contrazioni analoghe a quelle colle quali si può spiegare la doppia rifrazione nell'opale jalite, e la struttura zonata concentrica ne convalida certamente il paragone. L'effetto poi di tali diverse contrazioni sarebbero i fenomeni d'interferenza, effetto che sarebbe eliminato dal calore il quale, dilatando, restituirebbe quella eguaglianza di elasticità ottica che è caratteristica dei corpi isotropi. D'altronde anche l'opale jalite secondo mie esperienze, perde per riscaldamento la proprietà di presentarsi birifrangente.

Non nego che rimane sempre da cercare una causa per la simmetria esagonale

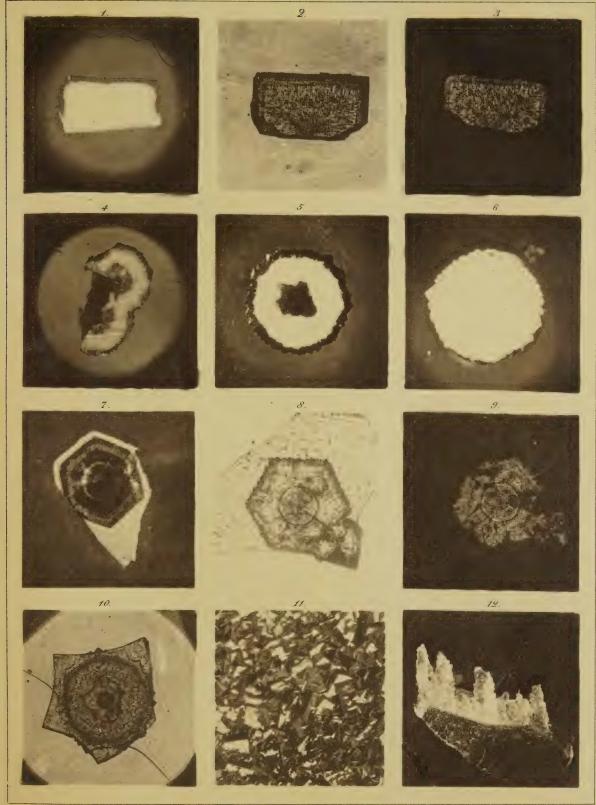
[1] Mineralogische Mitt. von Tchermak 1876, p. 243.
[2] Bulletin de la Société chimique de Paris. T. XXII. Nouv. série p. 61.

dei nuclei, ma credo che studiando meglio il minerale con maggior quantità di materiale si potrà trovarne una plausibile, forse anche tenendo calcolo della geminazione dei cubi di Melanoflogite.

A me pare quindi debba ritenersi la Melanoflogite un minerale del sistema monometrico, e che nei grossi cristalli come sono i cubi isolati relativamente ai cubi delle patine sia già in parte alterato; e l'ammettere un' alterazione dall' interno all'esterno non è fatto nuovo nei minerali.

La mia idea di un' alterazione è anche basata sul fatto che non tutti i cubi hanno un involucro come quello della figura, e ve ne sono molti sui quali è molto più irregolare, sempre inteso verso l'interno dove si osservano quei caratteri di rottura d'omogeneità proprî di una alterazione.

Del resto è certo che pel vantaggio della scienza sarebbe a desiderarsi che altri, possedendo maggior materiale, continuasse lo studio della Melanoflogite massime dal lato chimico onde spiegare non solo l' associazione dell' acido silicico coll' acido solforico, ma anche la resistenza che essi presentano a separarsi ad alta temperatura.

E sarò fortunato se queste mie osservazioni potranno in qualche modo essere utili.

Torino, Lit. F.lli Doyen

Lo sviluppo della colonna vertebrale ne' pesci ossei.

Memoria del dott. BATTISTA GRASSI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 4 febbraio 1883.

(Con otto tavole)

AI LETTORI (¹)

Questa Memoria, è stata composta nel laboratorio di Gegenbaur. Mancherei al mio dovere, se non testificassi a questo illustre professore la mia sincera gratitudine, e per la liberalità, onde, senza veruna raccomandazione, mi aperse il suo laboratorio e mi fornì di mezzi e di materiali; e per il tempo che mi dedicò, non soltanto dandomi consigli in questo speciale argomento, ma preparandomi anche a future ricerche.

Le notizie storiche sulle quistioni, ch' io qui svolgo, sono numerose; e mi costò grande fatica il raccoglierle, specialmente perchè sono disseminate qua e là in moltissime Memorie, una parte delle quali tocca il mio argomento soltanto per incidenza. Se qui volessi riferire per esteso questa parte istorica, potrei riempire molte pagine, ma con troppo poco profitto, da parte dei lettori. Ho perciò deciso di limitarmi ai punti essenziali ed a quelli contrastati (²).

METODI DI RICERCA

Voglio far parola dei metodi di ricerca per me usati.

Ho osservato animali interi, o quasi, che avea resi trasparenti colla potassa caustica; ed ho fatto sezioni in vario senso. E mi sono persuaso che per alcuni problemi (a cagion d'esempio, per lo sviluppo delle ultime coste) il semplice sezionare era insufficiente; combinandovi invece l'osservazione degli animali interi, tantosto raggiungevasi la desiderata meta.

Le migliori sezioni, che abbia ottenute, eran tratte da pezzi conservati e scalcificati coll' acido picrosolforico. Dopochè sono stati un certo numero di giorni in quest'acido, si lavano per due o tre giorni in acqua corrente (metodo Pfitzner); si passano quindi in alcool a 35°; dopo 12 ore si sostituisce alcool a 50°, che si ricambia, quotidianamente, per tre giorni di seguito; dopo i quali, i pezzi si trasportano in alcool a 70°.

(¹) Nel nostro linguaggio le dizioni embriologiche sono poche ed imperfette; ci siamo quindi trovati nella dolorosa necessità di usar neologismi e d' imitar frasi tedesche. E perchè questo nostro lavoro andrà forse nelle mani di forestieri, abbiamo spesso sacrificato lo stile alla facilità di essere intesi, ed intesi interamente. Forse ci siamo ingannati e pel primo e pel secondo caso; è certo però che avevamo buone intenzioni e che non siamo stati negligenti.

(²) Goette, del resto, ha già esposto questa stessa istoria, però molto incompletamente.

Alcuni giorni dopo, essi vengono coloriti col borato di carmino alcoolico (metodo Grenacher).

Per disporli in maniera di poterli sezionare col microtomo, mi sono servito tanto della paraffina semplice (metodo di Kleinenberg), quanto della paraffina al cloroformio (metodo di Bütschli): nella mia opinione, l'un metodo vale l'altro senza alcun speciale vantaggio, nè in favore dell'uno, nè in favore dell'altro.

Per evitare che la sezione si piegolini a mo' di truciolo, si adopera con grandissimo profitto un ago ricurvo.

Per fissare, nell'ordine che si vuole, le sezioni sul port'oggetti, si usano con molto vantaggio le goccioline di balsamo un po' denso; la maggior parte delle volte però si può ricorrere semplicemente all' essiccamento colla lampada, ovvero alla pressione con un pannolano ruvido (ben inteso dopo di aver sciolto la paraffina). Mi ha fatto grande meraviglia l'osservare che questi ultimi due maneggi, benchè molto grossolani, non nuocono alle preparazioni, nè pur a quelle, che sono molto delicate.

Ho conservate molte sezioni nella vernice damar preparata col metodo di Pfitzner, anzi preparatami dall' autore stesso; sciaguratamente dopo alcuni mesi, è comparso un precipitato che me le ha guastate tutte. Perchè molte altre sezioni, conservate in balsamo e fatte contemporaneamente e colle stesse preparazioni preliminari, mi si sono conservate benissimo, io credo che la trovata di Pfitzner non sia lodevole.

PARTE SPECIALE

A) Salmo

Io ho studiato varie specie del genere *salmo* e, cioè il *fario*, il *lacustris* e il *salar*. Siccome queste specie presentano tra loro divarî appena secondarî, e ciascuna di esse è d'altra parte soggetta a qualche variazione, così ne dirò cumulativamente; ma tralascerò per lo più di discendere a dare i numeri delle vertebre impegnate nelle varie regioni della colonna, perchè le variazioni individuali e specifiche riferisconsi per l'appunto a questi numeri.

§ 1. *Corda e sue membrane.*

(Tav. I, fig. 3, 5 e 8, Tav. IV, fig. 1) (¹)

I più giovani feti da me studiati erano ancora nell' uovo e lontani dalla nascita, per lo meno di tre settimane.

In essi la musculatura ed il setto orizzontale intermusculare (che divide la musculatura dorsale dalla ventrale) ed i legamenti intermusculari (cioè i setti tra i miocommi) sono già ben sviluppati; lo è del pari la corda. La quale ha già la nota struttura a cellule bulliformi, aggruppate in guisa da produrre la forma di un cilindro acuminato alle due opposte estremità; la superficie del cilindro è tappezzata da un semplice strato epitelimorfo (cellule quasi cubiche, i cui contorni difficilmente appaiono decisi ed i cui nuclei sono grossi).

(¹) Consiglio al lettore di osservare le figure citate prima di leggere il rispettivo paragrafo.

Esternamente si trova, a ridosso di questo strato, la membrana cordale, la quale ne è meno grossa; è anista, senza pori-canali evidenti. Il contorno esterno di questa membrana pare segnato da una linea, che è sottile, senza doppio contorno evidente e dotata di molta rifrangenza, e che è certamente l'accenno della elastica esterna. Almeno alla coda, gli archi non sono ancora comparsi; là dove si svilupperanno, riscontrasi un tessuto connettivo indifferente, a cellule con nucleo tondo, con contorni poco evidenti; è un tessuto embrionale, che s'estende anche tutt'attorno alla corda.

Dopo questi, che finisco di descrivere, i più giovani avannotti, che io sezionai, s'erano già schiusi da 3 o 4 giorni.

Gli archi son già apparsi, ma nella corda e nelle sue membrane non è occorso alcun notabile cangiamento, all'infuori d'un crescimento in ogni dimensione. Soltanto lo strato epitelimorfo non si mostra ispessito in proporzione colla membrana cordale; la membrana sui tagli, appare perciò più sottile che lo strato epitelimorfo. L'elastica esterna è una membranuzza evidentemente a doppio contorno; presentasi per lo più ondulata e possiede un forte potere rifrangente. Certamente essa non ha struttura cellulare; stanno però addossate alla sua superficie esterna delle cellule giovani, appartenenti al connettivo embrionale circostante. Il quale, lo si noti, non forma uno strato da per sè, ma perdesi nel connettivo, che, per così esprimermi, forma la trama del corpo.

Ad un periodo ulteriore (individui da uno fino a due mesi) (1) la corda e le sue membrane si presentano sempre più cresciute in ogni dimensione; di più è sopraggiunta una differenziazione della membrana propria della corda in rapporto alle vertebre; cioè dire questa membrana offresi nelle regioni intervertebrali ispessita, più o meno nettamente fibrillare (pori-canali?) e capace di assorbire il carmino, più facilmente che nelle regioni vertebrali, nelle quali conservansi i caratteri primitivi. Con questa modificazione, in apparenza va congiunto un lieve strozzamento intervertebrale del tessuto proprio della corda; strozzamento che in realtà esprime un minor accrescimento del tessuto stesso in questa regione. Il confine della parte vertebrale con quella intervertebrale è nettamente segnato (2). L'elastica esterna s'è pochissimo ispessita; nelle regioni vertebrali mi pare soventemente più sottile che nelle regioni intervertebrali; può quasi mancare su alcuni tagli in corrispondenza della cartilagine degli archi, là dove è finito l'ispessimento della membrana propria della corda.

Contemporaneamente, o quasi, compaiono i doppî coni osteoidi. Essi non si sviluppano dall'elastica esterna; non ostante la loro comparsa, questa rimane ancora nettamente visibile.

Lo strato epitelimorfo persiste; è assai piatto e forma uno strato minimo in confronto alla membrana della corda.

Note storiche.

Lo sviluppamento or ora esposto fu già ricercato da altri autori; Lotz e Gegenbaur lo hanno già descritto abbastanza bene. Cartier e Goette hanno contradetto l'opinione dei due primi autori; ma a gran torto, torto che mostrano facilmente le sezioni

(1) Non è inutile ricordare che queste date hanno un valore relativo, perchè i pesci da me esaminati erano stati allevati in acquarî.

(2) Sovra certi preparati le fibrille (pori-canali?) apparivano evidenti anche nella regione vertebrale.

longitudinali. Cartier ha dato una figura, che sembra persuasiva e che mi tenne molto tempo peritoso; essa rappresenta una sezione trasversale, in cui si vede dalla parte dorsale l'elastica e dalla ventrale, invece dell'elastica, una lamella osteoide; su questa figura è basata la conclusione di Cartier, che il doppio cono si sviluppi dall'elastica. Se si pensa che, al periodo in discorso, l'elastica va diventando nelle regioni intervertebrali sempre più evidente, mentre che nelle vertebrali (specialmente in alcuni punti che confinano colle regioni intervertebrali) va forse assottigliandosi; se si riflette inoltre che l'elastica, laddove succede l'ossificazione, restando, per così dire, sostenuta, non si pieghetta più e perciò diventa meno evidente; se si considera infine che la sezione di Cartier è probabilmente obliqua e fatta su un pezzo non ben conservato; se si pesa tutto questo, dico, egli ci riesce di concepire come Cartier siasi ingannato.

Goette ha scritto che « die regelmässige Epithellage der Chorda, welche Gegenbaur in derselben Mächtigkeit, wie die Chordascheide zeichnet, durchweg vermisst »; mi pare che s'egli avesse fatto dei preparati un po' buoni, sarebbe arrivato ad una conclusione contraria.

Non so come abbia poi potuto giudicare cellulare, l'anista elastica esterna; qui le cellule (gli rubo l'espressione, ch'egli adopera per Gegenbaur) « durchweg vermissen »: ed io lo dimostro con delicate sezioni, e, non siccome egli fa, con dilacerazioni, le quali nel caso attuale riescono inconcludenti.

§ 2. *Archi e coste.*

(Tav. I, da fig. 1 a 10; Tav. II, fig. 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10; Tav. IV, fig. 1)

Ho già detto che gli archi mancano affatto ventun giorni prima della nascita. Nel *salmo lacustris*, schiusosi da otto giorni, al tronco, gli archi superiori sono larghi alla base, diretti già indietro, come nell'adulto, e già lunghi tanto da raggiungere la superficie dorsale del midollo, dove però non si toccano l'uno coll'altro (ciò non fanno neppur più tardi). Sono cartilaginei, col così detto pericondrio a cellule allungate; non vedesi traccia evidente di sostanza osteoide.

Gli archi trasversi sono, come i superiori, cartilaginei ed a base estesa; alla parte anteriore e media del tronco presentansi corti, cioè poco sporgenti, quasi monconi; sono invece affatto simili ai superiori (cioè press'a poco a forma di clava coll'estremità grossa appoggiantesi alla corda) gli archi trasversi di quelle vertebre, che stanno press'a poco a livello dell'estremità posteriore dell'intestino. Tra cotali archi i posteriori si toccano, vicendevolmente, colle loro estremità distali, le quali però non sono ancora fuse insieme.

Di coste non rilevasi ancora traccia alcuna; là dove più tardi appaiono, vedesi semplicemente connettivo embrionale.

Osservando una serie completa di sezioni del tronco, è facile persuadersi che nella regione posteriore del tronco, l'attacco degli archi trasversi alla corda è molto vicino alla linea mediana; essi vanno allontanandosene, man mano che si procede dall'indietro all'avanti.

Alla regione della coda, gli archi superiori sono cartilaginei e sviluppati, come quelli del tronco, con i quali hanno uguale anche la forma; ma stanno più accosti l'uno

all'altro colle loro estremità distali; le quali non sono però ancora riunite da tessuto, che abbia sicuramente i caratteri di procondrio; tanto che mal se ne saprebbe presagire, se si uniranno o no. Gli archi inferiori sono cartilaginei, come i superiori, con cui hanno anche simiglianza di forma; alle loro estremità distali sono riuniti da un tessuto procondrale; non havvi vestigio alcuno di processo spinoso (qui non parlo delle vertebre modificate per la pinna caudale; cioè, il mio discorso si riferisce alla coda propriamente detta). Come nel tronco, così nella coda, gli archi hanno già la direzione, che riscontrasi nell'adulto.

Il legamento vertebrale superiore è già sviluppato; esso è ricco di cellule, disposte tra fibre longitudinali.

In individui nati da ventun giorni, tutti gli archi si sono ingrossati. Gli archi superiori si sono allungati tanto al tronco che alla coda; la cartilagine, nelle parti media e distale dell'arco è già rivestita da uno straterello osteoide, che qui, come sempre, è ben limitato dalla cartilagine, specialmente perchè ha rifrangenza maggiore di quella della sostanza fondamentale della cartilagine stessa. Gli archi superiori, alla coda e circa alle ultime otto-nove vertebre del tronco (ossia nella regione critica), si sono già fusi insieme come nell'adulto, ed il processo spinoso è già accennato.

Gli archi inferiori della coda (parlo sempre d'individui di ventun giorni) sono simili ai superiori, e si è già, almeno in una parte di essi, iniziato lo sviluppo del processo spinoso. Nella regione critica del tronco, gli archi trasversi sono riuniti insieme all'estremità distale, o poco prima di essa, da ponti trasversi più o meno curvi. In genere si vedono anteriormente archi inferiori allungati, più indietro archi riuniti da un ponte poco curvo, infine archi a ponte molto curvo; questi ultimi possono gradualmente passare alla nota forma degli archi inferiori della coda. I ponti e gli archi relativi sono fatti da cartilagine ravvolta da un legger straterello osteoide, il quale non si estende alla base degli archi. Gli altri archi trasversi non presentano però alcun principio di ossificazione. Se si trascura la regione critica (di cui ho già parlato), sta il fatto che tutti gli archi trasversi si sono mantenuti corti monconi. In corrispondenza a questi archi si sono già sviluppate le coste; le presentano tutti, eccetto i primi tre (e, come s'intende, eccetto anche quelli della regione critica, che ho di già descritti). Queste coste sono molto sottili, specialmente all' estremo distale, e piuttosto lunghe; giacciono nei legamenti intermusculari, là dove questi confinano colla cavità peritoneale; non hanno evidente involucro osteoide. Tra la costa e il processo trasverso evvi un sottil strato di blastema, cioè di connettivo embrionale.

Nel tronco, al disopra del legamento vertebrale, veggonsi gli accenni cartilaginei delle future ossa interspinali (o, com'altri dice, dei portapinne); hanno la forma di bastoncini [1].

In individui di un mese e più, nel tronco gli archi superiori sono prolungati al di là del midollo spinale e, cioè, a lato dei pezzi interspinali (che a questo periodo sono ancora cartilaginei, ma hanno già un involucro osteoide, non esteso però ai loro estremi). Il pezzo al di là del midollo spinale è del tutto osteoide (cioè a dire, non si è preformato cartilagineo) e sta in continuazione col velamento osteoide dell'altra parte

[1] Ricordo, che questi portapinne si sviluppano anche là dove non corrispondono pinne.

dell'arco, la quale conservasi cartilaginea; cotale velamento manca ancora in parte di questa cartilagine, cioè alla base dell'arco.

La sostanza osteoide è qui, come sempre, amorfa, e senza canalicoli; viene circondata da un periostio a cellule fusiformi.

Alla regione critica si può trovare dei ponti, i quali constano di sostanza osteoide, od appena nella linea mediana-longitudinale rispetto all'animale, ovvero interamente.

Gli archi trasversi del tronco non mostrano ancora evidenti traccie osteoidi.

Le coste sono riunite al processo trasverso, per mezzo di poche cellule; che accennano a diventare cartilaginee da per tutto, fuorchè alla regione critica (ultime 8-10 vertebre). Qui havvi uno spazio piuttosto esteso tra le coste ed il processo trasverso; questo spazio è riempito di un connettivo con cellule allungate.

Portano coste anche gli archi riuniti da ponti; e talvolta persino uno che va fornito di una corta apofisi spinosa.

È in questo periodo, che ho notato con certezza una variazione specifica tanto nel numero e nella forma dei ponti, quanto nel numero degli archi a ponte che portano coste.

Le coste posteriori, per quanto ho fin qui detto, sono più tardive nello sviluppo e più discoste dall'arco di quel che le anteriori; sono inoltre più corte e più sottili, e talvolta l'ultima presentasi cortissima.

Più ci portiamo dall'indietro all'avanti, più troviamo le coste lunghe, e, fino a un certo punto, più grosse nella porzione prossimale; si può dire che ovunque, nella metà distale, la cartilagine è ridotta ad una semplice fila di cellule cartilaginee. La cartilagine, che preforma le coste, in questo tempo ha un invoglio osteoide, che finisce là dove la costa si riunisce agli archi per mezzo dello scarso tessuto, che sopra ho accennato ([1]).

Questo invoglio di regola non s'estende all'estremo distale della costa; è qui che essa va allungandosi. Non è però raro il vedere intercalate alla cartilagine dei pezzetti, ove la costa è del tutto osteoide: qui non si è preformata la cartilagine.

Sempre nel periodo in discorso non è raro di vedere l'estremità distale delle coste posteriori ravvolta a spirale, quasi viticchio.

Le prime tre vertebre non hanno ancora coste.

Per chiarezza riassumo in una semplice proposizione parecchi fatti già qua e là toccati. Si può, cioè, ritenere che l'involucro osteoide non s'estende, in questo periodo, alla base degli archi, e manca ai processi trasversi (eccetto quelli della regione critica).

Negli individui, che si sono dischiusi da circa due mesi, le condizioni appaiono poco mutate; la sostanza osteoide comincia però a prendere il sopravvento sulla cartilagine, se si giudica dalla loro rispettiva quantità. La cartilagine però continua a crescere: 1° agli estremi distali delle coste; 2° agli estremi distali dei processi spinosi inferiori della maggior parte della coda (eccetto i primi e quelli modificatisi per la pinna caudale); 3° agli estremi distali dei processi spinosi superiori della stessa regione caudale (non però al primo?); 4° agli estremi prossimali degli archi.

Le coste sono unite agli archi trasversi per mezzo di un tessuto, che debbo

([1]) Mentre la costa, come gli archi, quando è ancora cartilaginea, offresi a sezione ovale-rotondastra, l'osso presto s'estende in maniera da dare alla costa la nota forma lamellare.

giudicar cartilagineo (procondrio di alcuni Alemanni) a cellule piccole e con scarsissima sostanza intercellulare, locchè differenzia questo tessuto da quello che forma gli archi e le coste. Questo procondrio è molto scarso e, a differenza della cartilagine della costa, non va fornito di velamento osteoide.

Le coste della regione critica non hanno mutato il loro rapporto cogli archi, vale a dire ne sono disgiunte, ben inteso pochissimo, cioè un tratto microscopico ([1]).

Le osservazioni, a questa età, persuadono sempre più che nella regione critica si danno delle varietà specifiche ([2]), come ho testè indicato. Aggiungo soltanto che la prima apofisi spinosa può essere più, o meno lunga; che da un lato può mancare una costa, od essere molto corta, o portarsi orizzontalmente indietro ed unirsi per tessuto fibroso a due, o più processi trasversi delle vertebre seguenti.

Nelle prime vertebre anteriori, al punto dove gli archi superiori cessano di essere cartilaginei (rispetto a questi, in parte all'indietro ed in parte all'interno, e rispetto al legamento vertebrale superiore all'esterno ed un po' in basso) s'incontrano dei pezzi cartilaginei (intercalari midollari), due per ogni vertebra, uno a destra e l'altro a sinistra. La cartilagine, onde risultano, è circondata da connettivo; che è in continuazione con quello del legamento vertebrale superiore il quale possiede, oltre alle fibre, molte cellule. Questi intercalari midollari stanno quasi a ridosso della lamella osteoide che involge gli archi, lamella che manca agli intercalari stessi.

In individui più avanzati d'età, si sono essi sempre più pronunciati; si trovano nelle vertebre della maggior parte del tronco; come al loro nascere, sono appiattiti nel senso laterale. I primi apparsi si toccano l'un l'altro sulla linea mediana, formando così una sorta di tetto al canale spinale e di letto al legamento vertebrale superiore.

Notizie storiche.

Le notizie da me riferite in questo paragrafo si leggono già in parte in Lotz ed in Goette; devesi però confessare che le loro ricerche sono fatte senza sezioni soddisfacenti. Goette soltanto ha studiato lo sviluppo delle coste, ha però lasciato indecisa la quistione in molti punti non secondarî; così, per es., egli non sa se le coste precedenti le ultime nove, si sviluppino separate dagli archi ecc.

§ 3. *Corpo vertebrale.*

(Vedi Tav. IV, fig. 1)

Verso l'epoca in cui si sviluppano gli intercalari midollari ed in cui la membrana della corda si differenzia a seconda delle regioni vertebrali ed intervertebrali; compaiono i già sopra accennati corpi vertebrali, simili a doppî coni. Si sviluppano dal connettivo circostante all'elastica esterna; connettivo, che non forma un vero strato scheletogeno a sè, ma si continua con quello del resto del corpo dell'animale. Comin-

([1]) Per incidenza noto che nell'adulto le coste posteriori, a quanto pare, si sciolgono dalla loro connessione coi processi, più facilmente che le anteriori.

([2]) Meno però che negli altri teleostei; ciò è forse dipendente dal fatto che quasi tutti gli individui da me studiati eran fratelli e sorelle e venivan allevati nello stesso ambiente.

ciano alla parte anteriore della colonna vertebrale; s'estendono però assai rapidamente dall'avanti all'indietro. L'osso si inizia anche qui, come sempre, amorfo e senza canalicoli.

Ad un' epoca non molto posteriore a questa, l'osso degli archi della coda (ad eccezione press' a poco degli ultimi 6-7) si fonde con quello del doppio cono; ciò non accade al dorso; sicchè in individui di 2dm. colla cottura gli archi della parte anteriore e media della coda non si separano dal corpo vertebrale, si separano invece gli altri tutti, lasciandovi una cavità. Questo fatto si ripete anche nell'adulto.

Notizie storiche.

Sono già state accennate a proposito della membrana della corda.

§ 4. *Reste* (¹).

(Tav. II, fig. 10)

Negli individui prossimi ai due mesi, si son già sviluppate anche le reste dorsali (*coste superiori* d'alcuni autori); come nell'adulto, decorrono nei legamenti intermuscolari dorsali. Al loro primo apparire sono bastoncini di sostanza osteoide amorfa senza canalicoli, e circondati da connettivo compatto. Per mezzo di un tessuto simile stanno attaccate alla base degli archi superiori. Come si poteva prevedere dalle condizioni dell'adulto, esse sono limitate al tronco.

Note storiche.

Sullo sviluppo delle reste dei salmonidi non si sapeva nulla.

B) Esox.

§ 1. *Corda e sue membrane.*

(Tav. II, fig. 7 e 11; Tav. III, fig. 10; Tav. IV, fig. 2, 3, 6, 13 e 14; Tav. V, fig. 7)

Nel luccio nato da 4-5 giorni (lungo poco più di 10^{mm}) si trovano disposizioni parallele a quelle, che ho descritte nei salmonidi, ventun giorni prima che abbandonino l'uovo.

I lucci nati da circa un mese e conservati in un acquario (lunghi circa $12\text{-}14^{mm}$) sono simili ai salmonidi di 3 o 4 giorni. Lo straterello epitelimorfo della corda si presenta a cellule appiattite e piccole.

Nei lucci di circa $25\text{-}30^{mm}$ (press' a poco dischiusi da circa un mese ma vissuti in libertà) (²) la corda è molto ingrandita in ogni senso; anche le membrane si

(¹) Do a questa parola il senso che danno i Francesi alla parola *arête* ed i Tedeschi alla parola *gräte.*

(²) Un' osservazione cade qui opportunissima. Ricordando i molti insuccessi delle semine di embrioni pescini allevati artificialmente, mi sono domandato se ciò non debba mettersi in rapporto con quanto ho qui accennato, che, cioè, lucci lasciati liberi nell' acqua erano lunghi ad un dipresso due volte di più che altri giù di lì d' eguale età, ma allevati artificialmente negli acquarî; è notabilissimo che nei primi gli archi vertebrali erano già in parte cartilaginei ed in parte osteoidi, mentre nei secondi erano abbozzati (cartilaginei) appena gli archi superiori-anteriori.

sono ingrossate; lo strato epitelimorfo, almeno in molti punti, appare doppio e a cellule non piatte.

In lucci di 3-4^{cm} la corda non offresi più come prima, a guisa di cilindro press' a poco uniforme, sibbene la sostanza propria della corda è cresciuta nelle regioni intervertebrali più che nelle vertebrali; e la corda così ha acquistato l'accenno di quei gozzi e stringimenti, che sono a tutti noti nell'adulto. Contemporaneamente osservasi un ispessimento della membrana propria della corda, ispessimento, il quale nelle regioni intervertebrali (e qui lo strato epitelimorfo è più ricco di cellule), è maggiore che nelle regioni vertebrali.

Su individui di 13-15^{cm} in corrispondenza alla parte media-trasversale delle faccette (intendo per faccette le superficî interne del doppio cono), noto soltanto la presenza di una sottilissima membrana [1], e non posso decidere se corrisponda all'elastica, od alla membrana propria della corda, ovvero, come si può congetturare più probabile, all'una ed all'altra; nella parte centrale della vertebra e nella regione intervertebrale si trova tanto la membrana propria della corda quanto l'elastica esterna, che sono ingrandite, siccome dimostra il confronto collo stadio precedente; la membrana propria della corda, per quel ch'io ho veduto, si mantiene però più crassa nelle regioni intervertebrali, di quel che nelle regioni centrali vertebrali.

Uguali condizioni si trovano press' a poco in lucci di 16-20^{cm}.

Con questi lucci si può persuadersi che la membrana propria della corda ha ancora continuato ad ingrossarsi, in corrispondenza tanto alle regioni intervertebrali quanto alla parte media delle vertebre; là si mostra ancora relativamente molto più grossa che qua; là è evidentemente fibrillare, qua pare ialina.

L'elastica esterna resta ancora evidente e isolabile, là dove è evidente la membrana propria della corda; conservasi però sempre sottilissima. Anche nella parte mediana-trasversale delle faccette le cose probabilissimamente permangono, quali le descrissi nello stadio precedente.

Contemporaneamente allo svilupparsi dei gozzi e stringimenti, nelle regioni intervertebrali, al di fuori e a ridosso dell' elastica esterna, viene a risaltare una sorta di legamento, che Kölliker ha denominato *intervertebrale esterno*.

È probabile che, man mano che le vertebre si allungano, esso vada trasformandosi nella sostanza osteoide del corpo vertebrale; consta di un tessuto a fibre longitudinali e ricco di cellule; queste cellule sono più abbondanti in vicinanza all'elastica esterna.

Questo così dètto legamento perdesi nel periostio, che sta all' esterno delle basi del doppio cono.

Dobbiamo soffermarci sulla sostanza propria della corda.

In individui di 4-5^{cm} almeno nella maggior parte della colonna vertebrale, la sostanza propria della corda è caratterizzata da gozzi e stringimenti senza lacune. Le sue cellule nella regione intervertebrale sono piuttosto tonde e a pareti relativamente grosse; le centrali più ampie e a pareti più grosse che le periferiche.

Nella regione vertebrale si nota che le cellule centrali sono allungate nel senso

[1] La qui indicata disposizione della membrana della corda, alla parte media-trasversale delle faccette è probabile, ma non certa.

della lunghezza della vertebra ed a parete piuttosto grossa; del pari allungate sono le cellule periferiche, ma le loro pareti appaiono molto sottili. In individui di 8-10^{cm}, al luogo di queste cellule a pareti molto sottili, si scoprono delle lacune, le quali contengono un liquido. In alcuni preparati dentro di esse, oltre a questo liquido, incontrasi una certa sostanza, che sui tagli mirasi reticolare; questa sostanza, nel mio parere, è una reliquia del tessuto proprio della corda, che, a quanto pare, va atrofizzandosi con conseguente formazione di cavità.

Essendochè della sostanza propria della corda conservasi nella vertebra soltanto una parte centrale (di spessore press'a poco uniforme) e lo strato epitelimorfo della corda (che vien accompagnato da un po' di sostanza propria della corda appena alle basi delle vertebre); ne deriva che la lacuna riproduce press'a poco la cavità della vertebra: ben inteso l'asse longitudinale di questa cavità resta percorso da un filo fatto da sostanza propria della corda.

Per maggior chiarezza descriverò come si dà a vedere la sostanza propria della corda, in conseguenza di questi mutamenti, su individui di 16^{cm}.

Nelle regioni intervertebrali, questo tessuto è molto esteso; ha cellule evidenti e sostanza intercellulare abbondante specialmente alla parte centrale, ond'è che qui esso imita la cartilagine.

Si può dire che la sostanza propria della corda, nelle regioni intervertebrali, forma un setto. Alla periferia questo setto si ripiega e si prolunga sulle metà contigue delle faccette del doppio cono, formandovi così uno strato tenue. Dal centro del setto dipartesi un sottil funicolo (parte centrale della sostanza della corda) che percorre l'asse longitudinale del doppio cono e congiunge un setto coll'altro.

Questo funicolo pare fibroso ed è percorso da strette lacune longitudinali; soltanto verso la sua superficie discopresi qualche nucleo. Parrebbe che esso, il funicolo, avesse subìto una forte pressione da parte del liquido che riempie le lacune. V'è quando appresentasi interrotto al centro della vertebra; allora è difficile stabilire se questa interruzione sia naturale, od artificiale.

Notizie storiche.

Le osservazioni di Goette sulla membrana della corda hanno, nel mio parere, le medesime imperfezioni che ho già rilevate a proposito dei salmonidi; il materiale, di cui egli si servì, doveva essere molto scarso e mal conservato [1]. Quanto è poi della sostanza propria della corda, egli erra sostenendo che nei lucci di 3-4^{cm} havvi già ovunque una « sehr deutliche Atrophie der ganzen Chorda ».

Le vecchie osservazioni di Kölliker mi sembrano senza confronto migliori. Quello strato, ch'egli ritiene elastica interna, è senza alcun dubbio il mio strato epitelimorfo, che su preparati mal allestiti appare uniformemente tinto e non mostra gli elementi cellulari. La membrana della corda di Kölliker trova riscontro nella membrana della corda da me descritta, ma con due riserve: 1° io non ho alcuna prova che calcifichi, ma questa prova, a dir vero, non trovo neppure nei lavori

[1] I lucci di 3-9^{cm} da me studiati erano stati raccolti a Melegnano dal sig. Gallina; soltanto chi ha cercato di procurarsi lucci piccoli può pregiare la grande pazienza di questo mio amico, al quale io mi dichiaro riconoscentissimo.

di Kölliker; 2° a quest' autore è sfuggita la parte mediana vertebrale della membrana in discorso. Il legamento intervertebrale interno, molle e fibroso, descritto da Kölliker, corrisponde alla membrana propria della corda nella regione intervertebrale. L'elastica esterna venne veduta da questo autore, ma soltanto nelle regioni intervertebrali.

§ 2. *Archi e coste.*

(Tav. II, fig. 2; Tav. III, da fig. 1 a fig. 11; Tav, IV, fig. 8, 9 e 15)

Nel luccio, che ha abbandonato l'uovo da 4-5 giorni, non trovo traccia nè di archi nè di coste. In lucci di circa un mese d' età incontro ben accennati, gli archi superiori della parte anteriore del tronco; hanno figura di una virgola, la cui concavità lambisca il midollo spinale; la loro grandezza va descrescendo dall' avanti all' indietro; già alla parte media del tronco, mancano affatto. I più posteriori fra questi abbozzi d'archi risultano di pochissime cellule, ed io qui ne ho disegnato uno, in cui non se ne contano più di dieci; il nucleo è grande e pare circondato da una sottilissima zona di protoplasma; tra siffatte cellule havvi una scarsissima sostanza intercellulare, quasi omogenea e relativamente compatta.

Anche ammesso che, fin dal loro primissimo apparire, gli abbozzi degli archi siano grandicelli così come questo che finisco di descrivere (lo che non è verosimile); posso sempre congetturare che questo micolino di tessuto procondrale non può fungere da arco, nè può proteggere il midollo spinale.

Dove non sono ancora apparsi cotali primi fondamenti degli archi, gli spazî corrispondenti sono occupati da connettivo embrionale. Tra i miocommi ed il midollo spinale, intercalati a questi accumoli di connettivo embrionale (da cui ripeto, si formeranno gli archi), si trovano cellule, che a me sembrano indubbiamente ganglionari, e vedonsi nettamente dei corpuscoli sanguigni; pare dunque indubitato che i gangli ed i vasi della regione in discorso si sviluppino prima degli archi.

Al periodo, di cui mi occupo, là dove più tardi si svolgeranno i processi trasversi e gli archi inferiori, non si vede che connettivo embrionale, medesimamente come dissi per una parte degli archi superiori.

Io non ho avuto occasione di studiare altra fase anteriore alla seguente, che mi venne data da lucci di circa 28^{mm}. Archi, processi trasversi e coste si sono già sviluppati. Gli archi ed i processi trasversi concordano con quelli del salmone nato da un mese. Notisi soltanto che, più ancora che nel salmone, è evidente il portarsi dei processi trasversi posteriori verso la linea mediana.

Le coste sono cartilaginee e soltanto alla loro parte prossimale presentano traccia d'involucro osteoide; in grossezza superano quelle del salmone d'ugual lunghezza.

Alla parte anteriore e media del tronco continuano direttamente coi processi trasversi. Mi spiego con maggiori particolari: la sostanza fondamentale della cartilagine delle coste è continua con quella del processo trasverso, senza diventare in alcun punto minore in quantità, o prendere caratteri speciali.

Questo tessuto cartilagineo, là, dove più tardi si formeranno le articolazioni, è però meno esteso e, come si suol dire, presenta uno strozzamento. Lo spazio lasciato dalla cartilagine così strozzata (la quale può denominarsi colletto) viene occupato da

connettivo embrionale. Le cellule del colletto sono press' a poco in linea retta trasversale; quelle contigue nella costa, formano giù di lì degli archi la cui concavità guarda la costa; quelle contigue nei processi trasversi formano giù di lì degli archi, la cui concavità guarda i processi trasversi. Il tessuto osteoide della costa cessa, dove comincia questo colletto.

Cotali disposizioni sono accennate ancora alla parte posteriore del tratto medio del tronco; qui però il colletto non è ancora fatto di cellule cartilaginee, sibbene di un connettivo embrionale a cellule tondeggianti; questo connettivo sembra però nettamente separato da quello che, come ho detto, nella parte anteriore del tronco, circonda il colletto e risulta di cellule piccole e un po' oblunghe.

Alla regione critica, come nei salmoni, i processi trasversi vanno man mano allungandosi, man mano che si va dall'avanti all'indietro. Qui i processi di una o più vertebre possono convergere (ben inteso quello d'un lato con quello dell'altro), e possono perfino arrivare a congiungersi con una sorta di ponte.

In un periodo successivo (individui di 3-4^{cm}) gli archi hanno acquistato l'involucro osteoide, come nel salmone.

La cartilagine delle coste è da per tutto fusa con quella dei processi trasversi; l'ultimo, o le due ultime paja di coste, fanno eccezione e stanno piuttosto discoste da questi processi, a cui sono congiunte soltanto per mezzo di connettivo giovane.

In queste ultime coste s'incontrano molte anomalie, come si può facilmente dimostrare con esemplari rischiarati dalla potassa; possono essere sciolte in parecchi pezzi, l'uno lontano dall'altro, e tutti lontani dal processo trasverso; da un lato può mancare una costa, od essere rudimentale, senza che per questo il processo trasverso resti modificato ecc.

La cartilagine delle coste si comporta e per le regole, e per le eccezioni come negli avannotti.

Negli individui, la cui lunghezza è tra i 40-60^{mm}, ho riscontrato disposizioni analoghe a quelle del salmone di poco più piccolo e uscito dall'uovo da circa due mesi. Al tronco gli archi superiori sono a punte osteoidi, le quali non si toccano vicendevolmente, appunto come nell'avannotto. Come in questo, la sezione trasversale della cartilagine degli archi e anche quella delle coste è circolar-ovalare. La lamella osteoide forma sempre sui tagli trasversi un anello e da una parte (alle coste) o da due parti l'una opposta all'altra (agli archi), si prolunga; è così che gli archi e le coste cominciano ad assumere quella forma appiattita che si riscontra evidentissima nell'adulto.

In questo periodo si notano già i pezzi intercalari midollari; per la posizione sono poco differenti di quelli del salmone. Io li ho incontrati già fusi, l'uno coll'altro, sulla linea mediana. Ciascuno di loro, per lo meno in alcune vertebre anteriori, presenta due gambe, una è un poco anteriore rispetto alla cartilagine dell'arco superiore; l'altra le è alquanto posteriore. Per quanto ho veduto, la cartilagine di queste gambe è continua con quella degli intercalari propriamente detti, ma non con quella dell'arco; però l'involucro osteoide, che le circonda, è fuso con quello dell'arco e, pare, anche con quello dei pezzi intercalari.

I pezzi intercalari sono più voluminosi nelle vertebre anteriori; mancano alla coda.

La cartilagine delle coste (continuo a studiare individui lunghi da 4 a 6^{cm}) è tuttora fusa coi processi trasversi.

Gli archi inferiori della coda invece di essere, come prima, del tutto cartilaginei, conservansi così soltanto alla parte prossimale e media; nel resto sono osteoidi; però là dove i due archi si uniscono per formare l'apofisi spinosa, può trovarsi ancora un residuo di cartilagine.

Quando gli individui hanno superati ad un dipresso i 6^{cm}, va formandosi l'articolazione tra la costa e il processo trasverso.

Su individui di circa 15^{cm} trovo che questa articolazione è costituita, così come segue: si è formata una fessura quasi trasversale, nella cartilagine del sopramentovato colletto; questa fessura non interessa tutta la cartilagine, ma soltanto i *tre quarti interni* (ossia i tre quarti più vicini alla linea mediana). La parte interna del connettivo embrionale circondante il colletto (ricordinsi le disposizioni dianzi accennate), parte che già ne' periodi antecedenti è sviluppata in altro modo che l' esterna, ora ha preso decisamente la forma di un microscopico menisco, o cuneo, che è contesto di connettivo a cellule abbondanti. Esso riposa nella fessura sovraccennata, però, a quanto pare, senza riempirla interamente. Una sezione della fessura che sia trasversa verticale rispetto al corpo dell' animale, ha figura press'a poco triangolare; simile è quella del menisco, ma però un po' più piccola.

Al *quarto esterno* non ho potuto trovare il confine della sostanza osteoide della costa con quella del corpo vertebrale. Tra la costa ed il corpo vertebrale trovasi, cioè, un tessuto fibroso, compatto, sclerosato, perciò non ben differenziabile dalla sostanza osteoide, nelle sezioni; per far le quali, naturalmente, la colonna vertebrale è stata decalcificata. In vicinanza del punto dove l'accennata fessura articolare è più stretta, il tessuto in discorso è cosperso di cellule connettive e cartilaginee.

Le ultime coste, su individui lunghi 10^{cm}, appaiono separate dai processi trasversi, per mezzo di tessuto fibroso. La parte distale di queste coste corre e si perde nei legamenti intermusculari ventrali. Condizioni simili, a quanto pare, esistono ancora su individui di 15-20^{cm}.

I lucci di quest' ultima lunghezza provano che la cartilagine degli archi è sempre andata crescendo nella sua parte basilare; parte che (come vedremo più innanzi) si trova compresa nel corpo vertebrale.

In un' altra parte (la mediana, che non è compresa nel corpo vertebrale), gli archi superiori del tronco vanno forniti di cartilagine, la quale è disposta come un filamento sottile circondato di sostanza osteoide; si può ritenere che qui si è mantenuta senza ulteriormente crescere, quella cartilagine, che si riscontrava sugli individui di 6-7^{cm}.

La cartilagine dell'or ora nominato filamento, all'estremo prossimale, è continua colla cartilagine basilare dell'arco; all'estremo distale invece, è separata dai pezzi intercalari (la cui cartilagine s' è molto aumentata) per mezzo di un lievissimo straterello osteoide.

L'esame di individui molto più grossi dà a vedere quanto segue: in complesso la cartilagine degli archi superiori e trasversi (eccezione fatta almeno per alcune

vertebre della regione critica) va ancora sempre crescendo; la cresciuta è però limitata alla parte basilare, per gli archi superiori. Le coste s' allungano sempre, preformandosi però cartilaginee. La cartilagine degli intercalari va sempre aumentando. La cartilagine degli archi delle ultime vertebre della coda si comporta press' a poco, come al tronco. Infine negli archi trasversi e superiori delle ultime vertebre critiche e in quelli superiori ed inferiori della parte anteriore e media della coda, la cartilagine, se pure aumenta, aumenta di poco.

Noto per transito che in un individuo di 15^{cm} la sostanza fondamentale della cartilagine mi apparve nettamente fibrillare; le fibrille non erano disposte come raggi intorno alle cellule, sibbene imitavano molto bene l'ordine che si nota nella cartilagine degli archi vertebrali sullo *spinax niger* ([1]); eran però forse più delicate; soggiungerò che non sono riuscito a vedere tale struttura in alcun altro luccio, o teleosteo ([2]).

Notizie storiche.

Augusto Müller ha sostenuto erroneamente che gli archi trasversi sono in continuazione colle coste fino dal primo apparire di queste; egli ha però il merito di aver già rilevato fin dal 1853 alcuni fatti qui esposti.

Goette ha richiamato l' attenzione sui pezzi interspinali e sui pezzi intercalari; del resto, la sua descrizione là dove è nuova, è (Goette perdoni la mia franchezza) inesatta ed incompleta. Non mi posso astenere dall' accennarne una piccola parte. Egli descrive lucci di 7^{cm}; dice che la penultima costa è lunga e non rivestita dall'osso alla sua estremità distale; che l' ultima costa è cortissima ed il suo estremo distale è involto d' osso; che seguono due o tre semplici processi trasversi paragonabilissimi alla costa precedente insieme col suo processo trasverso, tanto per la disposizione della cartilagine e dell' osso quanto per la lunghezza, differenti soltanto per la mancanza dell'articolazione; e che infine a questi due o tre processi trasversi non segmentati seguono altri simili ma però congiugentisi in un' apofisi spinosa.

Lascio da banda il fatto che l'autore non presentì neppure la possibilità delle anomalie della regione critica del luccio e mi contento di osservare che non soltanto l' articolazione differenzia l'ultimo processo trasverso ancora fornito di costa dai primi che ne mancano; infatti, come ebbi detto di sopra, alle volte l'estremità distale di una costa diventa osteoide e, poi al di là di questa sostanza osteoide, si sviluppa nuova cartilagine; è perciò presumibile che, se Goette avesse esaminato questo stesso individuo di cui parlo, ma più avanzato in età, verosimilmente avrebbe trovato, in luogo di una costa cortissima, una costa lunga, ed invece relativamente pochissimo allungato il processo trasverso.

Per quanto dissi, le deduzioni che Goette fa in base a questa costa rudimentale, non sono accettabili.

([1]) Hasse (Op. cit. *Besonderer Theil* vol. I, tav. I, fig. 9) crede che questa figura dimostri anche pei pesci la natura fibrillare della sostanza fondamentale della cartilagine.

([2]) Il luccio che mi presentò la struttura sopradescritta era stato mal conservato e mal preparato (decalcificato coll' acido cloridrico).

§ 3. *Corpo vertebrale.*

(Tav. III, fig. 5; Tav. IV, fig. 3, 5, 7, 10, 11 e 12; Tav. V, fig. 3 e 7)

Il corpo si sviluppa relativamente tardi, appunto come nel salmone e, cioè, verso l'epoca in cui la corda comincia a presentare i gozzi e gli stringimenti; anche sul luccio, nelle vertebre anteriori, esso compare prima che nelle posteriori.

È noto che nell'adulto consta essenzialmente del doppio cono e di un complesso di lamelle immediatamente dipartentisi da esso ed intrecciantisi l'una coll'altra, in ogni modo possibile ed immaginabile; queste lamelle sono nel cavo che vien a trovarsi all'esterno del doppio cono; là dove l'incavatura è più profonda (parte media della vertebra), naturalmente esse sono in numero maggiore. Dapprima sono appena accennate ed in piccolo numero. In individui di 15^{cm} sono già molto numerose ed estese.

Alcune delle lamelle, che si trovano tra l'arco superiore e l'inferiore, prolungandosi molto, danno origine agli speciali processi laterali, che si trovano in una parte delle vertebre del luccio adulto; questi processi non si preformano dunque cartilaginei; lo che è importante a ritenersi.

Forse non è disdicevole che io qui intrattenga per un momento il lettore sulle ossa del luccio.

In principio il tessuto del doppio cono è sostanza osteoide uniforme e senza canalicoli; poscia il doppio cono cresce sviluppando una sostanza che, a prima giunta, ha una certa somiglianza colla dentina; in realtà però essa è fatta di lamine concentriche e traversate da fibre disposte radialmente; queste fibre sono appiattite; intorno a ciascuna di esse, alle volte mi parve evidente una stretta lacuna. Queste fibre radiate, in alcuni punti, sembrano prolungate nel periostio tra gli osteoblasti. Dove il doppio cono è sottile (parte centrale della vertebra), la sostanza osteoide riconoscesi amorfa senza traccie di queste fibre radiate; eguale aspetto hanno le lamelle. Di cellule ossee nessun vestigio, nè qui, nè sul doppio cono. Dove le lamelle s'allungano, o dove sorgono nuove lamelle, gli osteoblasti si dispongono in uno strato quasi a guisa di epitelio.

Questi fatti ho verificato in individui lunghi da 10-20^{cm}.

L'osso del corpo vertebrale, al tronco e nelle ultime vertebre caudali, mantiensi, anche nell'adulto, diviso da quello degli archi. Involge però la base cartilaginea degli archi, per modo che tagliando trasversalmente una vertebra, compare in forma di croce di Malta. È molto piccolo il tratto, che divide la sostanza osteoide del corpo vertebrale da quella, che involge la parte distale della cartilagine dell'arco; la cartilagine, in corrispondenza al piano segnato da questa interruzione dell'osso, è per lo più caratterizzata per abbondantissime cellule con poca sostanza intercellulare.

In un individuo di circa 16^{cm}, agli archi inferiori, nel piano in discorso, la cartilagine presentava in parecchi punti delle lacune; parea che in questo piano l'arco dovesse bisecarsi. Almeno in parecchie vertebre del tronco di un individuo adulto, i processi presentavansi interi e senza traccia delle or cennate lacune.

Alla regione anteriore e media della coda, regioni in cui, come sopra ho detto, si sviluppa poca cartilagine, l'osso del corpo vertebrale si fonde con quello degli archi sì dorsali che ventrali.

Queste disposizioni spiegano, perchè cocendo un luccio adulto, gli archi del tronco e della parte posteriore della coda (osso e cartilagine) si stacchino dal corpo vertebrale, lasciandovi le loro impressioni; e perchè questa separazione non accada per le vertebre della parte anteriore e media della coda.

Su due individui m' avvenni a fatti singolari. In uno, alla parte posteriore del tronco ed a quella anteriore della coda, nel doppio cono, frammezzo alla sostanza osteoide, ho trovato un tessuto che giudico cartilagineo. Lo stesso fatto ho riscontrato in un punto della regione critica d' un altro individuo; con questa singolarità erane comitata un' altra degli archi, di cui, cioè, due superiori d'uno stesso lato eran fusi insieme; io non sapeva segnare dove una vertebra finiva e dove cominciava l'altra, chè il cono d' una vertebra si perdeva in quello contiguo dell' altra vertebra senza interruzione. Là dove trovavasi la cartilagine nel doppio cono, la membrana della corda era molto ispessita, come accade nelle regioni intervertebrali. La membrana ed il tessuto della corda erano normali. Anche nel primo caso eranvi senza dubbio associate anomalie simili a quelle che ho descritte in questo secondo; ma per un accidente molte sezioni andarono perdute, sicchè non posso fornirne più minuti ragguagli.

Le cellule cartilaginee, nel secondo caso, erano molto abbondanti e formavano quasi un anello completo, ma non molto regolare, racchiuso, siccome dissi, nello spessore della sostanza osteoide.

Noterò che un tessuto simile si trovava anche al punto d' onde dipartivasi l'apofisi spinosa dagli archi inferiori delle prime vertebre caudali.

Il luccio, che forma soggetto del primo caso, aveva vissuto un paio di mesi in un acquario; ma per qualche settimana appena quello del secondo caso.

È quistionabile se i cennati fatti esprimano un'anomalia, oppure se debbansi ripetere da una frattura riparata con cartilagine; che siano normali, è improbabilissimo.

Note storiche.

Gli osteoblasti, di cui ho sopra parlato, dimostrano sempre più, quanto sia falsa l' idea di Goette che il doppio cono derivi dall' elastica esterna. Non posso accoglier la sua distinzione del corpo vertebrale in parte primaria (doppio cono p. d.) e secondaria (lamelle intrecciantisi in vario modo); non posso neppur pregiare la distinzione da lui stabilita tra i ciprinoidi e il luccio; la verità è che nei ciprinoidi si sviluppano poche lamelle, molte invece nel luccio; sicchè havvi una differenza di proporzione, ma non d'ordine.

Negli spazî tra le lamelle Goette notò un connettivo « ohne wahrnemhbaren Zellen »; ciò dimostra quanto insufficienti dovevano essere i preparati, con cui architettò le sue singolari idee intorno allo sviluppo della colonna vertebrale.

§ 4. *Reste.*

(V. Tav. IV, fig. 16)

Per quel ch' io ho veduto, le reste nel luccio si sviluppano più tardi che le coste, appunto come nei ciprinoidi. In individui di 3-4^{cm}, ho trovato le reste oblique dorsali formate da un sottile bastoncino di sostanza osteoide, la quale, come nell'adulto, è in continuazione diretta con quella che involge l'arco vertebrale superiore.

Ho potuto rilevare le altre reste soltanto in individui di 4-5^{cm}. In complesso, queste mostravano costruttura similissima a quella delle oblique dorsali, che ho dianzi cennate; in qualche sezione però, alla parte centrale, mi pareva di veder qualche nucleo; il tessuto cartilagineo però era senza dubbio assente.

Forme, che forse debbonsi giudicar nuclei, ho incontrato qua e là nell'asse di reste di individui adulti. In complesso, in questi le reste sono a sezione trasversale, elittica-circolare; correttura nulla alla parte periferica di una tale sezione possono riconoscersi dei canalicoli, sul cui decorso non sono perfettamente in chiaro, e m'è noto soltanto che sono prevalentemente obliqui longitudinali, e, se sono un po'ampi, racchiudono cellule fusiformi di varia lunghezza. La parte centrale della sezione, o non presenta alcun canalicolo, od appena traccie; talvolta è evidentemente fatta di strati concentrici.

Queste reste sono involte da un connettivo fibroso a fibre disposte, se non m'inganno, come i canalicoli; tra queste fibre sono sparsi molti nuclei, lunghi e sottili; è a spese di questo tessuto che accade l'ingrossamento delle reste. Notisi ancora che, per quel che io ho veduto, esso non involge la resta in modo uniforme, ma si trova a preferenza da una parte della stessa; e precisamente là dove le cellule dei canalicoli sono più grosse, ed è in meno quantità la sostanza osteoide, che delimita i canalicoli. Per l'opposto, nella parte della resta, a cui corrisponde poco tessuto fibroso, questi canalicoli sono appena accennati e non contengono cellule.

Notizie storiche.

Anche nel luccio lo sviluppo delle reste non era stato ancora spiato.

C. Ciprinoidi.

Di questa grossa famiglia, ho esplorato non meno di dieci specie appartenenti a generi differenti (gobio, barbo, alburno, squalio, leucisco, fossine, rodeo); avendo trovato essenzialmente una forte uniformità di sviluppo, mi limito a darne una descrizione cumulativa.

§ 1. *Corda e sua membrana.*

(Tav. V, fig. 5; Tav. VI, fig. 1, 2, 4, 5, 6 e 8)

Nel primo stadio da me esaminato, la corda era già sviluppata senza che gli archi ed il corpo vertebrale fossero ancora accennati.

A questo tempo, la sostanza propria della corda è una colonna di cellule, grosse e vescicolari, circondata da uno strato periferico di cellule molto piccole ed estremamente piatte. Questo strato epitelimorfo è addossato alla membrana propria della corda, che è anista e molto sottile. Esternamente e a ridosso di questa, si

trova l'elastica esterna, delicatissima, a doppio contorno, amorfa, omogenea e molto rifrangente ; per lo più presentasi pieghettata. Alla sua superficie esterna stanno appicciate delle cellule molto piatte. Si può sospettare che queste cellule appartengano alla membrana in discorso; colle fine sezioni però si acquista la persuasione del contrario, quantunque meno facilmente che nel salmone e nel luccio, nei quali quest'elastica esterna è un po' meno sottile.

In questo stadio la corda sui tagli longitudinali presenta leggeri dilatazioni, specialmente in corrispondenza ai miocommi. Forse queste dilatazioni, non accompagnate da alcuna modificazione di struttura , sono dipendenti da contrazioni musculari.

Ad un periodo successivo, quando cioè gli archi sono già comparsi , notiamo un allargamento della sostanza propria della corda (che è fatta di cellule grosse specialmente alla parte centrale) in corrispondenza ai setti intermusculari, ossia là dove poggiano gli archi. Anteriormente a ciascun setto, la membrana propria della corda offresi più crassa (le cellule dello strato epitelimorfo qui sono più abbondanti); in questi stessi punti, al di là dell'elastica esterna, si nota uno strato di cellule cubiche con grosso nucleo.

Poco più tardi (in un periodo in cui è già accennato anche il corpo vertebrale) la sostanza propria della corda compare dilatata nelle regioni intervertebrali; quivi la membrana della corda presentasi pieghettata e piuttosto grossa; non è però meno grossa nella parte media della vertebra; invece mi parve assai ridotta in corrispondenza alle faccette. L' elastica esterna non ha punto mutato.

Fino ad un certo tempo la sostanza propria della corda cresce semplicemente, cioè senza speciali modificazioni; poco più tardi (alburni di 3-4^{cm}) comincia a alterarsi, ma in maniera alquanto differente, a seconda delle regioni in cui si osserva. Non voglio entrare in minuzie; mi basta soltanto di far rilevare : 1° che si formano delle cavità simili a quelle descritte pel luccio, ma molto meno estese; 2° che la sostanza propria della corda continua a crescere nelle regioni intervertebrali.

Le membrane della corda si comportano come nel luccio.

Note storiche.

Sulla corda dei ciprinoidi possedevamo appena alcune brevissime notizie di Giovanni Müller, di Gegenbaur e di Köllicher.

§ 2. *Archi.*

(Tav. V, fig. 12; Tav. VII, fig. 2, 4, 6, 7, 9 e 11; Tav. VIII, fig. 3)

Le prime cinque vertebre, nei ciprinoidi, pei loro archi meritano studio a parte, essendochè in esse sono sorvenute delle modificazioni speciali. Consideriamo un alburno di 25-30^{mm}.

La prima vertebra è assai corta; la parete ventrale del canale spinale risulta fatta da una sostanza cartilaginoide, la quale perdesi sulle di lui pareti laterali. Queste pareti laterali sono formate però, in gran parte, da due processi, o articoli, che sono separati dalla sopramenzionata sostanza cartilaginoide ed hanno la direzione solita degli archi superiori; sono appiattiti lateralmente; della metà prossimale, la parte posteriore è più grossa e fatta di cartilagine, la parte anteriore è

sostanza osteoide, perdentesi sulla superficie di questa cartilagine; la quale poggia sul doppio cono, ma non direttamente, sì bene coll' intermezzo di altra cartilagine, che le resta addossata ed è disposta a foggia di capsula, od acetabulo; la concavità di questo acetabulo accoglie l' estremo prossimale convesso della cartilagine dell'articolo, sicchè articolo ed acetabulo appaiono saldati insieme, ma la linea di saldatura è sempre chiara [1].

Alla parte ventral-laterale della vertebra, nel setto orizzontale che divide la musculatura dorsale dalla ventrale, incontrasi una spina di sostanza osteoide, che è in diretta continuazione col doppio cono della vertebra.

In individui più adulti di quelli in discorso, ho trovato dal lato ventrale della vertebra, due pezzi cartilaginoidi. Questi pezzi sono forse particolari ad alcuni tra i molti generi de'ciprinoidi.

L'articolo di cui sopra è parola, come può accertarsi con osservazioni di individui intieri, funziona da ossicino dell'udito, ossia da staffa (il claustro, a me pare si differenzi dal cranio).

Le condizioni della seconda vertebra (in individui ancora di 25-30^{mm}) non sono molto diverse; vi è un articolo superiore a forma piramidale; nella metà distale è fatto di sostanza osteoide; è cartilagineo nella metà prossimale, la quale riposa come quella dell'articolo della prima vertebra in un acetabulo cartilagineo. La sostanza osteoide della metà distale perdesi sulla cartilagine della metà prossimale, che così ne resta parzialmente involta; da questo involucro dipartesi uno sprone osteoide, sulla cui direzione non sono del tutto in chiaro.

L'articolo in discorso funziona come ossicino dell'udito (incudine). Questo articolo, come anche il primo descritto, sta alquanto discosto dal midollo spinale.

Dal lato ventral-laterale di questa seconda vertebra, si trovano due processi affatto simili a quelli della prima, ma un po' più grossi. Dal lato ventrale, almeno in certi generi, si trovano due corti archi cartilaginei, i quali possono anche fondersi insieme sulla linea mediana.

Nella terza vertebra, dal lato dorsale (sempre in individui di 25-30^{mm}) scorgiamo due archi (superiori), a base cartilaginea assai larga; archi simili (inferiori) si riscontrano anche dal lato ventrale. Perciò sui tagli trasversi di questa vertebra appare una croce cartilaginea. Tanto gli archi superiori quanto gli inferiori si prolungano in una spina osteoide.

Questi ultimi fungono da martello dell' udito. La sostanza osteoide della loro spina s'estende alquanto sulla cartilagine e non scopresi traccia del tessuto, che accenna all'articolazione delle coste (tessuto di cui dirò più innanzi); dobbiamo perciò giudicare indifferenti questi archi inferiori.

Noto infine che tanto gli archi inferiori che i superiori non si fondono mai coll'osso del doppio cono (v. più avanti).

Nella quarta vertebra (sempre in pesciolini di 25-30^{mm}) troviamo ancora archi superiori, a basi larghe, cartilaginee ed a punte osteoidi (le quali s' uniscono

[1] Qui ed altrove non discendo a minuzie istologiche, perchè i pezzi da me studiati non erano in buone condizioni.

per tempo in un'apofisi spinosa); similmente son costrutti gli archi inferiori. La loro punta osteoide però si divide in due processi, di cui l'interno congiungesi sulla linea mediana coll'omonimo dell'altro lato formando un'arcata per l'aorta. L'esterno invece si mette parallelo ed anteriore alla prima costa, di cui però resta a gran lunga più corto; esso ha evidenti rapporti colla vescica natatoria. Neppure in questi archi si può rinvenire il tessuto caratteristico dell'articolazione delle coste.

Anche gli archi di questa quarta vertebra, nè sono fusi, nè si fondono più tardi col corpo vertebrale.

Sui tagli trasversali di individui lunghi 5-6^{cm}, la vertebra in discorso appare circondata quasi da per tutto da cartilagine; però tra la cartilagine degli archi dorsali e quella dei ventrali, s'interpone una sottile lamella osteoide. Tra le singole basi cartilaginee degli archi dorsali, come pure tra quelle dei ventrali, vi è uno spazio più ampio e s'inframette maggior quantità di sostanza osteoide; quest'osso tramezzatore, come pure la testè menzionata lamella, sono in diretta continuazione col corpo vertebrale. Per tempo, anche gli archi superiori di questa vertebra, si fondono in un' apofisi spinosa, fatta di sostanza osteoide.

Nella quinta vertebra troviamo condizioni un poco differenti, ma gli archi sono a base cartilaginea. La cartilagine manca ad una parte della vertebra (posteriore). Soltanto posteriormente le basi degli archi superiori sono separate dalle basi degli archi inferiori con una lamella osteoide, che si diparte dal doppio cono; anteriormente la lamella scompare sicchè le basi si fondono insieme. Gli archi trasversi sono regolarmente forniti di coste.

In alburni di 4-5^{cm}, alle qui descritte cinque vertebre, non è accaduto altro che un ingrandimento di tutte le parti e la formazione di vero tessuto osseo.

In alburni affatto giovani (15-20^{mm}) la cartilagine è relativamente in minor quantità, e l'acetabulo cartilagineo degli archi superiori delle prime due vertebre è rappresentato da connettivo indifferente.

Mi rimane di descrivere le lamine, che coprono la parte dorsale del midollo.

In rapporto alle prime quattro vertebre, in individui da 30-60^{mm}, il canal spinale è coperto dalla parte dorsale e dalla contigua parte lateral-dorsale per mezzo di due tegole, che sono fatte di cartilagine, per gran parte ravvolta da un lievissimo velamento osteoide.

La prima tegola s'estende sulla prima e sulla seconda vertebra, è piatta e finisce posteriormente nel legamento vertebrale superiore, dividendosi in vari pezzi. La seconda tegola comincia con due pezzi laterali alla prima, press'a poco a livello della seconda vertebra; poco dopo copre interamente la superficie dorsale della prima tegola e finisce ridivisa in due pezzi; essa s'estende sulla terza vertebra e sovra parte della quarta.

Coi tagli trasversali si può avere una sezione della seconda, o della terza, o della quarta vertebra, in cui la cartilagine forma un anello attorno al midollo spinale. La cartilagine degli archi superiori m'apparve però sempre separata da quella delle tegole, almeno per mezzo di una sottilissima lamella osteoide.

Tra il midollo e la seconda tegola s'interpone il legamento vertebrale superiore; il quale si continua indietro per tutta la colonna vertebrale.

Nessun indizio che queste due tegole risultino di pezzi pari e fusi insieme sulla linea mediana longitudinale. Almeno la seconda di esse porta un processo spinoso largo, piatto, di sostanza osteoide, e che io non so descrivere più minutamente.

Esiste ancora un altro pezzo, del quale non riuscii a formarmi un'idea chiara; esso è collocato lateralmente alla prima tegola, con cui, almeno in qualche punto, sembra fuso; esso è in parte osteoide.

Nell'adulto, Augusto Müller ha descritto due ossa in corrispondenza press' a poco alle prime tre vertebre; uno s'estende sulla prima e su parte della seconda vertebra e copre il canal spinale; è piatto e senza spina; l'altro copre la terza vertebra (sta, cioè, sulla parte posteriore della vertebra risultante dalla fusione della seconda colla terza); esso porta una grossa spina dorsale-posteriore. « Beide Knochen » continua Müller, « verbinden sich durch Näthe und bleiben trennbar. « Der vordere berührt sogar die Dorsalstrahlen der zwei ersten Wirbel, den Steigbü- « gel und Ambos gar nicht, und hält sich nur durch die Verbindung mit den « zweiten dieser Knochen und durch die Dorsalstrahlen des 3e Wirbels ».

Evidentemente queste due ossa sono derivate dalle tegole sopradescritte. Ma per completare quest' argomento, bisognerebbe discendere a minuzie, che non credo di questo luogo [1].

Ora possiamo continuare la descrizione degli archi nel resto della colonna vertebrale. (Tav. V, fig. 6, 9, 10, 11, 12, e 13; Tav. VI, fig. 3 e 7; Tav. VII, fig. 1, 3, 5, 8 e 10; Tav. VIII, fig. 1, 2, 4, 5 e 6).

In generale si può ritenere che i superiori, eccetto quelli della parte posteriore della coda, hanno origine senza preformarsi come cartilagine; vero è che su qualche arco in svariati punti, qualvolta vidi due-tre cellule, accoste l'una all' altra, che si potevano forse sospettar cartilaginee; nella maggior parte degli archi però manca affatto qualunque accenno cartilagineo. Ugualmente si sviluppano gli archi inferiori, alla parte anteriore e media della coda.

[1] Riunisco ciò che riguarda l'organo dell'udito.

Tre ossicine, che congiungono il labirinto membranoso alla vescica natatoria sono verosimilmente derivate dalle porzioni distali degli archi superiori della prima e della seconda vertebra, e dall'arco inferiore della terza.

Una nota storica.

A. Müller (1853) ha indicato la significazione morfologica delle ossicine dell'udito nei ciprinoidi. Non ostante che i suoi asserti non fossero convalidati da sezioni, e la storia dello sviluppo da lui indicata fosse incompleta, le conclusioni erano almeno verosimili; eppure tutti, cominciando dal Reissner (1859), le dimenticarono; e si credette che le ossicine in discorso fosser coste modificate; chi fu il primo a metter fuori questo errore, io non lo so.

Alla fine dell'anno passato, Nussbaum (*Zool. Anz.* 1881, p. 552) ritornò sulla quistione; non conobbe Müller e vide meno bene di lui. Ecco infatti le parole di Nussbaum: *der erste Wirbel hat einen schmalen Körper und kleine normale Rippe* (sic); *die obere Bogen dieses Wirbels aber sind in Stapes und sein Processus spinosus in Claustrum umgestaltet*; ... *der zweite Wirbel besitzt normale Rippen und seine obere Bogen stellen die paarige Gehörknochelchen* (*Incus*) *vor, von welchen der Processus spinosus ganz getrennt ist. Der dritte Wirbel hat normale entwickelte obere Bogen und Processus spinosus*; *seine Rippe aber sind in grosse paarige halbmondförmige Gehörknochelchen (Incus) verwandelt.* Anche la quarta vertebra, secondo Nussbaum, ha coste normali.

Queste conclusioni, a quanto sembra, sono dedotte da grossolane osservazioni di scheletri adulti.

Al tronco i processi trasversi preformansi cartilaginei, e sono relativamente più grossi che gli archi inferiori alla coda ed i superiori al tronco ed alla coda.

Gli ultimi processi trasversi ed anche alcuni di quelli, che portano coste affatto normali, possono svilupparsi senza preformarsi cartilaginei.

Un motto sull'epoca dello sviluppo: negli individui schiusi di recente, non ho potuto rilevare alcun accenno degli archi; la musculatura però è già divisa in miocommi (tranne la parte posteriore della coda) e in sezione dorsale e ventrale.

Lasciando da parte gli ultimi archi caudali ed i primi dorsali, sui quali le mie osservazioni non sono sufficienti, posso dire che negli individui schiusi da 10-15 giorni si trova di già un numero più o meno grande di archi superiori, ed è possibile determinare che essi vanno sviluppandosi dall'avanti all'indietro.

A quest'ultima regola si giunge col confronto d'individui, che sono d'una medesima specie e presentano un numero differente di archi; quelli mancanti sono sempre i posteriori e di quelli presenti, i posteriori sono i più piccoli (ossia le dimensioni degli archi vanno decrescendo dall'avanti all'indietro).

Che gli archi superiori della regione della coda si sviluppino prima degli inferiori, egli è cosa certa. A me pare certo che ciò accada anche al tronco. Un periodo in cui vi siano gli archi tutti senza alcuna costa, non venne da me verificato.

Le seguenti osservazioni sono fatte soltanto su individui rischiarati colla potassa.

Mi sono caduti sott'occhio degli individui, che non presentavano alcun arco superiore in corrispondenza alle future prime cinque vertebre; erano invece presenti i sei seguenti ed i pezzi così detti ipurici (tutti?); pare che gli ipurici si sviluppino prima degli archi. Nella coda gli archi superiori a base cartilaginea (od almeno i più anteriori di essi) si sviluppano prima di quelli della parte media; accade perciò di trovare un' interruzione negli archi della coda, ossia alcune vertebre della parte media della coda senza archi superiori.

Le basi degli archi superiori nel tronco occupano la parte anteriore del corpo della vertebra. Come negli adulti, questi archi sembrano relativamente gracili. Al loro primo apparire sono micolini microscopici, risultanti di sostanza osteoide, e stanno innicchiati nel connettivo giovane, che sta tra la corda, il midollo ed i miocomma. Per tempo, verso la base, dal lato che viene ad essere anterior-superiore, emettono una sorta di sprone, che resta sempre continuo col relativo arco; lo sprone va crescendo; ben presto, benchè piccolo, riproduce interamente la disposizione che tiene nell'adulto, cioè dire quello di un lato converge con quello del lato opposto, dirigendosi amendue verso la linea mediana dal basso all'alto e dall'esterno all'interno; quello d'un lato in generale non tocca quello del lato opposto [1].

Di fronte a questo sprone (il quale, come ho accennato, si trova nella parte anteriore della vertebra) si sviluppa dalla parte posteriore della vertebra, ancor negli individui molto giovani, una punta osteoide [2].

Tra le punte d'una vertebra e gli sproni di quella seguente, si forma una sorta di legamento.

[1] Questi sproni nell'adulto si trovano molto sviluppati là dove i processi trasversi non hanno più coste, o le hanno già rudimentali; in complesso sono in gran riduzione nella coda.

[2] Già nei giovani, come nell'adulto, essa è più prominente là dove lo sprone è più sviluppato.

Gli archi superiori convergono e si congiungono assai presto in un processo spinoso ([1]). Questo comincia press'a poco al livello, dove gli sproni finiscono. Gli archi formano così un canale chiuso; che è situato press'a poco davanti a quello formato dagli sproni e non chiuso (perchè le estremità distali degli sproni non si toccano, come ho già detto). Il canale degli sproni è quasi perpendicolare rispetto alla colonna vertebrale; il canale degli archi è invece obliquo, sicchè quasi tocca il primo, là dove comincia l'apofisi spinosa.

Archi e sproni raggiungono una grossezza relativamente considerevole, senza presentare alcuna cellula ossea. Specialmente in individui giovanissimi, la loro superficie presentasi aspra.

Gli archi trasversi, su ciprinoidi lunghi 4-5^{cm}, in proporzione, sono molto voluminosi; vanno però decrescendo andando dalla quinta vertebra all'indietro. Alla quinta, com'ho detto, la cartilagine dei processi trasversi fondesi con quella degli archi superiori; nella vertebra seguente, in complesso, essa si mantiene poco distante dagli archi superiori; nelle vertebre successive, essa, la cartilagine, va man mano riducendosi dal lato dorsale, sicchè pare che a poco a poco si porti dal lato dorsal-laterale al lato ventrale.

Oltrechè trasversalmente, la cartilagine del processo trasverso, nelle vertebre anteriori del dorso, s' estende molto anche nel senso della lunghezza; più ci spingiamo posteriormente, più lo spazio della vertebra, occupato dal processo trasverso, va scorciandosi dall' indietro verso l' avanti ; sicchè una certa parte posteriore della vertebra (parte sempre maggiore, più posteriori sono le vertebre in cui si osserva) ne rimane scoperta. Perciò anteriormente risulta un grande contrasto fra le dimensioni dell'arco superiore e quelle del processo trasverso, contrasto che va scomparendo a poco a poco, procedendo dalle vertebre anteriori alle posteriori.

I processi trasversi (qui non comprendo quelli della regione critica, di cui parlerò più sotto) al loro nascere sono semplicemente cartilaginei; per un certo tempo ingrandiscono in ogni direzione; presto però comincia un periodo (individui lunghi 4-5^{cm}), in cui la cartilagine, nella parte che guarda le coste, a quanto sembra, va distruggendosi; così che la cartilagine, la quale nel suo complesso prima era paragonabile ad un capezzolo, ora assume la forma di una tafferia. Più l' individuo si allunga, vieppiù cresce la vertebra e vieppiù dilatasi la tafferia. Una simile disposizione ho trovato evidente anche in individui adulti. Un altro fatto però ben presto diventa chiaro, ed è che le cellule cartilaginee vanno disparendo dalla parte di cartilagine, che è contigua al doppio cono (corpo vertebrale).

In principio tra gli archi superiori ed i processi trasversi esiste una divisione netta; già in alburni di 4-5^{cm} però, come nell'adulto, dalla base dell'arco superiore parte una lamella ossea che si dirige verso il processo trasverso; da cui essa resta però divisa per mezzo di un corto legamento fibroso.

Gli archi inferiori alla coda sono affatto simili ai superiori; hanno essi pure uno sprone; dalla parte posteriore del corpo vertebrale si diparte ancora un piccolo processo parallelo allo sprone, appunto come nella parte dorsale.

([1]) Per capire questa descrizione è utile avere sottocchi uno scheletro d'un ciprinoide.

Alla regione critica, le differenze specifiche e le varietà individuali dei processi trasversi sono comunissime.

In complesso gli ultimi processi del tronco vanno man mano allungandosi, e si preparano a formare veri archi inferiori. Questi processi, che possiamo denominare critici, per lo più nascono già osteoidi; sono relativamente sottili e limitati alla parte anteriore del corpo della vertebra. Senza formare delle vere apofisi spinose, per lo più si riuniscono, ma in vario modo, sicchè possono dar luogo ad arcate di varia figura. Queste riunioni accadono per tempissimo (per es. le ho riscontrate in alburni di 15^{mm}) e permangono nell'adulto. Il numero dei processi così congiunti e la forma dell'arcata risultante varia colla specie e coll' individuo. L' oscillazione del numero non è mai grande; in complesso posso dire che in 1-2 paia d' archi critici che vengono subito dopo quelli non uniti, accade la riunione per mezzo d'una sbarra trasversale; succedono quindi 1-2 arcate che si potrebbero denominare a corda rilasciata; infine altre (1- raramente 2) ad angolo acuto, spesso la prima apofisi spinosa è corta.

I primi archi trasversi, che non portano più coste normali, o che non ne portano affatto, possono spuntare osteoidi, oppure a base cartilaginea; quelli osteoidi sono più, o meno incavati alla base.

Nei gobii, costantemente, alcuni degli ultimi archi trasversi, che portano coste normali, non si preformano cartilaginei.

In tutti i ciprinoidi (su individui di 4-5^{cm}) non è raro che da una parte siavi un arco trasverso cartilagineo, con costa normale, e dall'altra un arco trasverso più lungo e di sostanza osteoide, tranne un piccolo nucleo cartilagineo al centro della base. Se qui più tardi si sviluppi una costa, non posso dire; certo è che manca quel tessuto che caratterizza il punto dell' unione delle coste ai processi trasversi (v. più avanti).

Certi scheletri d'individui adulti mi presentarono la stessa asimmetria; sfortunatamente però non erano stati allestiti a dovere.

Noto qui, per incidenza, che i portapinne sì dorsali che ventrali, si preformano sempre cartilaginei.

Resta a parlare degli archi alla regione posteriore della coda.

In un certo numero di vertebre caudali posteriori (variabile, ma di poco a seconda della specie e fors'anco dell' individuo) la base degli archi si preforma cartilaginea. Venendo dall' avanti all' indietro, la cartilagine, nei primi archi in cui compare, si mantiene scarsissima (alcune cellule); i seguenti ne hanno press' a poco la stessa quantità, i terzi un po' di più, un po'di più i quarti; in complesso però è sempre in pochissima quantità, e pare che negli archi anteriori (vale a dire, dov'è più scarsa) essa venga assorbita per tempo. Va crescendo per contrario, negli archi modificati per servire la pinna caudale.

Per maggior chiarezza riporto la descrizione della parte posteriore della coda in un alburno (probabilissimamente lucido) di 35^{mm}.

Ad una vertebra con archi superiori e inferiori, del tutto osteoidi, ne segue una con archi, che alla base presentano un piccolo nucleo di cartilagine. La sostanza osteoide, che forma la maggior parte dell' arco, riveste questo nucleo e (probabilmente

già a questo periodo, od almeno senza molto indugio) si perde fondendosi col corpo della vertebra.

La vertebra, che viene appresso, è affatto simile.

La seguente (terz'ultima) ha simili tanto gli archi superiori, quanto gli inferiori, colla piccola differenza che questi ultimi, in confronto cogli archi inferiori della vertIbra antecedente, hanno più cartilagine.

La penultima è conforme alla terz' ultima per gli archi superiori; gli archi inferiori invece sono ricchi di cartilagine, anzi quella dell'uno è congiunta e confusa con quella dell'altro nella parte anteriore della vertebra. La sostanza osteoide dell'arco non è fusa (e non si fonde mai) con quella della vertebra.

All'ultima vertebra s'attaccano tre archi inferiori. Il primo, come di regola, è pari ed è fabbricato a mo' del precedente, tranne che la fusione vicendevole degli archi ha maggior estensione. Gli altri due si danno a vedere impari; onde sembra che si dipartano dalla vertebra soltanto apofisi spinose cartilaginee e con base ampia. In realtà vuolsi ammettere, che ciascuno di questi tre pezzi filogeneticamente risulta dalla fusione di archi pari, cioè di due archi corrispondenti, l' uno da un lato e l'altro dall'altro.

Rammento qui che nei ciprinoidi (tutti?) adulti, fino alla quart'ultima vertebra compresa, le condizioni sono regolari, ossia come nella parte media della coda. Deduco, che in una, o due vertebre regolari della coda, è certa la presenza di archi con un po' di cartilagine.

Le apofisi spinose fatte dagli archi inferiori della terz'ultima e penultima vertebra e dal paio anteriore dell' ultima, come pure quelle fatte dagli archi superiori della penultima e dell' ultima (?), sono cartilaginee con incompleto involucro osteoide.

Nella penultima ed ultima vertebra di individui giovanissimi (15-20^{mm}), gli archi superiori ed inferiori e le loro apofisi possono presentarsi interamente cartilaginei, sicchè quando se ne ha sott'occhio una sezione, non si può dire se è di salmone, ovvero di ciprinoide.

In individui di 5-6^{cm}, egli è facile rilevare che la cartilagine delle apofisi spinose delle ultime vertebre è ravvolta di sostanza osteoide tranne che alla punta, ossia è in una condizione simile a quella delle coste.

Toccherò alquante cose sulla parte della colonna vertebrale modificata per la pinna caudale; si noti che nelle mie ricerche ho avuto di mira lo sviluppo della colonna vertebrale, piuttosto che le condizioni speciali della pinna caudale.

Gli archi superiori dell' ultima vertebra sono corti e s' uniscono in una breve apofisi spinosa lanceolare; questi archi e la loro apofisi spinosa nell' embrione sono interamente cartilaginei. Sovra una linea corrispondente al prolungamento ideale dell'apofisi lanceolare, nell'adulto si trova un lungo pezzo libero (falsa spina), che decorre press'a poco parallelo alla corda; esso ha cartilaginea quell'estremità, che è più lontana dall'apofisi lanceolare. Neppure nell' embrione la falsa spina è addossata alla corda, ma è però del tutto cartilaginea; si sviluppa prima dei « zwei paarige schräg « nach hinten und nach oben gerichten Knochenbalken, welche die Funcktion und

« wohl auch die Bedeutung der grossen Deckstücke besitzen, die beim Lachs diese « Stelle einnehmen (sie fassen nähmlich den Endfaden zwischen sich). (Lotz) » (¹).

Non si conosce il valore morfologico della falsa spina; potrebbe rappresentare tanto archi fusi insieme, quanto un osso interspinale.

Vengo ora al filo terminale della colonna vertebrale.

Così come segue, l'ho trovato in un individuo (probabilmente alburno lucido) di circa 35^{mm}.

All' estremità si trova, in certo modo, una corta doccia cartilaginea a concavità verso l'alto; essa accoglie il canale midollare; a questa doccia se ne aggiunge subito (descrivo andando dall' indietro all' avanti) un' altra in senso inverse, sicchè il canale midollare vien chiuso in un anello fatto dall' unione (fusione?) delle due doccie, dorsale l' una e ventrale l' altra; nel centro della metà ventrale dell'anello (la quale è più spessa di quella dorsale) termina la corda. Appena un po' più avanti viene a mancare la parte dorsale dell'anello stosso che si riduce così ad una doccia contenente nella sua parete la corda. Subito anche la parte ventrale della doccia scompare, onde restano appena due processi laterali dorsali alla corda, in mezzo ai quali riposa il canale midollare; la corda si è così liberata dalla cartilagine. Per quanto esposi, si possono ottenere sezioni trasversali in cui soltanto la corda è involta interamente da cartilagine, sezioni trasversali in cui sono due anelli cartilaginei, uno per la corda e l'altro pel canale midollare ed infine sezioni in cui la corda non è più presente e si trova invece una doccia cartilaginea per il canale midollare (questo canale midollare si continua ancora al di là del punto dove finisce la corda).

La corda finisce appuntata e molto sottile.

Probabilmente la descrizione del filo terminale da me data, non è in tutto e per tutto applicabile ad ogni ciprinoide; le differenze però devono essere molto piccole.

Secondo Kölliker e Lotz, nei carpioni e nei barbi adulti, l'estremità posteriore della colonna vertebrale non contiene canale spinale e consta di un canale cartilagineo, che racchiude la corda. Le loro ricerche però se io non m'inganno, non sono abbastanza soddisfacenti.

NOTE STORICHE

I punti essenziali si trovano nel lavoro di Müller, che però, siccome non è basato sovra sezioni, così non è del tutto convincente.

Dopo Müller, s'occupò dei ciprinoidi Kölliker (1864-1865). Questi scrive: « nach « meinen Erfahrung an 2″ langen Individuen von Chondrostoma Nasus und 1½″ langen « Exemplare von Cyprinus Carpio, müssen auch bei den Cyprinoiden ursprünglich « Knorpelstrahle dagewesen sein, denn es enthalten noch bei Individuen der ange- « benen Grösse sowohl die Rippen und die unteren Bogen als auch die oberen Bo- « gen inneren ganz deutlich eine verkümmerte Knorpelstrahl ».

In molti altri generi di ciprinoidi da me studiati questi fatti non si verificano, e ciò forse giustifica i forti dubbi, da parte mia, sull'accuratezza di queste osservazioni di Kölliker.

(¹) Pag. 7, op. cit.

Il prof. Goette nella foga di difendere le proprie opinioni, fa dire ad A. Müller uno sproposito che, cioè, « bei jungen Cyprinoiden nur die zur Schwanzflosse « gehörigen unteren Bogen ganz knorpelig, an den übrigen caudalen aber nur die « Basis ebenso, den eigentlichen Körper derselben aber gleich knöchern angelegt (!) ». Di Köllicher, Goette non si ricordò.

§ 3. *Coste.*

(Tav. IV, fig. 4; Tav. V, fig. 2; Tav. VI, fig. 3 e 7; Tav. VII, fig. 8; Tav. VIII, fig. 1, 2 e 6).

Negli individui lunghi 10-20^{mm}, si vede che le coste vanno sviluppandosi dall' avanti all' indietro, appunto come i processi trasversi, che loro offrono appoggio. Le anteriori sono più grosse e più lunghe. Al loro nascere sono cilindriche ([1]) e stanno al limite dei setti intermusculari col peritoneo.

In giovani, resi trasparenti colla potassa, il primo accenno della costa è un corto aciculo osteoide sottile, delicato ed amorfo. Non si può vedere il processo trasverso, ma, giudicando dalla posizione dell'aciculo, si può credere che quest'ultimo si sviluppi alquanto discosto dal punto, dove si forma l' articolazione; talvolta (in corrispondenza alle future coste posteriori), invece d'un aciculo, se ne vedono parecchi, a piccola distanza l'uno dall'altro. Accertare questi fatti colle sezioni, non è impresa leggera ed io non l'ho tentata.

Egli è in ogni modo certo che già su individui giovanissimi, in cui si sono sviluppate appena poche coste, queste sono lunghi bastoncini osteoidi, uniti al processo trasverso per mezzo di un connettivo embrionale, che tende ad assumere carattere di procondrio.

Ad un periodo più inoltrato, questo connettivo si trasforma in cartilagine simile a quella dell'arco trasverso (cioè con sostanza fondamentale scarsissima e facilmente colorabile); forma una specie di bernoccolo, sul quale s'adatta l'estremità della costa osteoide, che presentasi perciò concava.

Questo bernoccolo mirasi ancora in individui di 3-4^{cm}; il tessuto, che lo forma, è immutato nella parte sua prossimale, invece nella sua parte distale, la sostanza fondamentale non si colora più, intensamente come prima ([2]).

Più tardi quando la cartilagine degli archi trasversi, nella parte distale, va struggendosi, esso, il bernoccolo, viene ad essere diviso dalla cartilagine dell'arco; le trabecole ossee che si formano sull'arco trasverso, si mettono in rapporto coll'osso delle coste, che va sempre più sviluppandosi; rimane però sempre una linea divisoria fatta di semplice connettivo; questa linea sfiora l' estremità prossimale del bernoccolo e si estende a separare l'osso dell'arco da quello della costa.

È un po' prima di questi ultimi avvenimenti, che comincia a formarsi il vero tessuto osseo. Nelle coste scalcificate di individui un po' grossi, si vede ancora un filo centrale fatto di sostanza osteoide e variamente contorto: appunto quel filo onde constavan le coste prima della formazione del tessuto osseo.

Contemporaneamente, o quasi al nascere delle cellule ossee, all'estremo distale,

([1]) Nell'adulto le coste sono piatte press'a poco nel senso antero-posteriore.

([2]) Nell'arco trasverso la sostanza fondamentale non si colora intensamente ed è relativamente abbondante, s'intende in individui di 3-4cm.

delle coste, compare la cartilagine; questa cartilagine è più, o meno abbondante; d'ora in avanti la costa cresce preformandosi cartilaginea, ossia come quella del salmone e del luccio.

Talvolta la sostanza osteoide, come ho già notato per questi ultimi pesci, soppianta la cartilagine, che perciò si presenta interrotta.

In complesso, per lo meno finchè l'individuo ha 7-8^{cm} di lunghezza, troviamo la quantità di cartilagine sovra una sezione trasversa tanto più abbondante, quanto più ci avviciniamo all'estremo distale della costa.

Le ultime coste, in individui di 5-6,^{cm} possono essere piccolissime, del tutto ossee ed unite al processo trasverso per connettivo fibroso.

Le anomalie in queste ultime coste sono assai frequenti, come ho già accennato.

Note storiche.

In argomento vi sono appena alcune osservazioni di A. Müller e di Kölliker. Kölliker venne già da me citato; A. Müller scrive: « in und an den Rippen selbst « könnte ich keinen Knorpel auffinden ».

§ 4. *Corpo vertebrale.*

(Vedi Tav. VI, fig. 2, 4 e 5; e Tav. VII, fig. 1).

Risulta essenzialmente dal doppio cono e, a differenza di quel che succede nel salmone e nel luccio, la sua apparizione è press'a poco contemporanea a quella degli archi; gli archi, che si sviluppano a dirittura osteoidi, mi parvero fusi insieme con esso, già al loro cominciare. Invece gli permangono soltanto contigui i processi trasversi.

Inizialmente questo corpo vertebrale consta di sostanza osteoide. Il tessuto osseo, che più tardi gli si sovrappone, ha le cellule in direzione trasversale. Nella cavità esterna formata dal doppio cono, ancora quando questo è osteoide, sorgono delle lamelle del pari osteoidi. Originalmente alla coda esse sono in numero di sei, due dorsali, due ventrali, una laterale destra e l'altra laterale sinistra. Corrono perpendicolarmente alla lunghezza della vertebra e qualche volta si biforcano. Crescono col crescere dell'individuo, acquistano vero tessuto osseo e si dividono in lamelle secondarie.

Gli spazî tra le lamelle sono occupati da connettivo adiposo.

Al tronco le lamelle ventrali sono molto evidenti; almeno in molta parte lo sono anche le dorsali. Lo sono meno invece le laterali, che inoltre variano di forma, si suddividono ecc. Esse stanno a quel livello in cui un legamento fibroso (vedi più indietro) unisce la lamella verticale discendente dall'arco superiore (¹) al processo trasverso.

Tutte queste lamelle si sviluppano per tempo, quando il bernoccolo cartilagineo delle coste tocca ancora la cartilagine dell'arco. Perchè altre lamelle primarie non si formano, e queste che ho descritte, per quanto s'ingrandiscano e si suddividano, non vengono ad estendersi che ad una piccola parte del doppio cono, ognuno capisce come nell' adulto i corpi vertebrali vadano in generale forniti di grandi e profonde cavità occupate specialmente da tessuto adiposo.

(¹) Essa è fusa colla lamella dorsale e col doppio cono vertebrale.

Note storiche.

Goette ha veduto le cose ben diversamente di me. Egli distingue nei teleostei parecchi tipi di formazione delle vertebre ed osserva che « die einfachste Bil-« düng bestehet darin dass der primäre knöcherne Wirbelkörper durch periostalen « Knochenablagerung concentrische gleichmässig wächst. Zugleich verknöchern die « darin eingeschlossenen Bogenbasis und verschmelzen mit den knöchernen Doppel-« kegel zu einer Masse ». Trovò questo nel *Leuciscus alburnus*, le cui vertebre sono « knöchern und solide ... wie schon längst bekannt ist ».

Io non so trovare una concordanza tra le osservazioni di Goette e le mie. Questi nega anche l'esistenza delle lamelle, come ho già accennato a proposito del luccio.

D. Di alcuni altri Teleostei.

Raccolgo in questi capitoli parecchie notizie che ho spigolato nella letteratura.

I. Kölliker (1860) notava che nel *chaulodius* e nello *stomias* vi sono archi cartilaginei. Gegenbaur (1862) confermava questi fatti ed aggiungeva che si verificano anche negli *sternoptyx*; qui però a differenza dei primi (i quali si comportano come il luccio) le basi degli archi non vengono racchiuse nel corpo vertebrale, « sondern finden sich mit breiter Basis nur angefügt ».

II. Le osservazioni di Goette sull'anguilla bastano a convincerci che questa forma non si allontana da quelle da me studiate, se non se per il grado di riduzione della cartilagine; sotto quest' ultimo aspetto si può dire che essa si avvicina più ai ciprinoidi che al luccio.

III. Debbo qui riportare quanto Goette ha pubblicato sul ciclottero, sul chironetto e sul monacanto.

Egli osservò ciclotteri giovanissimi, ma verosimilmente con vertebre sviluppate già per intero. « Von Cyclopterus sagt schon Stannius, dass seine Wirbelkörper aus « dünnen Knochenlamellen mit weicher Masse in den Zwischenräumen gebildet wären. « Ich finde an diesem Fisch unter den radiären Leisten vier schräge, welche regel-« mässig in die freien Bogentheile auslaufen, und um so gewisser auf die ursprün-« glichen Bogenbasen zu beziehen sind, als sie gelegentlich getrennte Knorpelreste « einschliessen. Zwischen den Leisten liegt eine Bindesubstanz mit kleinen runden « Zellen und einer knorpelartig festen hellen Grundsubstanz. — Bei Chironectes, « fehlten die Knorpelreste der Bogenbasen, dagegen waren die Zellen der knorpelartigen « Bindesubstanz viel deutlicher . . . . . Einige ebenfalls junge Exemplare von Monacan-« thus penicilligerus besassen das vollkommenste Gerüst von zarten radiären und sie « verbindenden koncentrischen Knochenlamellen, zwischen denen überall ein sehr « schöner klarer Hyalinknorpel lag. Die Wirbelbogenbasen waren in dieser Masse « meist ganz spurlos aufgegangen; nur ganz vorn hatten sie sich wenigstens oben « ganz so deutlich wie bei Esox erhalten. Ganz ähnlich verhielten sich einige junge « Diodon, nur war der Hyalinknorpel weniger klar ». In forza di questi fatti potrebbesi supporre che le famiglie in discorso offrissero caratteri simili a quelli dei plagiostomi; « spricht aber dagegen die Thatsache, dass die Wirbelbogenbasen bis zum

« innersten knöchernen Doppelkegel reichen, also die zwischen ihnen liegenden Kno-
« chen-Knorpelmassen nicht in einer kontinuirlichen röhrigen Schicht angelegt wur-
« den, sondern ebenso wie bei den übrigen Teleostiern sich nachträglich auf den pri-
« mären Knochenkegel und zwischen die Bogenbasen ablagerten ».

IV. Riferisco gli studi di Pouchet sui singnati: « Les arcs viscéreux chez
« le jeune syngnathe sont incomplets. Au contraire, les apophyses montantes se
« rejoignent audessus des centres nerveux en une arcade très-grêle, très-espacée
« de ses voisins . . . Enfin on trouve également, sur le côté de petites apophyses trans-
« verses, qui donnent insertion aux muscles. Tous ces prolongements sont formés
« de la même substance ostéoide, qui constitue les parois de la corde; du moins
« elle ne s'en distingue par aucun caractère physique appréciable . . . Ces apophyses
« s'élargissent à la base par laquelle elles s'unissent à la paroi de la corde, et dans
« leur évasement on distingue des cavités, qui sont évidemment des chondroblastes
« avec ou sans noyau granuleux. Ces cavités sont arrondies, pressées les unes contre
« les autres, mais sans déformation réciproque. Elles sont en dehors de la paroi de
« la corde et enveloppées par la base élargie de l'apophyse . . . Enfin les mêmes arcs
« présentent vers le milieu de leur longueur, en dedans, un amas de chondro blastes
« analogue à celui de la base. Cet amas est appuyé en dehors contre l'arc neural; il
« nous a paru recouvert en dedans par une très-mince couche de substance ostéoide » (1).

V. «Bei Schwertfisch », scrive J. Müller, « der centrale, die hohlen Facetten be-
« grenzende Theil des Wirbelkörpers ist selbst in erwachsenem Zustande grossentheils
« von dem corticalen grös seren Theil des Wirbelkörpers getrennt und steckt darin,
« wie in einem Etui; gegen den vordern und den hintern Theil des Wirbelkörpers ist
« die circuläre Lücke, zwischen den stärkern corticalen Stück von welchem die Fort-
« sätze abgehen und dem centralen Stück, ansehnlich; gegen die Mitte des Wirbel
« sind beide verwachsen. Der centrale, die Facette begrenzende Theil des Wirbelkör-
« pers, der aus der Scheide der Chorda entstanden ist, und dessen Ossification $^1/_4$ bis $^1/_3$
« Linie beträgt, bestehet ganz aus lauter ossificirten Cirkelfasern, zwischen welchen
« eine sehr feinkörnige durch Saüre schwindende Substanz zerstreut ist ».

RIASSUNTO

Faccio seguire un riassunto de' fatti particolari che ho fin qui riferiti. Io mi lusingo che ciò possa riuscire gradito a quei lettori, che vogliono informarsi dell'argomento, senza imprenderne ricerche speciali.

§ 1. *Corda e sue membrane.*

(Tav. I, fig. 3, 5 e 8; Tav. IV, fig. 1 - Tav. II, fig. 7 e 11; Tav. III, fig. 10; Tav. IV. fig. 2, 3, 6, 13 e 14; Tav. V, fig. 7 - Tav. V, fig. 5; Tav. VI, fig. 1, 2, 4, 5, 6 e 8)

La corda dell'embrione, prossimo a schiudersi, consta dei seguenti strati, ch'io enumero andando dal centro alla periferia:

1° Di cellule vescicolari, che rappresentano il tessuto della così detta sostanza della corda;

(1) Non dimentichisi che queste ricerche sono fatte senza il sussidio delle sezioni.

2° Di un semplice e sottil strato epitelimorfo;

3° Della membrana propria della corda;

4° Di una sottilissima membrana, elastica ed amorfa, le quale è esternamente circondata da connettivo embrionale.

Fino a quando si forma il corpo della vertebra, la corda va crescendo di lunghezza e diametro in modo quasi uniforme. Notasi però sui tagli, in corrispondenza ai setti intermuscolari, un leggerissimo rigonfiamento, il quale potrebbe anche sospettarsi artificiale. Inoltre l'ingrossarsi della corda è di grado maggiore nella sua propria membrana che nel suo stato epitelimorfo.

Egli è verosimile che la membrana propria cresca per opera di questo strato epitelimorfo e che l'elastica cresca a spese del connettivo circostante.

Verso l'epoca in cui si sviluppa il corpo della vertebra, la membrana propria della corda nella regione intervertebrale presentasi ispessita e quasi fibrosa e appare sporgente nella sostanza della corda.

A questo livello lo stato epitelimorfo è più ricco di cellule; e, perifericamente all'elastica esterna, le cellule embrionali si dispongono a guisa di uno strato di epitelio.

Al formarsi del corpo della vertebra tien dietro un crescere della sostanza della corda, per lo meno a gran preferenza nelle regioni intervertebrali,

Con questo avvenimento sono in relazione i noti gozzi della corda, che compaiono presto e che, più essa cresce, più si fanno spiccati.

Quasi contemporaneamente le sezioni ci danno per le membrane la seguente disposizione, la quale press'a poco permane anche nell' adulto. La membrana propria della corda è molto ispessita e fibrosa nelle regioni intervertebrali; di qui sottile si estende sulla metà contigua di ciascuna delle due faccette (superficie interne di ciascuno dei coni del cosidetto doppio cono); più in là non l'ho più potuta seguire con sicurezza; prima però della parte mediana della vertebra riappare sottile e, invece che fibrosa, sembra ialina; diventa abbastanza grossa alla parte mediana (meno però che nella regione intervertebrale) ma conserva l'aspetto ialino. L'elastica esterna è ben distinguibile appena là, dove lo è anche la membrana propria della corda; è però assai sottile.

Poco dopo che queste modificazioni delle membrane si sono accentuate, nella sostanza propria della corda comincia una gran modificazione, che si completa più tardi. Ed è questa: probabilmente per soluzione di cellule, si formano delle lacune. La sostanza della corda, tranne che nelle regioni intervertebrali, riducesi ad un funicolo fibroso e spesso. Questo funicolo sta nell'asse longitudinale della vertebra e co' suoi estremi alquanto allargantisi perdesi in un setto intervertebrale, che è fatto di stanza della corda ed in cui si distinguono ancora le cellule vescicolari. Alla periferia questo setto si ripiega e prolungasi a coprire gran parte delle faccette. La piega può formare sovra di queste uno strato più, o meno spesso (nel primo caso la lacuna resta grande, piccola nel secondo): questo strato va perdendosi verso la parte mediana-trasversale della vertebra. Lo strato epitelimorfo resta evidente (l'ho trovato per es., in lucci di 14 cm.) ovunque; si prolunga, cioè, anche su questa parte mediana della vertebra, dove perciò delimita la lacuna. In questa vi è un liquido acquoso.

§ 2. *Archi e pezzi in rapporto con essi.*

Tav. I, da fig. 1 a 10; Tav. II, fig. 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10; Tav. IV, fig. 1 - Tav. II, fig. 2; Tav. III, da fig. 1 a 11; Tav. IV, fig. 8, 9 e 15 - Tav. V, fig. 12; Tav. VII, fig. 2, 4, 6, 7, 9 e 11; Tav. VIII, fig. 3 - Tav. IV, fig. 4; Tav. V, fig. 2, Tav. VI, fig. 3 e 7; Tav. VII, fig. 8 e Tav. VIII, fig. 1, 2 e 6).

A. Archi.

Il primo accenno della segmentazione dello scheletro assile è dato dalla formazione degli archi; essi seguono la formazione della corda e precedono la formazione del corpo della vertebra. Se non si considerano gli archi modificatisi per servire la pinna caudale, sta la regola che i superiori si sviluppano prima che gli inferiori [1] e che i superiori (ed anche gli inferiori ?) vanno sviluppandosi dall' avanti all' indietro, e cioè, gli anteriori si sviluppano prima che i posteriori.

Essi cominciano, molto di spesso, cartilaginei; si sviluppano però di già osteoidi, ne' ciprinoidi (tutti?), gli archi superiori (eccezion fatta dei primi e degli ultimi) e gli archi inferiori della parte posteriore del tronco e della parte anteriore e media della coda.

Per intendere la posizione che tiene la cartilagine è d'uopo riflettere: 1° che l'arco comincia assai accosto alla corda; 2° che la cartilagine dell'arco va crescendo specialmente, alla parte accosta alla corda; 3° che gli archi inferiori del tronco vanno man mano scostandosi dai superiori, man mano che ci portiamo dalla parte anteriore alla posteriore.

Su tutti i teleostei in principio gli archi superiori tutti e gli inferiori della parte posteriore del tronco e della coda sono cilindrici e gracili; quelli del tronco sono monconi corti e grossi.

La cartilagine acquista uno sviluppo maggiore, o minore, si arresta e si riduce più o meno presto, a seconda della famiglia, a cui appartiene il teleosteo e della regione vertebrale, che si prende in considerazione.

Il *maximum* di cartilagine, in complesso, si sviluppa negli archi del luccio, alla parte anteriore e media del tronco; fino ad un certo punto il salmone rivaleggia col luccio per la quantità di cartilagine, ma poi cede. Nel luccio stesso, alla regione critica del tronco ed a quelle anteriore e media della coda, si sviluppa minor quantità di cartilagine.

Il *minimum* mi venne offerto dai ciprinoidi ad una vertebra della coda, che è l'ultima di quelle non ancora modificatesi per la pinna caudale.

Gli archi trasversi sono ricchi di cartilagine in tutti i casi (nel luccio press'a poco, come gli archi superiori corrispondenti).

Ne' ciprinoidi questa cartilagine va decrescendo andando dalla regione anteriore del tronco alla posteriore; cotale perdita graduale è risentita specialmente dalla parte posteriore della vertebra e dalla parte vicina all'arco superiore.

Nella 4ª e 5ª vertebra de' ciprinoidi (tutti?), gli archi si sviluppano con molta quantità di cartilagine; tra la cartilagine dell' arco superiore e quella dell' inferiore (su individui da 20 a 60^{mm}) vedesi quasi dapertutto uno strato osteoide, che è sempre

[1] Per brevità, in questo riassunto uso la denominazione *archi inferiori del tronco*, come sinonimo di *archi o processi trasversi*; ciò che giustificherò nella parte generale.

sottile; lo spazio è maggiore, ma non di molto, tanto tra le basi degli archi superiori, quanto tra quelle degli inferiori; nella parte anteriore della 5ª vertebra, in prossimità della corda, la cartilagine degli arch isuperiori tocca direttamente quella degli archi inferiori.

Insomma la quantità di cartilagine delle nominate due vertebre par maggiore, che nella corrispondente epoca, sulle corrispondenti vertebre del luccio, tra i cui archi restano sempre grandi spazî; più tardi, ne' ciprinoidi, la parte di cartilagine che è addossata alla vertebra, continua ad estendersi in superficie, appunto come negli altri processi trasversi, ed ancora come in questi, la parte distale vien riassorbita.

Nella coda (de' ciprinoidi) la cartilagine dell'arco inferiore d'un lato, può fondersi con quella dell'altro lato.

Nel luccio e nel salmone c'è un momento, in cui gli archi tutti sono sviluppati e tutti constano soltanto di cartilagine; la loro base abbraccia molta parte della corda; i superiori della maggior parte (anteriore) del tronco raggiungono il livello superiore del midollo spinale e non si congiungono tra di loro; ciò fanno però gli altri archi superiori, i quali presentano già un accenno d'apofisi spinosa.

Alla parte posteriore del tronco, gli inferiori vanno allungandosi e possono essere riuniti per ponti di varia forma come nell'adulto (con molte varietà individuali per numero e forma); non di rado esistono forme di transizione da questi archi uniti con ponti, ad archi inferiori con apofisi spinosa. Anche ne' ciprinoidi questi ponti si sviluppano per tempo, ma di già osteoidi. Ad un periodo ulteriore quando, cioè, si è già sviluppata la sostanza osteoide, nel luccio e nel salmone, la cartilagine diventa quasi limitata alla base dell'arco; qui però come negli altri archi ad apofisi spinosa, per un certo tempo può conservarsi un po' di cartilagine in corrispondenza alla sommità dell'arco.

La cartilagine degli archi superiori, si conserva per molto tempo, almeno nel luccio (la trovai su individui di 15 cm. e più), però quasi non cresce: sicchè presto non raggiunge più il livello della faccia superiore del midollo. L'arco continua ad allungarsi per mezzo di sostanza osteoide.

I fatti esposti dimostrano che ne' teleostei la cartilagine è in gran riduzione; oltracciò permettono di presumere che, là dove or non se ne forma, sia avvenuto un accorciamento di sviluppo; ed infine rendono fondata l'idea che perfino negli antenati de' lucci, ne esistesse una quantità maggiore di quella che si trova ne' lucci attuali. La fusione della cartilagine degli archi inferiori tra di loro (alla coda) e quella dei superiori cogli inferiori (alla 5ª vertebra ne' ciprinoidi) sono forse residui dell'antico edifizio e spie del dominio che una volta possedea la cartilagine nella colonna vertebrale.

Alla parte dorsale del midollo spinale decorre il legamento vertebrale superiore. Esso si sviluppa press'a poco contemporaneamente agli archi, è costante in tutti i teleostei. Nel tronco, al disotto di questo legamento, al disopra del midollo al di dentro, ed un po' indietro degli archi superiori; ad un periodo relativamente tardivo, quando, cioè, questi archi hanno già ricevuto un involucro osteoide ed osteoide è la loro punta; compaiono per ogni vertebra due pezzi (intercalari midollari) cartilaginei, uno per lato (nei salmoni, nei lucci e nelle clupee); presto essi si toccano sulla linea mediana e si fondono insieme; possono assumere anche forma complicata specialmente alle vertebre anteriori (nel luccio); crescono col crescere dell'animale. Nelle vertebre anteriori del luccio già in individui giovanissimi s'estendono in giù della metà

dell'altezza del midollo. La loro cartilagine non si fonde, almeno in molte vertebre, con quella degli archi; sibbene ciò fa la sostanza osteoide, che più tardi le involge con quella che involge gli archi stessi.

Ne' ciprinoidi ancor giovani si sviluppano dagli archi superiori le apofisi (sproni) già note negli adulti, che fanno da suolo al legamento vertebrale e da tetto al midollo. Esse sono forse omologhe ai pezzi cartilaginei or ora accennati.

Nei ciprinoidi si sviluppano cartilaginei anche i due pezzi ossei che coprono il midollo delle prime vertebre; di questi l'anteriore si perde nell'estremo anteriore del legamento vertebrale, il posteriore poi copre il legamento stesso. Per questa posizione i pezzi in discorso non si possono paragonare agli altri qui sopra descritti.

Altri pezzi in rapporto cogli archi sono i così detti portapinne, od ossa interspinali. Ho detto che gli archi superiori per la maggior parte del tronco, nel salmone e nel luccio, non si congiungono mai in apofisi spinosa. Ne' giovani, quando gli archi in discorso sono del tutto cartilaginei ed arrivano colla loro estremità libera press'a poco a livello del legamento vertebrale superiore, poco al disopra di questo, si sviluppano cartilaginei i portapinne; uno per ogni vertebra, anche là dove mancano le pinne; se l'estremità prossimale del portapinne si biforcasse in due cortissimi rami congiungentisi colle estremità libere degli archi superiori, noi avremmo un arco con apofisi spinosa, press'a poco come quelli della regione della coda. Col prolungarsi degli archi i portapinne vengono a trovarvisi compresi per un tratto più o meno lungo.

Ne' ciprinoidi gli archi superiori anche al tronco si congiungono (come negli altri teleostei, alla coda) e per tempo, formando una lunga apofisi spinosa.

Portapinne si possono però sviluppare anche là dove si formano apofisi spinose, con cui però manifestano sempre evidenti rapporti.

Anche ne' ciprinoidi i portapinne sviluppansi cartilaginei, nonostante che le corrispondenti apofisi sviluppinsi osteoidi.

B. Coste.

Le coste si sviluppano al limite peritoneale dei legamenti intermusculari ventrali, più tardi che gli archi, e andando dall'avanti all'indietro (cioè le anteriori prima delle posteriori).

Nel luccio e nel salmone la costa si preforma cartilaginea; la cartilagine è più abbondante nel luccio che nel salmone. La costa al primo apparire non è molto lunga; la sua cartilagine riceve per tempo un involucro osteoide, che però non s'estende all'estremo distale della costa; qui essa continua ad allungarsi, sviluppando dapprima cartilagine, che poscia riceve il velamento osteoide, come nella parte precedente. Non molto di rado accade (specialmente alle coste posteriori) che la sostanza osteoide ravvolge anche l'estremo distale, ma ben presto al di là di questo si sviluppa nuova cartilagine; e così la costa continua a crescere e la cartilagine della costa appare interrotta in uno, o parecchi punti. Ne' ciprinoidi si può dire che questa eccezione è diventata la regola; la costa si sviluppa per un lungo tratto quasi senza cartilagine; poi comincia la cartilagine, che in molti punti vien interrotta dalla sostanza osteoide. Quasi sempre, su una sezione trasversa, la cartilagine è in maggior quantità verso l'estremo distale di quel che prima di esso.

Ne' teleostei si può dire che le coste hanno origine indipendente dagli archi, se si parla di coste soltanto allora quando si è già formata cartilagine, o sostanza osteoide.

Nel luccio e nel salmone, tra l' arco trasverso e la costa, nel primo momento resta un sottile strato di tessuto connettivo embrionale. Il quale, alla sua parte mediana, nel luccio, trasformasi rapidamente in cartilagine ; sicchè l' arco trasverso si mette in continuazione diretta colla costa e non si saprebbe dire dove quello finisce e comincia questa; subito però il confine resta accennato con sicurezza dall'involucro osteoide che circonda la costa e cessa là dove si formerà l'articolazione.

Questa riunione della costa col processo trasverso succede anche nel salmone; ma la cartilagine riunente possiede sempre pochissima sostanza fondamentale che si colora intensamente; in ciò essa si differenzia dalla cartilagine degli archi e delle coste. Questo carattere persiste ancora nei salmonidi di cinque mesi.

Ne' ciprinoidi in principio la sostanza osteoide della costa è divisa dall'arco trasverso per mezzo di un connettivo quasi procondrale, che per tempissimo trasformasi in cartilagine con sostanza fondamentale scarsissima e colorantesi intensamente. Questa cartilagine mantiensi lungo tempo e quasi senza mutar di struttura , e viene ad essere separata intieramente dalla cartilagine dall' arco trasverso, appena quando la cartilagine contigua di questo va distrutta, come sopra ho detto.

Le coste posteriori meritano speciale considerazione. Anche agli archi congiungentisi per ponti possono corrisponder coste; ne' salmonidi ciò può accadere anche ad un paio d'archi, che formano già una corta apofisi spinosa. Le coste corrispondenti a questi archi e non di rado anche a parecchi dei precedenti non unentisi a ponte (in tutti i teleostei da me studiati), non entrano in connessione cartilaginea coll'arco, ma tra la costa e l'arco si sviluppa soltanto tessuto fibroso.

Come gli ultimi archi trasversi, così le ultime coste presentano frequenti variazioni individuali ed abbondanti variazioni specifiche.

Non di rado alcune coste posteriori appaiono rudimentali in confronto alle altre; archi che in certi individui portano coste, possono esserne privi in altri di ugual grandezza. Da una parte può esservi un arco trasverso con una lunga costa, dall'altra soltanto un arco trasverso un po' più lungo.

Ne' ciprinoidi talvolta gli ultimi archi trasversi, che portano coste, si sviluppano osteoidi; talvolta alcuni, con un nucleo cartilagineo alla base, non portano coste ecc. L'ultima costa mi apparve sciolta in varî pezzi, corti, discosti l'uno dall'altro e fatti di cartilagine involta di sostanza osteoide (in un luccio di 4 cm.).

Le ultime coste del luccio si perdono colla loro estremità distale nei setti intermusculari ventrali.

C. Reste [1].

(Tav. II, fig. 10; Tav. IV, fig. 16)

Credo opportuno di far seguire allo studio delle coste alcune osservazioni sulle reste, che parecchi giudicarono coste, od organi simili.

[1] *Gräten* dei Tedeschi, *arêtes* dei Francesi.

Esse si sviluppano più tardi che le coste senza preformarsi cartilaginee [1].

Quelle che nell'adulto restano in continuazione cogli archi della vertebra (le reste oblique dorsali anteriori, per es., del luccio) si sviluppano già in continuazione colla lamella osteoide, che involge la cartilagine degli archi stessi. Negli altri casi l'unione col corpo della vertebra, o co' suoi archi, accade per mezzo di un tessuto tendineo.

Al posto, in cui in una specie trovasi una resta, in un' altra può vedersi un semplice tendine; in certi setti intermusculari la resta può del pari essere surrogata da un tendine.

§ 3. *Corpo della vertebra.*

(Tav. IV, fig. 1 - Tav. III, fig. 5; Tav. IV, fig. 3, 5, 7, 10, 11 e 12; Tav. V, fig. 3 e 7 - Tav. VI, fig. 2, 4 e 5 e Tav. VII, fig. 1.)

Esso è formazione tardiva più d'ogni altra parte della colonna vertebrale; non si preforma mai cartilagineo; sviluppasi dal connettivo che sta attorno alla corda.

Comincia a comparire il doppio cono; ben presto però sorgono, in immediata continuazione con esso, alla sua superficie esterna (specialmente verso la parte mediana delle vertebre) lamelle osteoidi, complicate nel luccio, semplici e simmetriche nei ciprinoidi.

In certi lucci occorre di trovare, alla regione critica del tronco un tessuto apparentemente cartilagineo [2] in mezzo all'osso del doppio cono; con questa insolita struttura s'accompagna un disordine degli archi. Siamo davanti ad anomalie di prima formazione, od acquisite (frattura riparata)?

Quando l'arco si sviluppa senza che si preformi cartilagine, già al suo primo apparire è fuso col corpo della vertebra; quando si preforma poca cartilagine (archi anteriori e medî della coda, nel luccio e nella trota) accade non molto tardi una fusione dell'osso che la involge, con quello della vertebra.

Quando infine la cartilagine preformatasi è abbondante, gli archi restano permanentemente separati dal corpo vertebrale (e questo caso molto verosimilmente rappresenta la condizione primitiva), allora la cartilagine può dividersi più o meno completamente, in due pezzi sul piano in cui è cessato l'osso dell'arco e non è ancora cominciato quello della vertebra.

Appendice.

Dopo che il mio lavoro era già in tipografia, il caso mi mise sott' occhi una Memoria di Bruch (*Vergleichend-osteologische Mittheil.* in Zeit.. f. wiss. Zool. 1862), Memoria che è stata dimenticata anche da Gegenbaur, da Balfour e da Goette. È necessario che io qui la prenda in considerazione. L'Autore vi dà una lunga ed estesa relazione sull' osteologia de' teleostei (in molti punti ripete cose già pubblicate da A. Müller, la cui Memoria sembra che gli sia ignota) e, ciò che fa al caso nostro, descrive dei pezzi singolarissimi ch'egli denomina *cartilagines intermusculares.*

[1] Così anche nella perca, le cui coste si sviluppano come quelle de' ciprinoidi.

[2] Un tessuto simile s' incontra normalmente per es. in certe parti del cranio dei lucci: talvolta le sue cellule sono isolate in mezzo all' osso ed in un certo senso si potrebber giudicar corpuscoli ossei.

Sono appendici cartilaginee di tutte le vertebre del tronco del salmone e della clupea (mancano nel luccio); si tratta di pezzi alle volte semplici, alle volte complicati; come le reste riposano nei legamenti intermusculari; nella clupea e nel timallo compaiono accanto alla serie mediana delle reste; nel salmone hanno figura di bastoncino e sono per mezzo di un legamento fibroso, in rapporto cogli archi inferiori.

Per maggior chiarezza riporto alcuni punti della Memoria di Bruch.

Nel *Salmo salar* « mittlere und untere Gräthen fehlen, wohl aber finden sich « knorpelige, rippenartige Gebilde, welche nach Art der mittleren Gräthenreihe in « den *Septa intermuscularia* in der Gegend der seitlichen Längsfurche verlaufen « und durch sehnige Fäden mit dem unteren Bogenstücke in Verbindung stehen . . . . « Ich überzeugte mich dass sie bei Thymallus neben den wahren Fleischgräthen « vorkommen, welche sich bei dieser Gattung, an den vordersten Rückenwirbeln fin- « den, bei Salmo aber fehlen. Das Verhältniss ist hier so, dass die secundäre « Gräthe synostotisch mit den Wirbelkörpern verbunden ist, sich horizontal in der « Mittelfurche nach hinten erstreckt, und dass sich gegen das Ende derselben ein « selbstständiger Knorpelstreif an sie anlegt, wiewohl durch sein Perichondrium « durchaus geschieden bleibt. Dieser Knorpelstreif entspricht ganz dem bei Salar al- « lein vorkommenden, hat eine im Ganze cylindrische Gestalt mit dünneren Enden, « verlaüft eine gute Strecke in seinem *Septum intermusculare* horizontal nach « hinten und zeigt gegen seine Ende eine geringe Andeutung einer gabeligen « Theilung, wovon bei Salar nichts zu sehen ist . . . . Nie habe ich darin eine « Spur von Verknöcherung gesehen.

« Von den Gräthen der mittleren Reihe von Alausa vulgaris, welche nur bis « zum 36. Wirbel reichen, sind die 2 ersten mit dem Halswirbelkörper, die folgen- « den 14 mit dem Rippenköpfchen synostotisch verbunden und noch 20 freie Paare « vorhanden, welche zum Theil an den Schwanzwirbeln befestigt sind, und allmählig « auf die mittlere Leiste des Wirbelkörpers heraufrücken. Alle mittleren Gräthen « sind einfach und dabei stärker und gerader, als die der oberen und unteren « Reihe, auch kurzer. Mit ihnen stehen die knorpeligen Wirbelanhänge in Verbin- « dung, welche sich vom 1-30 Wirbel erstrecken, und bei den Clupeen eine ganz « besondere Entwickelung erreichen. Dieselben liegen viel oberflächlicher als die « Gräthen, ummittelbar unter der äusseren Haut, nehmen nach hinten an Stärke ab « und verlieren sich am Ende der Bauchwirbelreihe. Sie bestehen bei der Alse aus « zwei Schenkeln, die vorn unter einem nahezu rechten Winkel zusammenstossen « und sich von der Mittellinie aus in den Ligamenta intermuscularia nach auf- und « abwärts erstrecken. Es sind beträchtliche Knorpelstücke und an der inneren Seite « der Schenkel mit franzenartigen Anhängen versehen, welche nach hinten in die Mu- « skelscheidewände ausstrahlen und in das fibröse Gewebe continuirlich übergehen. « Auf der inneren Fläche haben sie eine mittlere Längsrinne, in welche sich das « Ende der Gräthe einlegt, an welcher sie daher wie aufgespiesst erscheinen. Die « genauere Untersuchung zeigt, dass sie gleichwohl von den secundären Stücken « durch Perichondrium getrennt sind, und dass diese innige Verbindung eine Folge « des Wachsthums der Theile ist, aber keine Verschmelzung genannt werden hann. « Niemals habe ich in diesen Knorpeln Verknocherung bemerkt . . . . ».

Io ho fatto alcune osservazioni sullo sviluppo delle cartilagini intermusculari del salmone. Esse sono riconoscibili un bel po' più tardi delle coste e già al loro comparire sono unite cogli archi inferiori per mezzo di un tessuto connettivo compatto. Ne ho esaminate alcune tolte da una trota lunga circa 3 dm.; erano flessibili e constavano interamente di cartilagine ialina e non calcificata.

PARTE GENERALE

Persuaso che il semplice spigolatore di fatti non passa il limitare della scienza, io tento di ordinare, col metodo comparativo, questi da me raccolti. Non mi dissimulo le difficoltà, che si parano innanzi, qui come ovunque, a chi pone il piede nello spinoso campo delle comparazioni. Queste difficoltà, non lo voglio pretermettere, sono inerenti a lacune, di cui una parte esprime mancanza di dati su parecchi membri della comparazione, ed un' altra significa scomparsa irreparabile d'anelli della serie animale. Dove cozzano contro questi ultimi *hiatus*, le mie elucubrazioni assumono un semplice valore ipotetico; dove cozzano contro quei primi, il loro valore resta precario.

Così determinato, senza equivoci, il vero valore di questa parte generale, entro subito nel cuore dell' argomento.

I miei fatti si possono considerare sotto parecchi aspetti; ciò sono: 1° confrontarli con quelli offerti dagli altri pesci e dai vertebrati superiori collo scopo di dedurne le omologie; 2° pesarli affine di perscrutare l'origine prima dello scheletro cartilagineo; 3° ripesarli in ordine alle ipotesi sulla patria dello scheletro osseo.

A. Comparazioni.

Ragion vuole ch' io dibatta parecchie questioni preliminari. Gli animali da me studiati sono essi bastevoli a rilevarci le condizioni più primitive della colonna vertebrale dei teleostei in generale? Quale sono i parenti più prossimi de' teleostei? Sono i teleostei direttamente comparabili a tutti gli altri vertebrati?

Comincio colla prima domanda se, cioè, que' pochi teleostei, ch' io ho esaminato, mi illuminano a sufficienza, senza il minuto esame delle altre innumerevoli famiglie e specie.

Molto probabilmente non sono in errore, facendo una risposta affermativa; perchè io ho studiato dei fisostomi, ed è noto che i fisostomi, nel complesso della loro organizzazione, presentano le condizioni più primitive; basta citare la comunicazione della vescica natatoria coll' esofago, le condizioni dei raggi delle pinne, onde i fisostomi si dissero malacotteri; il grado di riduzione della pinna caudale ecc.

Arroge che nello stesso ampio sottordine dei fisostomi, come ci indica la posizione sistematica e l'anatomia comparata, le famiglie da me studiate rappresentano quelle forme, in cui possiamo aspettarci di trovar reliquie accennanti alla schiatta originaria.

Se le cose stanno nei termini da me esposti, ei si vede a primo aspetto quanta poco confidenza meritano le conclusioni basate su tipi aberranti, come, per es., quelle di Goette sul monacanto (un plettognato). È certo che, e per la disposizione dei

muscoli, e per quella dello scheletro e per molti altri organi, i plettognati si discostano dagli altri teleostei. Forse l'autore è stato tratto in errore dalla quantità di tessuto cartilaginoide che si riscontra in questa forma; avrebbe però forse evitato cotale scoglio, ove avesse giustamente apprezzate queste considerazioni: 1° il tessuto cartilaginoide del plettognato si sviluppa secondariamente all'osso, ed è qualcosa di ben diverso dalla cartilagine, per es. del luccio; 2° la quantità di cartilagine per sè sola non è indice sicuro dell'antichità di una forma [1].

Egualmente erronee sono le conclusioni di Pouchet; il quale si è basato interamente su un lofobranco; anche i lofobranchi son forme molto aberranti.

Parliamo ora della stirpe, da cui si voglion far procedere i teleostei. Questo punto è importante perchè è desso che ci deve additare i tipi, con cui possiamo paragonare i teleostei.

Poniamo l'assioma che l'alta, o bassa posizione nel sistema naturale pe' teleostei, come per ogni altra classe, si deve dedurre non dallo studio di uno solo dei loro apparecchi organici, sibbene da considerazioni basate sulla loro intera organizzazione. Non è perciò fuor di luogo il tratteggiare le linee fondamentali de' teleostei.

In molti di essi le squamme soffrono riducimento fino alla totale scomparsa; d'altra parte, in alcuni, danno origine a piastre, a corazze ecc. Anche i raggi, che appariscono nel tegumento dei membri, sono formazioni omologhe alle squamme. Si può dire che i ganoidi rombiferi hanno squamme rapportabili a quelle dei selachi; che quelle dei ganoidi cicliferi ne sono già lontane, e per ultimo che quelle dei teleostei lo sono ancor di più.

Lo scheletro del capo dei selachi persiste nel modo il più completo negli storioni; si mantiene appena in parte, negli altri ganoidi, e in diversa proporzione nei teleostei. Le sue riduzioni sono per la maggior parte secondarie ad ossificazioni; queste ossificazioni sono alla lor volta deducibili da dentelli cutanei. Quelle ossificazioni che scorgonsi superficiali nello sturione, appaiono profondate nei teleostei. In complesso, com' è naturale, più queste ossa si approfondano, più la cartilagine si riduce.

Paralleli al cranio, si tengono gli arti; qui pure la cartilagine è in riduzione nei ganoidi ed in massima riduzione nei teleostei; la sostituiscono ossa cutanee ancora rapportabili a dentelli.

[1] Soltanto, dopochè il mio lavoro era stato consegnato all'Accademia dei Lincei, ho potuto consultare la Memoria d'Harting (*Notices Zool., anat. et histiol. sur l' Orthagoriscus* etc. Amsterdam etc. 1865). Secondo Harting, nell'ortagorisco adulto molte parti dello scheletro, e tra queste la colonna vertebrale, constano di un tessuto, che, benchè grossolanamente simile alla cartilagine pure se ne differenzia per la composizione chimica e per la struttura istiologica e si avvicina invece al vero tessuto osseo. All' esame istiologico vi si distinguono: 1° lamelle ossee costituenti un tessuto areolare; 2° abbondantissima materia ialina che riempie la cavità delle areole ed in cui per lo più non si trovano cellule; e 3° fibre di natura speciale, che sono in rapporto colle lamelle ossee e che in alcuni luoghi traversano la materia ialina (sui tagli trasversali queste fibre paiono circoletti; questi circoletti vennero probabilmente giudicati cellule da Leydig e da Cleland). È verosimilissimo, aggiungo io, che questi fatti si ripetano in un altro plettognato, cioè nel monacanto. Se si accetta questa mia supposizione, si ha un altro argomento per non dar valore al fatto rilevato da Goette.

Quanto al sistema nervoso, benchè sieno imperfette le nostre cognizioni, specialmente dal lato embriologico; tuttavia si può osservare che il cervello dei teleostei concorda con quello dei selachi e dei ganoidi (ganoidi e selachi armonizzano abbastanza tra di loro) appena nei primi stadî dello sviluppo. Il prosencefalo voluminoso nei ganoidi e nei selachi, in molti teleostei è ridotto d'ampiezza. Il cervello intermedio, che è distintamente separato dall'encefalo medio nei selachi, in molti teleostei invece gli è strettamente congiunto; i lobi inferiori di questo cervello intermedio nei teleostei sono meglio esplicati che nei selachi. La parte, che vien denominata cervelletto, assume, ne' teleostei, una grandezza rilevante. Andando dai selachi ai ganoidi e da questi ai teleostei, determinasi una diminuzione progressiva del volume del midollo allungato. Insomma, quanto al sistema nervoso vi è riduzione in alcune parti e maggior sviluppo in altre. Pare però che le condizioni de' selachi sieno più primitive; e questo fenomeno ripetesi anche nel sistema nervoso periferico e negli organi di senso. Gli organi del cosidetto sesto senso dei teleostei per ora almeno non sono omologhizzabili con quelli dei selachi; lo che probabilmente è in rapporto colle grandi divergenze, che esistono negli integumenti delle due classi.

Nell' intestino troviamo ancora differenziazioni e riduzioni. Le appendici piloriche sono organi, che vanno perfezionandosi, andando dai selachi ai ganoidi e da questi ai teleostei. La valvola spirale dei selachi e dei ganoidi, che è però assai ridotta nel lepidosteo, manca nei teleostei. La cloaca dei selachi, delle chimere e dei dipnoi è in riduzione nei ganoidi e non c'è più nei teleostei; se ciò accenna a condizioni primitive, o secondarie, non lo so bene. Alcuni teleostei presentano nel decorso dell' intestino condizioni molto semplici (per es. lo stomaco è appena indicato).

La vescica natatoria è organo rudimentale, o scomparso nei selachi.

Nell'apparato respiratorio riscontrasi una indubitata riduzione del numero delle branchie, passando dai selachi ai teleostei.

Per quel che è del sistema urogenitale, i teleostei, a quanto pare, presentano disposizioni più primordiali di quelle dei selachi. I teleostei hanno un pronefro, come i ciclostomi e gli anfibi; questo organo manca ai selachi. Nel mesonefro dei ganoidi e dei teleostei, quantunque molto esplicato nel volume, non vedonsi così inoltrati quei processi di differenziazione che nei selachi hanno determinato una straordinaria complicazione. Nei ganoidi esiste un' ampia apertura addominale che si può considerare come condotto di Müller; si credea che funzionasse per i prodotti d'ambo i sessi; ma oggidì il fatto è seriamente revocato in dubbio.

Secondo le ricerche di Mac Leod [1], l'apparecchio riproduttore è semplicissimo nei ciclostomi, dove ogni glandula genitale è formata da una piega peritoneale, l'epitelio germinativo si sviluppa su tutta la superficie della piega ed i prodotti escono per i pori genitali. Una localizzazione di questo epitelio sulla faccia esterna della glandula genitale condurrebbe alle disposizioni offerte dai salmonidi e dai murenoidi; la conformazione della glandula a tubo che s' unisce ai pori genitali, condurrebbe agli altri teleostei; lo sdoppiamento del canale urinifero primitivo e la consecutiva formazione del canale di Müller ci porterebbe alle condizioni dei ganoidi e dei selachi.

[1] V. Archives de Van Beneden. 1881.

Da questo sguardo sull' organizzazione dei teleostei, per quanto sia stato rapido ed incompleto, mi sembra lecito dedurre:

1° Che i teleostei sono certamente un ramo divergente dai primitivi vertebrati gnatostomi, divergente molto più che i selachi ed i ganoidi;

2° Che i teleostei in alcuni sistemi ed anche in uno stesso sistema, rimpetto ai selachi ed ai ganoidi, possono presentar differenziazioni e riduzioni;

3° Che almeno un sistema organico (quello urogenitale) è molto probabilmente più primitivo di quel dei selachi e dei ganoidi.

Questa terza conclusione ci impedisce di derivare i teleostei direttamente dai selachi e dai ganoidi.

Insomma: consideriamo tutti i pesci come rami dipartentisi da un ceppo solo; però il ramo dei selachi in confronto con quello dei teleostei e dei ganoidi è meno allontanato dal ceppo. I ganoidi cartilaginei sono relativamente vicini da una parte ai selachi, dall'altra ai ganoidi ossei; ed a questi ultimi s'accostano i teleostei. Si può però forse ammettere che i teleostei siansi diramati dagli antenati dei ganoidi attuali [1].

L'organizzazione dei teleostei qui delineata e la posizione, che venne loro stabilita nel sistema naturale, ne rischiara per gran parte anche i rapporti co' vertebrati superiori. Nei teleostei sono molte differenziazioni, che non continuano punto in questi; altre invece vi durano evidentemente.

Il bilanciare queste convergenze e divergenze ha già condotto Gegenbaur alla conclusione che i vertebrati superiori hanno molto più affinità coi selachi, che coi teleostei; i selachi sono molto più vicini ai progenitori dei vertebrati superiori che non i teleostei.

La conseguenza di queste considerazioni è in parte negativa ed in parte positiva. È lecito, cioè, paragonare i vari tipi di pesci tra loro; bisogna usare grande prudenza quando confrontiamo i teleostei cogli altri vertebrati; ammetto però che ne' teleostei siansi conservate certe condizioni che scomparvero nei selachi, ma si continuarono nei vertebrati superiori (per es., la vescica aerea). I teleostei infine sono confrontabili agli altri vertebrati, ma per una parentela molto lontana, cioè, per una lontana forma stipite comune agli uni ed agli altri.

Ciò premesso, posso scendere a discutere le omologie particolari della colonna vertebrale. Seguendo l'ordine adottato nelle descrizioni, svolgerò primamente le omologie della corda con le sue membrane; secondariamente quelle degli archi e dei pezzi, che sono con loro in rapporto; e per ultimo quelle del corpo vertebrale.

[1] Ho molto insistito su questo studio della organizzazione complessiva perchè ad ogni pie' sospinto sorge qualche albero genealogico fabbricato sovra un solo sistema organico. Una voluminosa opera di Hasse, ancora in corso di pubblicazione, stabilisce un sistema naturale degli elasmobranchi *auf Grundlage des Bau und Entwickelung ihres Wirbelsäule*; se con questo criterio, noi volessimo classificare i teleostei, dovremmo scindere in varie sottoclassi i fisostomi, dovremmo allontanare il ciprinoide dal salmone, collocare vicino al salmone la perca, negare la somiglianza dell'amia colle clupee ecc.

Prima di parlare delle omologie degli archi discuterò l' omodinamia dei processi trasversi cogli archi inferiori.

§ 1. *Corda e sue membrane.*

In tutti i pesci la sostanza propria della corda essenzialmente consta di cellule vescicolari, contenenti un liquido acquoso. Da principio, essa forma un cilindro press' a poco uniforme; poscia il suo crescere limitasi quasi alle ragioni intervertebrali; nascono così i gozzi e stringimenti caratteristici della maggior parte dei pesci ([1]).

Le alterazioni, cui va incontro la sostanza propria della corda nel teleosteo, trovano riscontro parziale negli altri pesci.

Così nella chimera ed in molti elasmobranchi l'asse della corda è percorso da un filo leggermente serpentino, paragonabile forse al funicolo dei teleostei.

In una parte degli elasmobranchi adulti, come ebbe già notato G. Müller, la sostanza propria della corda può presentare delle cavità simili a quelle dei teleostei.

Queste cavità accennano ad atrofia della sostanza propria della corda; atrofia che è probabilmente correlativa al sospendersi della funzione pel subentrare della cartilagine o dell' osso.

Un' atrofia, che medesimamente conduce alla formazione di cavità, riscontrasi anche ne' tunicati.

In questi il fatto è stato illustrato specialmente dal bravo dott. Della Valle; le cui ricerche rendono verosimile che, per un processo analogo a quello, che ho descritto per i teleostei, la corda della coda delle ascidie e delle appendicularie diventi un tubo pieno di liquido acquoso ([2]); alla superficie del tubo si troverebbe una membrana, in cui il lodato dottore avrebbe veduto molti nuclei.

Le difficoltà gravi cominciano, quando tentiamo di stabilire le omologie delle membrane proprie della corda.

Alla periferia della corda trovasi nei teleostei tutti uno strato epitelimorfo; sembra che si debba con Gegenbaur ritenere che le cellule primitive della corda, in parte (le centrali), si vacuolizzino e costituiscano la sostanza propria della corda, in parte (le periferiche) formino lo strato epitelimorfo. Il quale probabilmente esiste negli embrioni di tutti i pesci; benchè finora non sia stato dimostrata in quelli dei dipnoi, dei ganoidi ossei e degli olocefali ([3]).

La costanza di questo strato ci permette d'assumere ch'esso possa avere significati importanti.

([1]) È nota l'eccezione fatta a questa regola dal lepidosteo.

Si credea che per alcune classi di pesci (chimera, esanco) la corda conservasse anche nell'adulto calibro uniforme; ma Hasse avrebbe notato che *eine erste Andeutung einer vertebralen Einschnürung der Chorda den Basen der Neurapophysen anzusehen ist.*

([2]) Il Della Valle, se ben lo comprendo, fiancheggiato da questi fatti, lascia adito al dubbio, che il cilindro assile della coda de' tunicati non sia una corda. Se avesse conosciuto ciò che si verifica nella sostanza propria della corda dei pesci, si sarebbe forse servito dei fatti da lui illustrati, per sempre più rinvigorire la tesi contraria; la quale vien confortata anche da molti altri argomenti.

([3]) Recentemente io lo vidi abbastanza chiaramente in un protottero lungo 10 cm ed in un polittero lungo 12 cm.

Ed un significato sarebbe quest'esso: segregare la membrana propria della corda (o, come altri dice, la cuticola della corda) (¹).

Ho fondamento di credere che questa membrana (ne' teleostei e nei ganoidi ossei) cresca a spese dello strato in discorso, essendochè alla sua periferia esterna essa è circondata da una membranella amorfa. Parla in favore di questa mia opinione anche il fatto che le cellule dello strato epitelimorfo abbondano, là dove la membrana della corda ispessisce (nelle regioni intervertebrali).

In un precoce periodo embrionale sorprendesi anche ne' selachi una membrana simile; essa permane stratosa nei ciclostomi (²) e nei ganoidi adulti.

Nei selachi adulti, nel protottero, nella chimera, nello sturione, e con qualche dubbio nei ciclostomi venne descritta una sottilissima membrana, probabilmente elastica, la quale formerebbe il limite interno della membrana cellulare della corda. Essa è denominata *limitans interna*, ovvero *elastica interna*, ovvero *limitans elastica interna* (Retzius) e si può tentare di considerarla come uno strato differenziatosi dalla membrana propria della corda. La esistenza di una membrana simile nei teleostei è, per lo meno, assai assai dubbia.

Esternamente alla cuticola della corda, come nei teleostei, così negli embrioni giovanissimi dei selachi, nei ganoidi ossei ed inoltre nei dipnoi trovasi una sottile membrana, detta *elastica externa*, o *limitans externa*, o *limitans elastica externa* (di Retzius) (³).

Probabilissimamente essa è una secrezione dello strato scheletogeno, e, per lo meno, cresce a sue spese una volta che è comparsa.

Questa membrana subisce un forte sviluppo nei ciclostomi e nello sturione.

Nei selachi, ancora nel periodo embrionale, tra questa elastica e la membrana propria della corda s'interpone uno strato di cellule; questo strato, a vero dire, non è nettamente separato dalla membrana propria della corda (la qual membrana, secondo Retzius, nel selachio adulto scompare interamente); esso prende uno sviluppo enorme, si differenzia in straterelli secondarî e si trasforma in un tessuto cartilaginoide, od anche in vera cartilagine.

Per il qual fatto, dopo il primo periodo embrionale, il paragone tra le membrane della corda dei selachi e quelle dei teleostei non regge intiero. A chiarire però fin dove si può spingerlo, occorrerebbe conoscere l'origine del cennato strato cellulare, ma pur troppo questa nozione ci fa difetto (⁴). In ogni modo mi pare lecito

(¹) Mi par certo che cellule derivate da questo strato epitelimorfo si vacuolizzino e si trasformino in cellule della sostanza propria della corda; credo con Goette che questo sia la via essenziale, onde la corda cresce; non escludo però la moltiplicazione delle cellule stesse della sostanza propria della corda.

(²) Mentre Köllicher, Gegenbaur e W. Müller considerano la membrana della corda dei ciclostomi, come una formazione cuticulare (giudicano la subentrantavi fibrosità, siccome espressione di una stratificazione concentrica), A. Schneider per l'opposto la ritiene un tessuto connettivo. Contro Schneider s'espresse recentemente Retzius.

(³) L'elastica esterna è piuttosto grossa nel protottero lungo 10 cm.; la trovai sottilissima ed incompleta in un polittero lungo 12 cm.

(⁴) I più inclinano a ritenere che le sue cellule siano derivate dal tessuto embrionale, che sta al di fuori dell'elastica esterna; questa potrebbe essere, io congetturo, fenestrata già nell'embrione, come lo è nell'adulto.

presumere che la mancanza di un simile strato, destinato a trasformarsi in cartilagine, od in tessuto ad essa molto simile (ne' teleostei e nei ganoidi ossei) potrebbe esprimere abbreviazione di sviluppo. Già misi in rilievo che ne' teleostei il periodo cartilagineo tende a sopprimersi, ed è in realtà soppresso, per es. nella maggior parte degli archi superiori de' ciprinoidi.

Goette e Hasse hanno descritto nella zona media dello strato cellulare della corda dei selachi un tessuto, ch'essi ritengono osseo. La mia opinione cadrebbe, se la loro fosse accettabile, ma in realtà non lo è perchè questo tessuto riputato osseo si deve molto probabilmente significare come cartilagine modificata (v. più innanzi).

Siccome per la disposizione delle membrane, i dipnoi s'avvicinano ai selachi, così il ragionamento esposto per questi, si può applicare anche a quelli.

Riepilogando:

a) Nel primo periodo embrionale, in tutti i pesci, la sostanza propria della corda è circondata da due membrane amorfe;

b) Più tardi una parte (selachi, dipnoi, olocefali) si complica per formazione di un grosso strato cellulare (cartilaginoide), il quale nei teleostei e nei ganoidi manca, forse per abbreviazione di sviluppo.

È inutile che io mi soffermi a discutere le idee, diametralmente opposte alle mie, sostenute da Goette; esse partono da false premesse: che, cioè, l'elastica esterna dei teleostei sia cellulare e che lo strato epitelimorfo non esista.

§ 2. *Archi.*

A. *Onodinamia dei processi trasversi cogli archi inferiori.*

Si è discusso a lungo se gli archi inferiori della coda dei teleostei siano omologhi ai processi trasversi.

Il primo, che entrò in lizza, fu G. Müller, di cui riferisco le classiche parole: « Eine sehr wichtige Thatsache in der vergleichenden Osteologie ist dass die un- « teren Bogen der Schwanztheil der Fische durch Vereinigung der rippentragenden « Querfortsätze entstehen. Man sieht dies bei vielen Fischen sehr deutlich, deren « Querfortsätze der hinteren Banchwirbel sich schon zu einen unteren Dorn vereinigt « haben, so dass z. B. bei Mormyrus und Salmo die hintersten Rippen an den un- « teren Dornen sitzen ».

Questa opinione venne divisa e difesa con ricerche originali da Gegenbaur, in molti lavori. Nè prima nè dopo di lui però, mancarono gli oppositori, fra cui i più serî sono stati A. Müller (1853) e Goette (1878).

Questi due Autori basarono la loro opinione sovra ricerche embriologiche.

Io mi sono convinto che il concetto di Müller e di Gegenbaur è il solo conforme alla verità, e che tanto l'embriologia, quanto l'anatomia comparata, gli offrono saldo fondamento.

Ne esporrò prima le ragioni favorevoli; ponderero quindi quelle apparentemente contrarie, che sono state avanzate dai sopranominati contradittori.

Queste sono le ragioni favorevoli:

1° Nel salmone v'ha un tempo, in cui le coste non sono ancora sviluppate

ed invece son già apparsi i processi trasversi e gli archi inferiori. Questo periodo si verifica probabilmente, anche nei lucci. È naturale che manchi nei ciprinoidi, di cui lo sviluppo è molto abbreviato. Possiamo perciò concedere valore al fatto offertoci dal salmone. Or bene in questo, se all'epoca di sviluppo or detta, come non ci pare illecito, si stabiliscono le omologie, la tesi di G. Müller trionfa; non essendovi ancora traccia di coste ed essendovi graduali passaggi dai processi trasversi agli archi inferiori, non si può a meno di omologhizzare questi con quelli.

Questa considerazione è confortata da ciò che le coste vanno sviluppandosi dall'avanti all'indietro e che le posteriori sono le ultime a comparire.

2° Le coste si sviluppano in certo senso indipendentemente dagli archi.

Questa indipendenza è maggiore e rimane permanente alle coste posteriori. Le quali perciò non tendono punto a fondersi colle apofisi trasverse; l'opposto, cioè, di quel che si aspetterebbe di trovare se gli archi inferiori risultassero di un processo trasverso saldato con una costa.

3° Le coste vanno scorciandosi ed assottigliandosi dall'avanti all'indietro, sicchè sono rudimentali, ovvero mancano affatto agli ultimi processi trasversi. Viceversa, gli archi trasversi vanno allungandosi ed ingrossando verso l'estremità posteriore del tronco.

4° I processi trasversi convergono, tendendo a formare archi inferiori nella parte posteriore del tronco; le coste invece, col ridursi della cavità addominale, non convergono che poco e s'internano nei setti intermusculari ventrali.

5° Archi inferiori, in cui siavi traccia della divisione in pezzi accennanti a processi trasversi ed a coste (quali si trovano nell'amia), non si vedono in alcuna epoca sui teleostei.

6° Archi inferiori, con corta apofisi spinosa, possono portare coste.

Gli argomenti in contrario addotti da A. Müller e da Goette si possono ridurre a tre:

1° *Le coste nel luccio si sviluppano fuse col processo trasverso.*

Questa asserzione è contraria alla verità; se le fosse anche conforme, non sarebbe contrario alla mia tesi. Il fatto che gli archi inferiori alla coda resterebbero immutati e che invece quelli del tronco si bisecherebbero, indicherebbe già una differenza tra questi e quelli, differenza non eliminabile che da evidenti forme di transizione.

2° *In alcuni teleostei, ad un periodo embrionale, in cui le coste posteriori sono corte*; *gli archi inferiori, almeno giudicando dalla lunghezza*, *sembrano equivalenti alle coste insieme coi processi trasversi.*

Questa sembianza esiste, ma sorprendere un momento embrionale e senz'altro dedurne un' omologia, basata in somma sulle dimensioni delle parti, a me sembra nettamente un sofisma.

Se alcuni teleostei così esaminati depongono in favore, altri sostengono il contrario. Così, per es., certi ciprinoidi presentano i penultimi processi trasversi con coste lunghe e gli ultimi appena più lunghi e senza coste.

3° *Le coste, che poggiano su veri archi inferiori, si possono considerare come prodotte da una divisione del processo spinoso e riferire alle speciali disposizioni della musculatura nelle regioni corrispondenti.*

Sulla portata di questo strano argomento, i lettori possono giudicare, senza ch'io soggiunga alcun commento.

Per tutto quel che venni fin qui dicendo, credo giustificata la mia asserzione, che, cioè, G. Müller, fin da molti anni fa, avea compreso il vero significato degli archi inferiori dei teleostei.

Non voglio finire la disquisizione senza notare che per quistione d'ordine, io ho limitato il mio discorso ai teleostei; ho però sempre avuto in mente molti concetti d'anatomia comparata, sui quali tornerò nel seguito di questo capitolo.

B. Omologie degli archi.

È necessaria una questione preliminare.

I teleostei hanno in complesso un numero di vertebre molto minore che gli altri pesci. Pare ragionevolissimo di ammettere che anche nei progenitori dei teleostei le vertebre fossero molto numerose. Perchè le vertebre (archi e corpi vertebrali) vanno sviluppandosi dall'avanti all'indietro, ad eccezione delle ultime (modificate per la pinna caudale) le quali nascono molto precocemente; egli è giusta l'illazione che la scomparsa delle vertebre sia accaduta, press' a poco, nella regione media della coda, ossia là dove esse vertebre sono ultime a comparire.

Questo evento verosimilmente avrà avuto per conseguenza che vertebre del tronco saran man mano venute ad appartenere alla coda; da indi una riduzione della cavità addominale; da indi un alterarsi della posizione e funzione delle coste. Non è inverosimile che il processo sia ancora in azione; le facili anomalie, che ho testè descritte alla regione critica del tronco, accennano per avventura a ciò che il fuoco non è ancora spento [1].

Questa premessa ci avvisa di essere prudenti nel paragonare gli archi di un teleosteo con quelli degli altri pesci; egli mi pare evidente che, per es., la regione critica d'uno sturione, benchè sia simile a quella di un teleosteo, essenzialmente è qualcosa di molto diverso; ciò che del resto ci suggeriva già il grado di parentela che unisce questi due ordini di pesci.

Fondamentalmente i teleostei concordano cogli altri pesci, perchè questi e quelli presentano quattro archi, in origine cartilaginei.

Dopo le considerazioni, che qui sopra ho svolte circa alle affinità dei pesci, ognuno capisce che i confronti devono essere fatti specialmente nei periodi embrionali.

In questo periodo, troviamo nei selachi quattro archi separati tra loro (rimangono tali nell'adulto appena in alcuni generi) e dalla membrana della corda (pare che così non si mantengano mai nell'adulto).

Cominciamo col sistema degli archi superiori.

[1] Se questi concetti sono accettabili, ne riceve schiarimento la singolarità degli archi inferiori che portano coste; queste coste, che non funzionano più, significherebbero che una volta la cavità addominale era più estesa di quel che al presente.

Tanto negli embrioni dei selachi quanto in quelli dei salmonidi e del luccio, alla regione del tronco, gli archi superiori si estendono press' a poco fino a livello del legamento fibroso superiore; in amendue le classi hanno forma di sottili cilindri. I portapinne dei selachi, benchè si trovino appena là dove corrispondono pinne, sono simili a quelli dei teleostei; il legamento vertebrale superiore dei primi è parimenti simile a quello dei secondi. Ma negli uni e negli altri esistono dei pezzi, per cui il paragone non regge intero. Gli intercalari neurali de' selachi non si sviluppano tardivamente e non hanno una posizione uguale perfettamente a quella degli intercalari midollari, che ho descritto nei fisostomi. Neppure gli intercalari spinali de' selachi sono paragonabili a quest'ultimi. In quanto però gli intercalari neurali e spinali concorrono a involgere la metà dorsale del midollo spinale e a far, per così dire, da letto al legamento vertebrale superiore, hanno indubbia simiglianza co' pezzi proprî de' teleostei. Non dimentichiamo però che già nell'embrione del selachio l'involucro cartilaginoso del canal spinale è molto più completo che nel teleosteo.

È inutile spendere parole per dimostrare che fuori della regione del tronco de' teleostei, il confronto regge soltanto per un momento, cioè prima che gli archi si congiungano a formare l'apofisi spinosa.

Le chimere presentano condizioni molto simili a quelle dei selachi, e perciò hanno rapporti simili nel confronto coi teleostei. Anche nella chimera abbiamo molta cartilagine, ed anche intercalari spinali e neurali; pare però che manchi qualsiasi traccia del legamento vertebrale superiore.

Lo sturione presentasi in condizioni molto simili a quelle dei selachi, anche nella comparazione coi teleostei. È da notare però che gl'intercalari neurali ontogenicamente son nello sturione tardivi, più tardivi (Goette) che nei selachi. Ricordo che un fatto simile succede per gli intercalari midollari dei teleostei.

Nei ganoidi ossei il poco dominio della cartilagine e il soperchiare dell'osso avvicina i loro archi superiori a quelli dei teleostei. Gli intercalari midollari ripetonsi nei ganoidi ossei, ora, a quanto pare, come nel luccio, ora come nei ciprinoidi.

Parecchie differenze esistono però ed io non intravedo la possibilità di una conciliazione. Per es. accenno all'amia ed ai clupeidi; questi non ostante che per la loro complessiva organizzazione siano assai prossimi all'amia, pure per rispetto alla colonna vertebrale, se ne dilungano non poco (si ricordi la singolare disposizione della cartilagine e l'ordinamento degli archi nell'amia).

Finirò questo confronto per gli archi superiori, ponendo la quistione: se il loro svilupparsi prima degli inferiori può mettersi in rapporto col fatto che nei ciclostomi « die untere Bogen sind rudimentär und auf ein Art dem Schwanz beschränkt » (Ge- « genbaur), e ne' dipnoi, nelle chimere e nei notidanidi più bassi « ist die erste « Andeutung einer vertebralen Einschnürung den Basen der Neuraphophysen anzu- « sehen » (Hasse).

Per questi ultimi, le cognizioni sullo sviluppo sono difettose, e però al presente il nodo non si può sgroppare; lo stesso ripetasi pei ciclostomi, vuoi per l'insufficienza delle cognizioni, vuoi perchè il nostro giudizio è reso difficile da un nuovo elemento, cioè dal parassitismo che è agente di riduzioni.

Passo a far le comparazioni per gli archi inferiori.

Le divergenze che ho trovate negli archi superiori si verificano ancor maggiori per i pezzi ora in discorso.

Che gli archi trasversi siano omologhi in tutti i pesci pare incontrastabile; è contrastato invece se gli archi inferiori e se le coste sieno ovunque omologhe.

Nei ganoidi ossei è evidentissimo che sulla parte caudale della colonna vertebrale, le coste passano gradualmente alla forma d'archi inferiori; questi dapprima sono in connessione col corpo della vertebra, come le vere coste, ma poi verso l'estremità della coda vi si saldano. Il passaggio graduale da coste ad archi inferiori, cioè dire, ad uno stato non ancora differenziato, è qui incontrastabilmente evidente.

Perciò comincio a stabilire che gli archi inferiori dei teleostei non sono omologhi a quelli dei ganoidi ossei. Questa differenza a me fa molto meno meraviglia che a Balfour, perchè ho sott'occhio il vero grado di parentela dei pesci in discorso, come ho di sopra accennato.

Non così chiaro è il rapporto degli archi inferiori dei teleostei con quelli dei selachi e degli sturioni. Sono molto manchevoli gli studî fin qui fatti sovra a queste ultime due classi; perciò io mi limito a provvisoriamente avvicinare i loro archi inferiori a quelli dei ganoidi ossei e differenziarli da quelli dei teleostei, come ha fatto Gegenbaur.

Ho già lasciato supporre che le coste sieno omologhe in tutti i pesci, anzi in tutti i vertebrati; devo ora giustificarmi.

Nell'apprezzare quelle parti dello scheletro dei vertebrati, che comunemente si dicono coste, Gegenbaur e Goette sono diametralmente opposti. Questi, quasi dimenticando che lo scopo dell'anatomia comparata è il trovare il legame tra oggetti che a prima vista sembrano disparati, tende a distinguere, in base alla posizione ed alla inserzione sulla colonna vertebrale, molte specie di coste, che non ritiene omologhe l'una all'altra e cioè:

1° Coste dei selachi.

2° Coste dei teleostei.

3° Coste degli anfibî; queste sono omologhe alle coste superiori degli amnioti ed a certe reste dei teleostei.

4° Coste inferiori degli amnioti.

5° (?) Coste sternali.

Gegenbaur invece s'impadronisce d'un concetto già da altri avanzato, e lo svolge in modo che concentra in un unico fuoco tutti questi elementi, che in apparenza sono affatto differenti.

Col nome di coste disegna Gegenbaur que' pezzi scheletrici, i quali derivano da archi inferiori e rimangono in connessione mobile colla colonna vertebrale, abbracciando uno spazio subvertebrale. Questo spazio dividesi in due porzioni distinte, in quanto alla capacità ed agli organi contenuti. La porzione anteriore è la cavità del corpo; la posteriore costituisce l'angusto canal caudale. Tali sono i rapporti che troviamo nei pesci, nei quali, com'è noto, regnano le condizioni più indifferenti, in quanto alla segmentazione del corpo.

La comparazione del contenuto delle due porzioni dello spazio subvertebrale dà a

conoscere una differenza del loro volume. Mentre nel canale caudale stanno organi di volume poco variabile, possono verificarsi invece, negli organi della cavità del corpo, ragguardevoli variazioni di volume, sovente dipendenti da un regolare avvicendarsi di pienezza e di vacuità. A queste condizioni corrisponde la disposizione degli archi inferiori. Essi appaiono come prolungamenti immediati delle vertebre nella regione caudale e sono immobili; mentre nella regione addominale, adattandosi al volume variabile dello spazio da essi abbracciato, sono separati dalle vertebre ed articolati sui loro corpi, o sui processi che partono da questi (processi trasversi).

Quindi (continuo a riferir i concetti di Gegenbaur) le coste si considerano come differenziazioni del sistema degli archi inferiori, dei quali, secondo l'estensione della cavità addominale lungo la colonna vertebrale, un numero, maggiore o minore, assume forma più libera (coste).

Queste vedute danno adito a considerare gli archi inferiori, che si comportano a mo' di coste, senza però abbracciar la cavità del corpo, non più come formazioni primitive, ma come pezzi che furono una volta coste e quindi presuppongono una maggior estensione della cavità viscerale.

Così Gegenbaur viene ad omologhizzare le coste in tutti i vertebrati.

Or bene per quale delle due opinioni (cioè dire per Goette, ovvero per Gegenbaur) parlano i fatti da me precedentemente esposti?

I rapporti che le coste de' selachi hanno con i processi trasversi durante lo sviluppo, se ci affidiamo ad alcune sommarie notizie di Balfour, ci permettono d'identificarle con quelle de' teleostei (eccezion fatta delle ultime coste, che ne' selachi si sviluppano come le anteriori); e, specificando, la cartilagine della costa al primo apparire è indipendente dalla cartilagine dell'arco trasverso, poscia fondesi con questa ed infine se ne distacca.

Sta però il fatto che le coste de' selachi sono quasi sempre nel setto orizzontale, che divide la musculatura dorsale dalla ventrale. Ciò stabilisce una divergenza, che però non pare fondamentale, dacchè queste coste dei selachi, non soltanto corrispondono al setto orizzontale, ma anche ai setti intermusculari tra i miocommi. Orbene a questi stessi setti corrispondono anche le coste dei teleostei; e, se si suppone che le coste si spostino dentro i setti, allontanandosi così dal limite peritoneale, agevolmente si passa dalla condizione dei teleostei a quella de' selachi. È difficile, nello stato attuale delle nostre cognizioni, dare una ragione di questo spostamento. Bisognerebbe ponderare il decorso dei nervi e l'ordinamento della musculatura (punti non ancora ben studiati) e la posizione del setto orizzontale (che ne' selachi è più basso). Gran peso dovrebbesi concedere fors' anche a ciò che le coste sono ne' selachi relativamente rudimentali, cioè più sviluppate nell' embrione che nell'adulto. Forse con questo fatto ha attinenza la scomparsa della vescica aerea, che è accaduta ne' selachi (in alcuni verisimilmente esiste in istato rudimentale) [1].

Tutto considerato, inclino a omologhizzare con Gegenbaur le coste de' selachi con quelle dei teleostei.

[1] Mi pare che la vescica aerea abbia grande influenza sullo sviluppo delle coste. Aggiungo che ho cerziorato che quella si sviluppa prima di queste.

Sembra che ne' giovani accipenseridi le coste abbiano colla cavità addominale rapporti simili a quelli offerti dai teleostei; ci sono fors' anche simiglianze di struttura (il presentarsi della cartilagine della costa sciolta in varî pezzi, l'abbondanza di cartilagine all' estremo distale, la tendenza delle coste a presentar curve in vario senso ecc.).

Goette crede che quelle reste laterali, le quali s' attaccano costantemente ai processi trasversi, siano omologhe alle coste de' selachi. Con ciò viene a far nascere una distinzione fondamentale tra le reste laterali ad inserzione costante e quelle ad inserzione varia! Con ciò separa profondamente anche le reste laterali da tutte le altre!

Contro a Goette parla anche la storia dello sviluppo delle coste e delle reste. Le vere coste de' teleostei e le coste de' selachi, nel loro sviluppo, assumono uguali rapporti cogli archi inferiori; lo sviluppo delle reste è assai tardivo in confronto colle vere coste; infine le coste si preformano cartilaginee e invece le reste così non si preformano maî. L'eccezione offerta a quest' ultima regola dal monacanto, è inconcludente; Goette stesso nota che nel corpo della vertebra di questa forma molto aberrante nasce, com' era già noto, ad es. per l'ortagorisco, un tessuto cartilaginoide, « zwischen den zuerst entstandenen Knochenleisten » tessuto, ch' egli stesso non trova paragonabile a quello della vertebra de' selachi. È verosimile che un tal tessuto si sviluppi anche nelle reste; perchè qui dovrà avere una significazione grande, laddove, nel corpo della vertebra, come ho detto, per parere stesso di Goette, è inconcludente? Forse Goette troverà più forte appoggio nelle cartilagini intermuscolari di Bruch; benchè a me non riesca punto chiaro il significato di queste cartilagini, pure mi sembra di poter fin d' ora ammettere che esse non sono omologhe alle reste; mi confortano in quest' opinione due argomenti: 1° le reste ossee, od osteoidi, in nessun caso si preformano cartilaginee; 2° le cartilagini intermuscolari non ossificano mai.

Infine lo sviluppo tardivo delle reste forma un altro argomento contro Goette [1].

Ci rimane di discutere l'omologia delle coste dei teleostei con quelle dei vertebrati superiori.

Un caposaldo per la nostra discussione ci vien offerto dal fatto che le coste si sviluppano indipendentemente, se si parla di coste soltanto, quando la cartilagine è già formata; ciò verificasi in tutti i vertebrati, come risulta dalle ricerche di Fick, Born, Hasse e Bruch per i vertebrati superiori, da quelle di Balfour per i plagiostomi, e dalle mie in fine per i teleostei.

Goette ha obbiettato che la posizione e l' inserzione delle coste è molto differente nei varî vertebrati.

Quanto alla posizione, ho già toccato alquante cose che ponno forse applicarsi anche agli anfibî, essendochè le coste di questi per la posizione s'accordano con quelle dei selachi. Quanto all' inserzione, ha già notato Gegenbaur che si può spiegare il divario tra gli anfibî e i selachi, supponendo che gli accenni degli archi inferiori al tronco acquistino una posizione laterale rispetto alla corda e che gradualmente passino negli

[1] L'epoca dello sviluppo, la variabilità di forma e di rapporti, la posizione ec. impediscono qualunque confronto delle cartilagini intermuscolari colle coste de' selachi.

accenni degli archi superiori. Questa supposizione è confortata da una tendenza, che riscontrasi nei pesci: è una tendenza degli archi inferiori ad avvicinarsi agli archi superiori; essa è in rapporto coll'allargamento laterale della cavità dell'addome.

Così componendo le cose, mi pare che le obbiezioni di Goette non siano inoppugnabili; per tutto ciò, l'omologia tra le coste degli anfibî e quelle dei pesci mi sembra verosimile. Ciò ammesso, non mi par difficile di poter stabilire l'omologia delle coste de' selachi e de' teleostei con quelle degli altri vertebrati superiori. Non è quì il luogo di estenderci di più sull'argomento perchè in ogni caso ei non si tratta di dedurre direttamente le coste dei vertebrati superiori da quelli dei teleostei; lo che ci è vietato dalle affinità sovraccennate.

§ 3. *Corpo vertebrale.*

In parte l'argomento venne già trattato a proposito delle membrane della corda. Nei selachi il corpo vertebrale è cartilagineo e si sviluppa dalle membrane della corda. Nei teleostei questa cartilagine è soppressa e si trova invece un tessuto osseo che si sviluppa al di fuori della corda. Possiamo attribuire la soppressione alla legge dell'accorciamento di sviluppo e ritenere il tessuto osseo una nuova formazione, come dirò più innanzi.

Nella chimera le membrane della corda contengono cartilagine, che però non è segmentata in corpi vertebrali; le sue condizioni perciò sono molto lontane da quelle dei teleostei.

Press'a poco i dipnoi si comportano come gli olocefali.

Nello sturione non si forma un corpo vertebrale indipendentemente dagli archi e press'a poco le cose permangono come sono transitoriamente nell'embrione dei teleostei, prima che si sviluppi il corpo vertebrale; con questo solo divario che, cioè, gli archi prendono ne' selachi un'estensione molto maggiore che ne' teleostei.

I ganoidi ossei (amia e polittero) probabilmente offrono stadî di passaggio dalle condizioni de' selachi a quelle dei teleostei, ma sfortunatamente le ricerche fin qui fatte sono imperfette [1].

B. Considerazioni sull'origine dello scheletro cartilagineo.

Nello sviluppo del teleosteo v' ha un momento, in cui la musculatura è già divisa in porzioni dorsali e ventrali ed in miocommi, mentre dello scheletro non esiste che la corda, la quale non offre diretto attacco alla musculatura. La musculatura

[1] Qui giova toccare della forma a doppio cono, che assumono le vertebre; Goette la ritiene *Folge der durch die Wirbelbogenbasen bedingten vertebralen Beschränkung des Wachstums der Chorda und ihrer Scheide.* Quel ch'io ho veduto ne' teleostei non accredita punto cotale opinione; ed in vero basta ricordare la poca estensione degli archi e l'epoca in cui comincia il così detto strozzamento della corda nelle regioni vertebrali. Accogliendo l'idea di Goette ne verrebbe per conseguenza che la corda della chimera e dei dipnoi non potrebbe conservare calibro uniforme. La spiegazione di Goette andrebbe forse pe' selachi, ma io non posso credere ad una spiegazione speciale a questi, d'un fenomeno generale a tutte le classi dei pesci.

In un polittero lungo dodici cm. il doppio cono era del tutto osseo nella parte trasversale mediana della vertebra e nelle parti estreme di questa possedea uno strato di cartilagine; il quale precisamente riposava a ridosso delle membrane della corda.

perciò, in questo periodo, rappresenta insieme coll' integumento una sorta di sacco musculo-cutaneo, sotto parecchi riguardi analogo a quello di molti invertebrati segmentati.

Questa condizione transitoria dei teleostei è permanente nell'anfiosso, il cui scheletro assile è appunto costituito dalla corda, la quale non porge attacco diretto alla muscolatura. Ancora ne' ciclostomi la maggior parte della musculatura permane senza rapporti collo scheletro.

I teleostei, nel periodo poc'anzi in discorso, a livello de' legamenti intermusculari, presentano attorno alla corda due spazî dorsali e due ventrali, occupati da connettivo embrionale; più tardi, in mezzo a questo connettivo si sviluppa la cartilagine degli archi; comincia con pochissime cellule e con pochissima sostanza intercellulare. Egli è evidente che, finchè questa cartilagine non ha raggiunto un certo volume, non può nè difendere parti delicate, nè offrire appoggio ai muscoli, ossia non può funzionare così come funzionerà più tardi (¹).

Se congetturiamo che una simile condizione di cose dev' essersi ripetuta anche filogeneticamente, siamo trascinati a concludere, o che questo scheletro abbia cominciato casualmente e senza funzione, ovvero che al suo cominciare abbia avuto una funzione diversa di quelle che esercita attualmente. Soltanto la seconda proposizione mi pare accettabile; specialmente Gegenbaur ha già dimostrato che nella storia dello sviluppo degli organi, un cambiamento di funzione è uno dei principî più razionali e più costanti a verificarsi in natura.

Qual può essere stata quest'altra funzione?

Ecco una supposizione: via via che l'animale cresce, le cellule embrionali, che riempiono i quattro cennati spazî, invece di moltiplicarsi attivamente, com'è necessario, per non lasciar sorgere delle lacune, segregano sostanza intercellulare.

Questa secrezione si può interpretare come un' economia di forze. In svariatissime parti di svariatissimi organismi vediamo ripetersi un simile fenomono; che potrebbe fors'anche essere conseguenza di graduale perdita della facoltà riproduttrice delle cellule man mano che l'organismo diventa adulto.

In questo senso, la funzione della cartilagine in discorso al primo svilupparsi, si ridurrebbe a quella di riempire le lacune.

Con ciò non è ancora detto perchè siasi sviluppata cartilagine, invece che altro tessuto economico.

Questa incognita riceve forse un raggio di luce dall' infrascritta considerazione. Io non escludo che in una parte delle supposte forme senza vero scheletro interno siasi sviluppato, per es., adipe; è naturale però che quelle, in cui aveva cominciato la cartilagine, ad un certo momento (quando, cioè, la cartilagine era cresciuta fino a trovarsi a ridosso della musculatura, la quale perciò dovette attaccarvisi) abbiano

(¹) Nell'anfiosso le condizioni sono differenti; nè c'è da stupirsene, quando si pensa che quest'animale, non ostante la sua parentela colla forma stipite dei vertebrati, è molto aberrante. La corda, secondo Rolph, ha due membrane amorfe: l'esterna è rivestita da un endotelio, « *nur sie (aussere Chordascheide) geht durch Aussendung dorsaler und ventraler Fortsätze in die Bildung der Neurapophisen und Haemapophysen ein* ».

ottenuto un gran vantaggio nella lotta per l'esistenza. Naturalmente si tratta di un processo, a così dire, infinitamente graduale e perciò lento come i milleni.

Ardisco questi ragionamenti, perchè mi sento sorretto anche da ciò che si riscontra nelle altre classi di pesci.

I quattro pezzi cartilaginei sono fondamentali in tutte; se si pensa quali e quante divergenze s'incontrano in queste classi, non si può disconoscere il significato chiarissimo della convergenza in un punto essenziale; vi troviamo anzi sodo terreno per l'ipotesi che anche ne' vertebrati superiori questi quattro pezzi abbiano una volta esistito; che siansi fusi insieme, come accade già in molti pesci; e che ontogeneticamente ripetasi oggidì soltanto quest'ultimo stadio.

Un momento in cui gli archi non funzionano, nè come organo di protezione, nè come sostegni dei muscoli, verificasi probabilissimamente in tutti i pesci; se nessuno, per quel ch'io so, l'ha registrato, egli è stato perchè nessuno l'ebbe creduto degno di menzione.

Una volta pronunciatasi la funzione, ossia una volta che questa cartilagine ha acquistato la dignità di vero scheletro, perchè pezzi di essa s'avanzano tra le masse musculari; allora è nata una condizione, per cui viene a sciogliersi l'uniformità primitiva della musculatura; onde consegue il formarsi di una musculatura propria dello scheletro, mentre il resto del sistema muscolare che non contrae rapporti collo scheletro, resta musculatura cutanea.

È così sorto anche il motivo di uno sviluppo sempre crescente di questo scheletro; perchè anche qui, come in molte altre parti, la musculatura diventa a sua volta causa del maggior complicarsi dello scheletro. Il connettivo intermusculare naturalmente è indice della via che deve tenere questo scheletro.

I pezzi scheletrici (continuo le supposizioni) vanno sempre più allungandosi; finchè viene un momento, in cui la loro segmentazione diventa utile, e la segmentazione probabilmente accade ne' punti, che pe' movimenti subiscono maggiore piegatura. Da questa segmentazione posso ripetere i portapinne e le coste. Come la separazione del portapinna giova alla mobilità della pinna, così la mobilità delle coste è vantaggiosa correlazione coll'ampiezza variabile del contenuto della cavità peritoneale.

Militano in favore di queste presunte segmentazioni gl'infrascritti fatti:

1° Segmentazioni simili che sono già conosciute in altre parti dello scheletro, per es. nello scheletro degli arti;

2° Una segmentazione, per così dire, nascente, che riscontrasi negli archi superiori, per es., dei clupeidi;

3° L'apofisi spinosa, mancante al tronco in molti teleostei, e supplita, si può dire, da un pezzo distaccato.

Parla per l'ipotesi che io sostengo sull'origine dei portapinne, il loro rapporto intimo coi processi spinosi [1].

La spiegazione da me adottata sull'origine delle coste è rinvigorita anche dai seguenti argomenti:

[1] A cui sono saldati per sutura nell'ipostoma; fatto importante perchè l'ipostoma, come tutti i siluridi, è una forma primitiva.

1° Il passaggio graduale delle coste coi loro archi trasversi ad archi inferiori indifferenti, quale si osserva nei ganoidi ossei e quale si riscontra meno chiaro, ma pur palese, nei selachi e negli accipenseridi.

2° I rapporti costanti delle coste cogli archi trasversi.

Il fatto che le coste ed i portapinne si sviluppano indipendentemente dagli archi (fatto che però non è provato per tutti i pesci) non può contradirci, perchè nei vertebrati forniti di coste, abbiamo delle forme elevatissime, nelle quali il fatto dell'esistenza già separata dell'abbozzo embrionale può rappresentare l'eredità di una disposizione anticamente acquisita.

Con queste ipotesi, lo schema dello scheletro assile diventa assai semplice; se si pensa che dallo scheletro assile è deducibile quello del capo e che da quest'ultimo è deducibile quello degli archi, si vede a che semplicità ed a che umile origine può ridursi quella così complessa macchina, anzi quel labirinto, che è lo scheletro d'un vertebrato (1).

C. Considerazioni sullo sviluppo dello scheletro osseo.

Egli è noto che intorno alla vera patria dello scheletro osseo, le opinioni sono profondamente divise: alcuni tendono al monismo, altri sostengono un dualismo.

Perchè in siffatta quistione, lo scheletro osseo dei teleostei offre argomenti preziosi, egli è naturale ch' io tenti di far passare i fatti da me raccolti alla stregua delle due ipotesi.

Non mi sembra lungaggine l'accennare allo stato attuale della quistione.

Kölliker (2) raccolse le sue idee nelle infrascritte proposizioni:

« 1) Die Unterschide der primären oder primordialen und der Deck- oder Beleg-« knochen (secundären Knochen) sind vom morphologischen Gesichtspuncte aus scharf « und durchgreifend. Die ersteren sind Verknöcherungen des (knorpeligen) Primor-« dialskelettes, die letzeren, ausserhalb dieses Skelettes gebildet und mit Wahr-« scheinlichkeit alle Haut- oder Schleimhautossificationen.

« 2) Die Deckknochen sind nie knorpelig vorgebildet, die primordialen Knochen « dagegen ohne Ausnahme als Knorpel praeformirt.

« 3) Die Art und Weise der Bildung des Knochengewebes ist bei beiderlei « Knochen gleich.

« 4) Das primordiale Skelett verknöchert bei den niederen Wirbelthieren z. « Th. nur perichondral, dann perichondral und endochondral und bei den Säugern « z. Th. ebenso, z. Th. in erster Linie endochondral. — Die Ausdrücke perichon-« drale Knochen und Deckknochen sind nicht gleichbedeutend ».

Le opinioni di O. Hertwig (3) non si slontanano molto da queste di Köllicher, come provano i passi che qui sotto riporto.

(1) Le idee svolte in questo capitolo tolgono di mezzo una delle principali obbiezioni sollevate, per es., dal nostro Mantegazza contro l'evoluzionismo, quella cioè che riguarda *gli stadi incipienti di un organo di là da venire.*

(2) *Entwickelung des Menschen* (1879) pag. 464.

(3) *Ueber d. Zahnsystem der Amphibien* (1874) in Archiv f. mikr. Anat. XI Band. Supplementheft, pag. 200.

« Die Knochen des Schädels sind auf zwei verschiedenen Wegen entstanden.

« Ein Theil derselben lässt sich von einem Hautskelet und zwar von Bildungen « ableiten, welche bei den Vorfahren der genannten Wirbelthierclassen, als Schüpp- « chen, oder Zähnchen über die gesammte Körperoberfläche und über die gesammte « Mundhöhle bis zum Anfang des Oesophagus ein zusammenhängenden Panzer bil- « deten . . . . Die so entstandenen Knochen unterscheidet man als secundäre oder als « Belegknochen des Primordialcranium (membrane bones).

« Der übrige Theil der Schädelknochen, die sogenanten primären oder endochon- « drostotischen (cartilage bones) sind ossificirte Abschnitte des Primordialcranium « selbst. Ihre Genese hängt mit Verknöcherungprocessen zusammen, welche das ge- « sammte ursprünglich knorpelien Axenskelett betreffen, und an demselben zur Entste- « hung der knöcherne Wirbel geführt haben ».

Gegenbaur, dopo una lunga e profonda discussione di queste opinioni di O. Hertwig, conchiude (¹):

« Aber wir haben immerhin zwischen Knochen zu unterscheiden, welche aus dem « Hautskelet hervorgehen, und solchen, für welche das nicht erwiesen ist. Die ersteren « will ich als dermatogene, die letzeren als autogene Knochen bezeichnen. Ich denke « dass schon in der Negation, auf welcher der Begriff dieser einen Gruppe sich « aufbant, die Aufforderung zu einer vorsichtigen Behandlung liegt. Dennwenn wir auch « für's erste nicht erkennen worin jene an der Seitenwand des Craniums entstehenden « Knochen ihren Ursprung besitzen, so wenig uns ein solcher für das Occipitale « Basilare oder die Wirbelkörper bekannt ist, so ist desshalb doch nicht ausgeschlos- « sen, dass auch für diese Autochtonen noch eine Urheimath gefunden werde ».

Questa patria originaria, come Gegenbaur lascia chiaramente travedere in molti punti de' suoi lavori, sarebbe ancora il derma; sicchè, nella sua opinione, tutte le ossa sarebbero dermatogene. Uno dei fatti più conclusivi, messi innanzi da questo lodato autore, riguarda lo squammoso de' teleostei; quest'osso compare indubbiamente secondario, ma poi si trasforma in primario, « indem er sich mit dem Knorpel enge verbindet, in den Knorpel einwächst » (²).

Dopo questa escursione storica, riesce meno difficile un giusto apprezzamento di quel ch'io ho rilevato nella colonna vertebrale de' teleostei.

Ho escluso una partecipazione delle membrane proprie della corda alla formazione delle ossa; non è dunque stata la corda il punto di partenza del corpo vertebrale osseo. Questo fatto rende indubbiamente più piana la via a chi vuol accostarsi alla tesi difesa da Gegenbaur.

Ho dimostrato che ossa indubbiamente primordiali (archi vertebrali) possono indifferentemente svilupparsi con, o senza preformarsi cartilaginei. Ciò stabilisce una grande eccezione alla regola di Köllicher.

Anche le seguenti considerazioni favoriscono il monismo: 1° Egli esiste un parallelismo tra le ossa primordiali del cranio e la colonna vertebrale; cioè quà come là,

(¹) *Ueber das Kopfskelet von Alepocephalus* (1878) von Gegenbaur in Morf. Jahrb. 4 Suppl. (Copia separata) pag. 46.

(²) Op. cit. p. 38.

tutte le ossificazioni cominciano perincondrali; qua come là, conservasi della cartilagine, nelle ossa dell'adulto, ed in diversa proporzione ne' diversi teleostei.

Le prove di questo parallelismo scaturiscono ancora più evidenti, stabilendo comparazioni pei singoli casi: per es. tra il cranio e la colonna vertebrale del luccio (¹).

2° Ho ragioni per credere che gli archi superiori del tronco nel luccio e nel salmone in gran parte (la distale, quella cioè, al di là del legamento vertebrale superiore, ossia quella che sta a lato del portapinne) siansi sviluppati senza preformazione cartilaginea; e di fatto in questa parte non si trovano cartilaginei nè ontogeneticamente nè filogeneticamente; ragione di più per ammettere che non siano mai stati cartilaginei. Per tutto ciò si è autorizzati a credere che gli archi siano in certo modo ossa in parte primarie ed in parte secondarie.

3° Lo scheletro osseo, per un' epoca embrionale non corta e per una quantità non inconsiderevole, è ne' teleostei rappresentato da un tessuto senza cellule, che trova fino ad un certo punto riscontro nella dentina, o nel cemento de' dentelli cutanei dei selacei.

Aggiungasi che un tessuto molto simile può forse formare anche tutto lo scheletro degli adulti, comprese le reste (per es. nel luccio).

Köllicher, che ha già osservato una parte di questi fatti, dopo estesissime ricerche ha conchiuso che « die Gruppe, welche ächtes Knochengewebe besitzt, die grosse « Mehrzahl der höher organisirten Knochenfische in sich schliesst ».

Egli inoltre vuole che esista un'analogia dello scheletro interno con quello integumentale sicchè « kein Fisch, dessen inneres Skelet der Knochen-Körperchen ent- « behrt, solche in der Haut zeigt, wogegen allerdings von den Fischen mit ächtem « Knochengewebe lange nicht alle auch in den Schuppen solches besitzen ».

A primo aspetto possono parer contrarî al concetto del monismo i seguenti fatti:

1° l'ossificazione degli archi è primitivamente indipendente da quella del corpo vertebrale; chi può indicare la strada, per cui ossificazioni cutanee, o mucose, possono esser arrivate al corpo vertebrale?

2° le reste talvolta sono rappresentate da semplici tendini in certi miocommi ed in ispecie affini; par naturale di concedere che il connettivo siasi man mano ossificato senza invocare l'approfondamento di ossificazioni cutanee. Questa concessione acquisterebbe special valore per i rapporti che certe reste hanno con certi archi (nel luccio, nell'alausa).

(¹) A quest'ordine di questioni si collega quella che agita il perchè alcune parti della colonna vertebrale si preformano cartilaginee, ed altre no. Tutto mi conduce a credere che, là dove compare ancora cartilagine, una volta essa siavi esistita in maggior quantità di quel che dove ora è anche ontogeneticamente scomparsa. Là perciò l'osso nella lotta per l'esistenza contro la cartilagine ha trovato maggior resistenza; e la cartilagine non ha ancora ceduto. È lecito presumere che verrà tempo, in cui nella colonna vertebrale dei teleostei esisterà molto meno cartilagine di quel che oggidì. I teleostei, con molta cartilagine, in generale, sono forse già oggi rari a confronto a quelli in condizioni contrarie (basta accennare il salmone rimpetto ai ciprinoidi).

È qui luogo di ricordare che lo sviluppo in complesso è ne' ciprinoidi, assai più corto che nel salmone, e il luccio sta di mezzo tra il salmone ed i ciprinoidi.

E l'una e l'altra obbiezione però non sono gravi tanto da mettere in forse l'idea monistica; provano solamente che i fatti necessarî a sciogliere il problema debbonsi ricercare su animali più primitivi, che i teleostei [1].

LETTERATURA

1. Balfour, *A Monograph on the development of Elasmobranch Fishes.* London, 1878.
2. Id. *A Treatise of Comparative Embryology.* Vol. II. London, 1881.
3. Bruck, *Beiträge z. Entwick. d. Knochensystems*: in Neue Denkschriften d. allg. schweiz. Gesellschaft f. d. gesam. Naturwiss. I Bd.
4. Cartier, *Beiträge z. Enkwck. d. Wirbelsaüle*: in Zeit. f. wiss. Zool. Bd. XXV. suppl. 1875.
5. Della Valle, *Nuove contrib. a. studio d. Ascidie composte*: in R. Accad. dei Lincei. Anno 1880-81. S. III. Vol. X. (Classe di scienze fisiche ecc.).
6. Fick: in Zeit. f. Anat. u. Physiol. 1879.
4. Gegenbaur. *Untersuch. z. vergleich Analomie d. Wirbelsaüle b. Amphibien u. Reptilien* Leipzig. 1862.
8. Id. *Ueber d. Entwick. d. Wirbelsaüle d. Lepidostens* etc.: in der Jenaischen Zeit. 1863.
9. Id. *Ueber primäre u. secundäre Knochenbildung* etc.: in der Jenaischen Zeit. 1867.
10. Id. *Ueber d. Skeletsgewebe d. Cyclostomen*; in der Jenaischen Zeit. 1870.
11. Id. *Untersuch. z. vergleich. Anatomie der Wirbelthiere.* III H. *Das Kopfskelet der Selachier.* 1872.
12. Id. *Einige Bemerk. z. Götte's Entwick. d. Unke*: in Morph. Jahrb. 1, pag. 309 e seg.
13. Id. *Ueber d. Kopfskelet von Alepocephalus*: in Morph. Jahrb. 1878, 4. Suppl.
14. Id. *Grundriss d. vergleich. Anat.* 2 Auf. Leipzig, 1878.
15. Götte, *Entwick. d. Unke.* Leipzig, 1875.
16. Id. *D. Wirbelsaüle u. ihre Anhänge (Beiträge z. vergleich. Morphol. d. Skeletsystems d. Wirbelthiere).* in Archiv f. mikr. Anat. 1878-79. Bd. XV e XVI. 1878-79.
17. Hasse u. Schwark, *Studien z. vergleich. Anat. d. Wirbelsaüle* etc.: in Hasse. *Anatomische Studien.* 1872.
18. Hasse: in Zool. Anzeiger. 1879.
19. Id. *D. natürliche System d. Elasmobranchier.* Jena, 1879-81-82.
20. (O.) Hertwig, *Ueber d. Zahnsystem d. Amphibien* etc.: in Archiv. f. mikr. Anat. Vol. XI. Supplementheft 1874.
21. Id. *Ueber Bau u. Entwick. d. Placoidschuppen* etc.: in der Jenaische Zeit. 1874.
22. Id. *Ueber d. Hautskelet der Fische*: in Morph. Jahrb. 1876, 1879, 1881.
23. Hubrecht, *Fische.* 1-3 L. VI B. 1 Abth.: in Bronn's Klassen etc.
24. Huxley, *Handbuch d. Anat. d. Wirbelthiere.* Breslau, 1873.
25. Köllicher: in Verhandl. d. physic. med. Gesell. in Würzburg. Bd. IX. 1859.
26. Id. *Ueber d. Beziehungen d. Chorda dorsalis z. Bildung d. Wirbel d. Selachier* etc.: in Verhand. etc. in Würzburg. Bd. X. 1860.
27. Id. *Ueber d. Ende d. Wirbelsaüle d. Ganoiden in einigen Teleostiern* Leipzig. 1860.
28. Id. *Weitere Beobach. ü. d. Wirbel d. Selachier*: in Abhand. d. Senckenberg. naturf. Gesell. Bd. V, 1864-65.

[1] Non alludo alle pretese ossa della colonna vertebrale de' selachi (Goette, Hasse); esse forse non sono ossa, ma cartilagine modificata. Sezionando un embrione per es. di *scyllium* si vede che lo strato ritenuto osseo (il *Knochenrinde* degli archi) è continuo colla cartilagine sicchè non si può dire dove l'una comincia e l'altro finisce; chiaro e netto è invece il limite tra la cartilagine e l'osso ne' teleostei (e posso aggiungere anche nel polittero e nel protottero) ed il tessuto osseo vero è preceduto da tessuto osteoide, cioè senza cellule.

29. Id. *Kritische Bemerk. z. Geschichte d. Untersuch. ü. d. Scheiden d. Chorda dorsalis*; in Verhand. cec. in Würzburg. Neue Folge. Bd. III.1872.
30. Id. *Enwick d. Menschen u. d. höheren Thiere.* 1876-79.
31. Leydig, *Beiträge z. mikr. Anat. und En.wick. d. Rochen u. Haie.* Leipzig, 1852.
32. Lotz, *Ueber d. Bau d. Schwanzwirbelsaüle d. Salmoniden* etc.; in Zeit. f. wiss. Zool. Bd. XIV.
33. Mantegazza, *Igiene dell'amore.* Milano, 1878, pag. 243.
34. (A) Müller, *Beobacht. z. vergleich. Anatomie d. Wirbelsaüle*; in Müller's Archiv. 1853.
35. (J.) Müller, *Vergleich. Anatomie d. Myxinoiden.* 5 Bd. Berlin, 1835-45.
36. Owen, *Lectures on the comparat. Anatomy a. Physiology of the Vertebrata.* 3 vol. London. 1865-68.
37. Pouchet, *Du développement du squelette d. poissons osseux*; in Robin et Pouchet: Journ, de l'Anat. etc. 1876-78.
38. Retzius, *Einige Beiträge z. Histol. u. Histoch. d. Chorda dorsalis*: in Arch. f. Anat. u Phys. 1881.
39. Rolph, *Untersuch. u. Amphioxus*; in Morphol. Jahrb. 2.
40. Stannius, *Handbuch d. Anatomie d. Wirbellhiere.* 1 B. *D. Fische.* 1854.
41. Vrolik, *Studien u. d. Verknöcherung u. d. Knochen d. Schädels u. d. Teleostier*; in Niederländischer Arch. f. Zoologie. V. 1.
42. Wiedersheim, *Lehrbuch d. vergleich. Anatomie d. Wirbelthiere.*. I Theil. Jena, 1882.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

In tutte le figure:

a significa aorta.
a' » arco.
ac » articolazione della costa coll'arco (o processo, o apofisi) trasversale.
ace » acetabulo.
ai » arco inferiore.
ai ? » arco inferiore?
as » arco superiore.
as? » arco superiore?
at » arco trasverso.
c » costa.
c' » cartilagine.
c'' » costa?
ca » cavo articolare
cor » corda.
cv » corpo vertebrale.
dco » doppio cono osteoide, od osseo.
g » ganglio spinale.
im » intercalare midollare.
la » lacuna.
lie significa cosidetto legamento intervertebrale esterno (di Köllicher).
lvs » legamento vertebrale superiore.
mc » membrana propria della corda.
me » membrana elastica della corda.
me? » membrana elastica della corda?
ms » midollo spinale.
o » osteoblasti.
p » periostio.
pp » portapinne.
ps » processo spinoso.
r » resta.
s » corpuscoli sanguigni.
se » strato epiteliale.
so » sostanza osteoide.
spc » sostanza propria della corda.
spr » sprone osteoide.
t » tegola.
v » prima vertebra senza coste.

Del pari in tutte le figure la dicitura *di .... g.* significa *uscito dall'uovo da .... giorni.*

Le figure sono copiate colla camera lucida applicata al microscopio Hart. Le due cifre poste dopo le singole spiegazioni delle figure indicano l'ingrandimento, cioè dire la prima indica l'oculare Hart., la seconda l'obbiettivo Hart.

L'osso è stato lasciato in bianco; però dove esso forma una lamella viene segnato da una linea oscura. La cartilagine è spesso indicata da punti disseminati in campo leggermente tinto.

Tavola I.

Riguarda il *Salmo.*

FIG. 1. Arco superiore della regione media del tronco — Fario di 45 g. — 3-8.
» 2. Estremo distale d'una delle ultime apofisi spinose caudali — Salar di 45 g. — 3-8.
» 3. Porzione di una sezione trasversale della parte anteriore del tronco — Fario di 3 g. — 3-8.
» 4. Articolazione costale — sezione trasversa rispetto al corpo dell'animale — regione anteriore del tronco — Fario di 21 g. — 3-8.
» 5. Corda e sue membrane — sezione orizzontale in corrispondenza al tronco — Salar di 45 g. — 3-8.
« 6. Regione critica — Salar di 45 g. — 3-4.
» 7. Parte di una sezione trasversale della regione anteriore del tronco — Salar di 60 g. — 3-8.
» 8. Corda e sue membrane — Sezione orizzontale in corrispondenza al tronco — Salar di 45 g. — 3-4.
» 9. Porzione della metà distale d'una costa — Salar di 45 g. — 3-9.
» 10. Sezione longitudinale di un portapinne in rapporto colla pinna anale — Salar di 45 g. — 3-8.

Tavola II.

Riguarda il *Salmo* e l'*Esox*.

FIG. 1. Parte di una sezione trasversale in corrispondenza alla regione anteriore del tronco — Salar di 45 g. — 3-8.
» 2. Articolazione costale — sezione trasversa rispetto al corpo dell'animale — regione anteriore del tronco — Luccio lungo 60^{cm} — 3-8.
» 3, 4, 5. Estremi distali di tre coste della parte posteriore del tronco — Salar di 50 g. — 3-5.
» 6. Archi trasversi d'una vertebra della regione critica — Fario di 45 g. — 3-5.
» 7. Sezione orizzontale delle porzioni contigue di due vertebre alla regione anteriore del tronco — Luccio lungo 17^{cm} — 3-5.
» 8. Articolazione costale — sezione orizzontale rispetto al corpo dell'animale — regione media del tronco — Salar di 50 g. — 3-8.
» 9. Parte della regione critica — Salar di 50 g. — 3-5.
» 10. Arco superiore e resta corrispendente — regione media del tronco — Salmo di 60 g. — 3-5.
» 11. Sezione orizzontale d'una vertebra della coda — Luccio lungo 60^{cm} — 3-4.

Tavola III.

Riguarda l'*Esox*.

FIG. 1. Articolazione costale — sezione trasversale rispetto al corpo dell'animale — regione anteriore del tronco — Luccio di 30 g. — 3-8.
» 2. Id. — Regione quasi posteriore del tronco — 3-8.
» 3. Arco trasverso — regione posteriore del tronco? — Luccio lungo 15^{cm} — 3-4.
» 4. Porzione di una sezione trasversale della regione anteriore del tronco — Luccio lungo 4^{cm} — 3-4.
» 5. Sezione trasversale di una vertebra della parte media-posteriore del tronco — Luccio lungo 18^{cm} — 3-4.
» 6. Sezione orizzontale dell'articolazione costale alla regione posteriore del tronco — Luccio lungo 4^{cm} — 3-5.
» 7. Sezione orizzontale dell'articolazione costale — Luccio lungo 2^{cm} — 3-8.
» 8. Id. fig. 5. alla regione anteriore della coda.
» 9. Costa rudimentale collocata lontano dal processo trasverso — regione critica — Luccio lungo 5^{cm} — 3-5.
» 10. Porzione di una sezione trasversa della parte anteriore del tronco — Luccio di circa 30 g. — 3-9.
» 11. Porzione di una sezione trasversa della regione anteriore del tronco — Luccio lungo 6^{cm} — 3-5.

Tavola IV.

Riguarda l'*Esox*, il *Salmo* ed i *Cyprinidae*.

FIG. 1. Sezione orizzontale di parte di due vertebre — Fario di 60 g.
» 2. Sezione trasversale delle membrane della corda — Luccio di 17^{cm} — 3-9.
» 3. Sezione trasversale della regione media d'una vertebra del tronco — Luccio di 10^{cm} — 3-8.
» 4. Regione critica — Ciprinoide di 5 ^{cm} — 3-4.
» 5. Una parte del doppio cono — sezione trasversale rispetto al corpo dell'animale — Luccio lungo 15^{cm} — 3-9.
» 6. Sezione trasversale delle membrane della corda — Luccio di 10^{mm} — 3-9.
» 7. Id. fig. 5. in altro punto — 3-9.
» 8. Articolazione costale — sezione trasversale rispetto al corpo dell'animale — regione anteriore del tronco — Luccio di 15^{cm} — 3-8.
» 9. Regione critica — Luccio di 17^{cm} — 3-4.

FIG. 10-11. Sezione d'una lamella osteoide del corpo vertebrale — Luccio di 12cm — 3-9.
» 12. Parte di una sezione trasversa dell'apofisi spinosa — parte media della coda — Luccio di 15cm — 3-8.
» 13-14. Due pezzi in cui s'è rotta una sezione trasversa. La membrana elastica è restata in parte aderente ad un pezzo (13) ed in parte ad un altro (14). Luccio lungo 15cm — 3-8.
» 15. Sezione trasversa d'una costa. — Luccio lungo 15cm — 3-5.
» 16. Sezione trasversa d'una resta — Luccio lungo 15cm — 3-15.

Tavola V.

Riguarda l'*Esox*, i *Cyprinidae* e la *Perca*.

FIG. 1. Sezione obliqua del doppio cono - Luccio di 15cm — 3-8.
» 2. Costa ed arco trasverso — Ciprinoide lungo 15mm — 3-5.
» 3. Sezione obliqua del doppio cono — Luccio di 8cm — 3-8.
» 4. Costa e resta alla regione anteriore del tronco — Perca lunga 3cm — 3-7.
» 5. Parte di una sezione orizzontale alla regione anterione del tronco — Ciprinoide lungo 15mm — 3-8.
» 6. Sezione trasversa della prima vertebra senza coste — Alburno lungo 20mm — 3-5.
» 7. Sezione orizzontale di due vertebre del tronco — Luccio lungo 18cm — 3-4.
» 8. Porzione d'una costa decalcificata: le cellule del tessuto osseo non sono più visibili — Barbo lungo 10cm — 3-8.
» 9. Archi congiungentisi a ponte — Ciprinoide lungo 6cm — 3-4.
» 10. Sezione trasversa della parte posteriore della 6e vertebra — Ciprinoide lungo 6cm 3-4.
» 11. Due vertebre della regione anteriore della coda — Ciprinoide lungo 4cm — 3-5.
» 12. Sezione trasversa della 4a vertebra — Alburno di 12mm — 3-5.
» 13. Parte di una sezione trasversa d'una vertebra della regione media della coda — Alburno di 15mm — 3-8.

Tavola VI.

Riguarda i *Cyprinidae*.

FIG. 1. Regione anteriore del tronco — sezione orizzontale — Alburno di 15mm — 3-8.
» 2. Sezione non perfettamente orizzontale — regione media del tronco — Barbo adulto — 3-8
c = coagulo.
e = strato osteoide recentissimo.
f = cavità artificiale.
» 3. Articolazione costale — sezione trasversale rispetto al corpo dell'animale — Alburno lungo 25mm.
» 4. Sezione non perfettamente orizzontale alla regione media del tronco — Barbo adulto — 3-8.
» 5. Id. in altro punto — 3-4.
» 6. Sezione orizzontale della regione anteriore del tronco — Alburno lungo 35mm — 3-8.
» 7. Porzione di una sezione trasversale della parte media del tronco — Alburno (?) lungo 7cm — 3-8.
» 8. Sezione orizzontale della regione media del tronco — Ciprinoide lungo 25 —mm — 3-8-

Tavola VII.

Riguarda i *Cyprinidae*.

FIG. 1. Sezione trasversale di una vertebra della regione critica — Alburno di 6cm — 3-4.
» 2. Sezione trasversale della parte posteriore della 3a vertebra — Alburno di 25mm — 3-4.
» 3. Sezione trasversale d'una vertebra (senza coste) della regione critica — Alburno di 6cm — 3-4.
» 4. Sezione trasversale della parte posteriore della 1a vertebra — Alburno di 25mm — 3-4.
» 5. Una parte della regione posteriore della coda — Alburno (?) di 25cm — 3-5.

FIG. 6. Sezione trasversale della 2ª vertebra — Alburno di 25mm — 3-4.
» 7. Sezione trasversale della parte anteriore della 1ª vertebra — Alburno di 25mm — 3-4.
» 8. Una vertebra della regione critica — Alburno di 8cm — 3-4.
» 9. Sezione trasversale della parte anteriore della 4ª vertebra — Alburno di 25mm — 3-4.
» 10. Sezione trasversale d'una vertebra della regione media del tronco — Alburno di 6cm — 3-5.
» 11. Sezione trasversale della 5ª vertebra — Ciprinoide di 25mm — 3-4-

Tavola VIII.

Riguarda i *Cyprinidae*.

FIG. 1. Parte distale d'una costa — Ciprinoide di 5cm — 3-5.
» 2. Regione critica — Ciprinoide di 40mm — 3-3.
» 3. Archi superiori delle prime cinque vertebre — Ciprinoidi di 20mm — 2-5.
» 4. Archi superiori della vertebra 5ª e seguenti — Ciprinoide di 15mm — 3-5.
» 5. Una parte della regione critica — Ciprinoide di 40mm — 3-3.
» 6. Una parte della regione critica — Ciprinoide di 15mm — 3-8.

Lit. Bruno e Salomone Roma

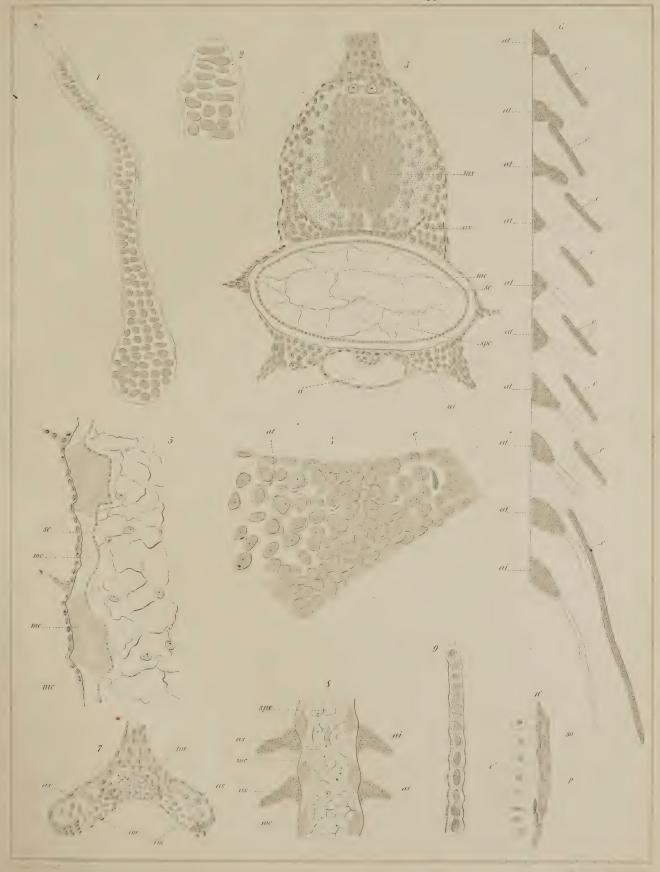
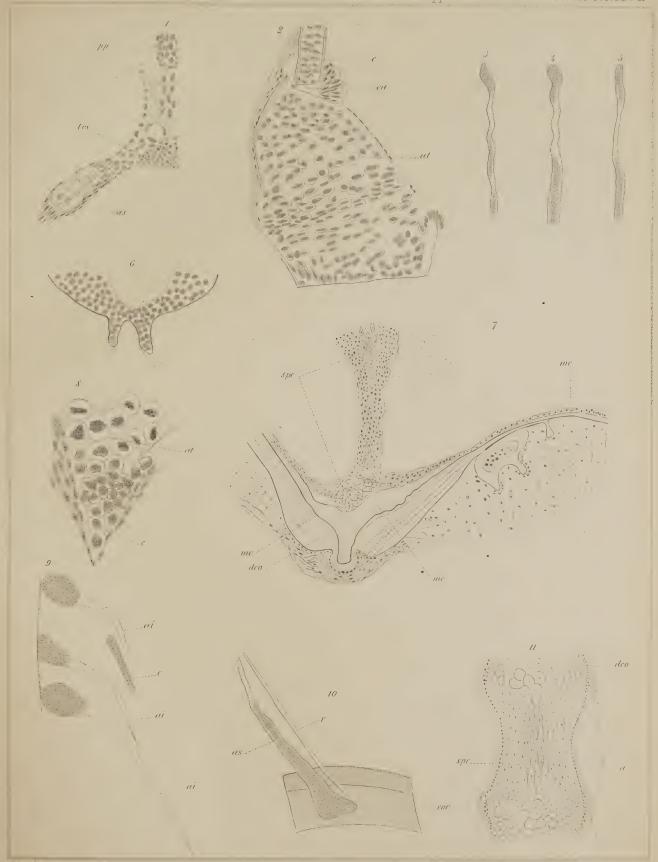
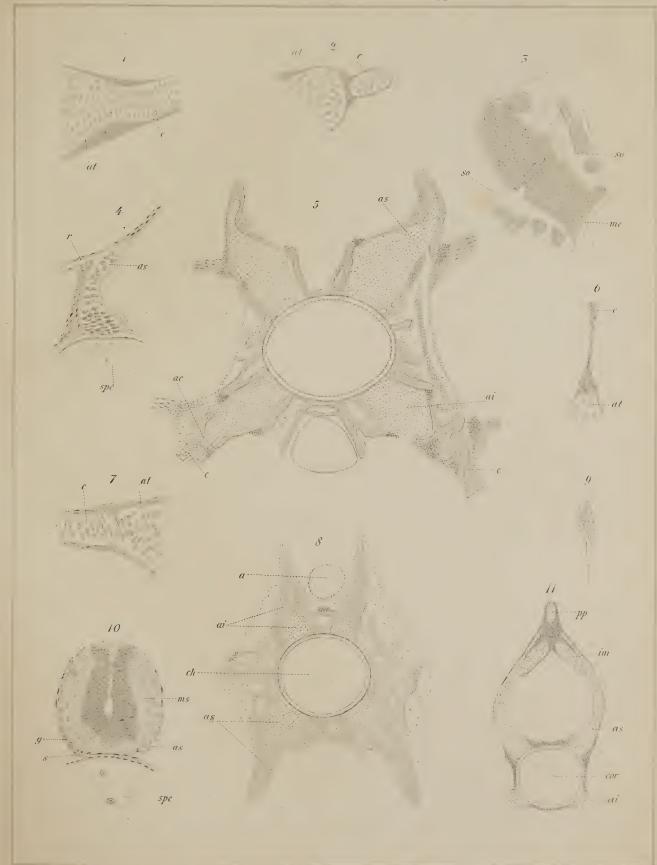
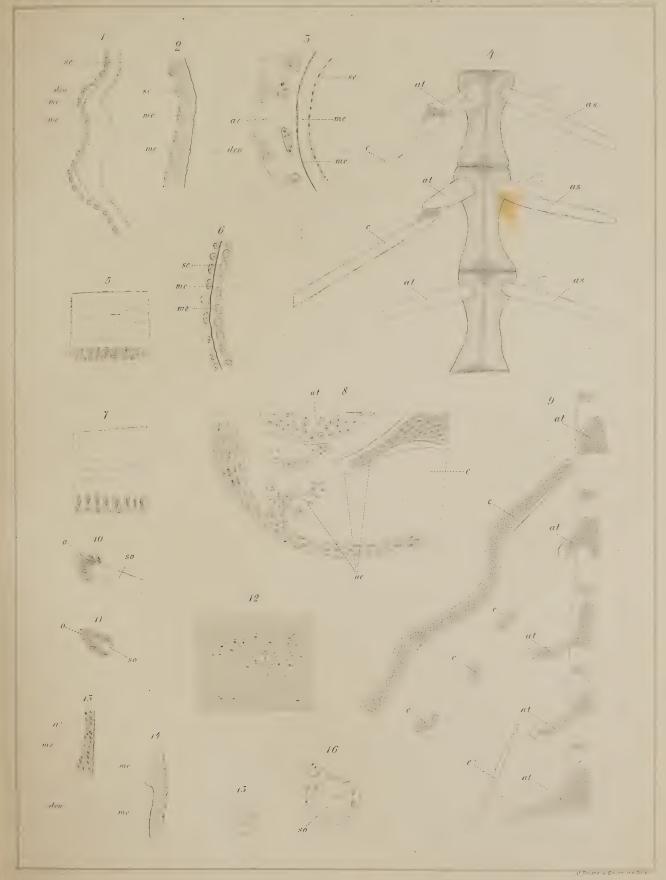
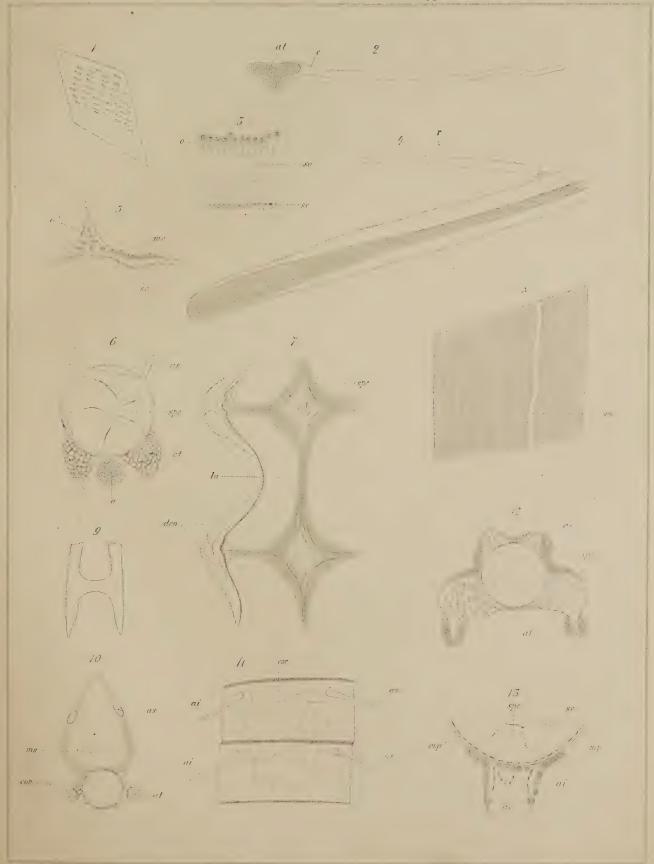
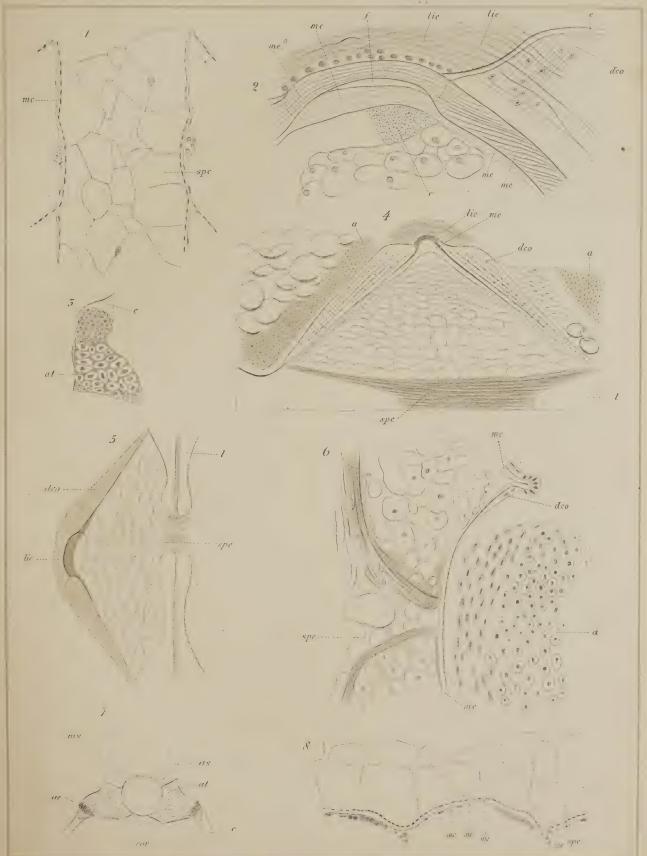
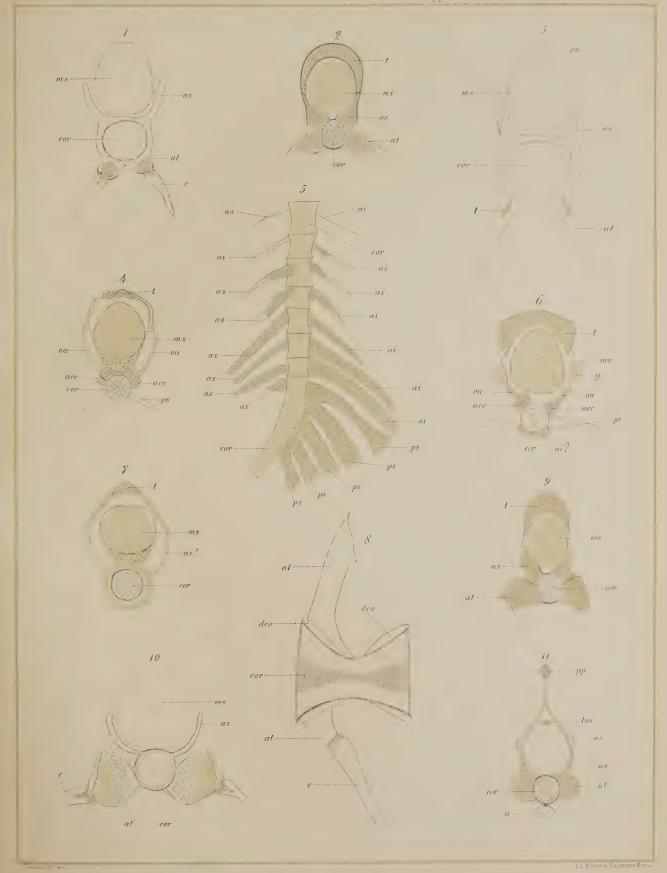
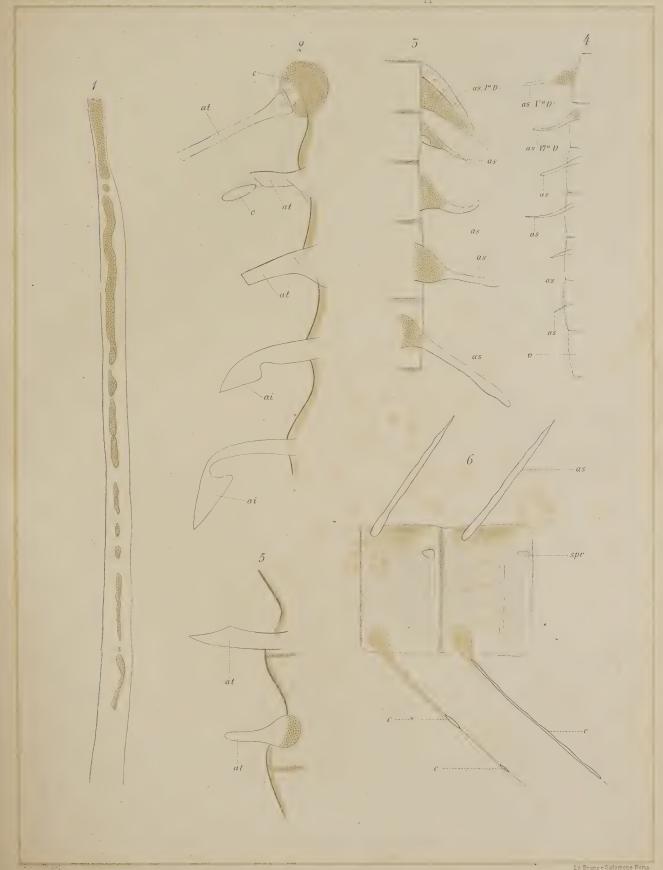
1
at
c
2
at
c
3
so
so
mc
4
r
as
spc
5
as
ac
ai
c
c
6
c
at
7
c
at
8
a
ai
ch
as
9
10
ms
g
s
as
spc
11
pp
im
as
cor
ai

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
sc
dco
me
ac
at
as
c
so
o

Lit. Bruno e Salomone Roma

1
mc
spc
2
me.º
mc
f
lie
lie
c
dco
mc
me
c
3
c
at
4
a
lie
mc
dco
a
spc
l
5
dco
l
lie
spc
6
mc
dco
a
spc
mc
7
ms
as
at
ac
c
cor
8
mc
mc
me
mc
spc

Lit. Bruno e Salomone Roma

Lit. Bruno e Salomone Roma

Studî sui composti della serie del pirrolo. L'acetilpirrolo ed il pseudoacetilpirrolo.

Sesta Memoria di G. L. CIAMICIAN e M. DENNSTEDT

approvata con relazione al Presidente

nelle ferie accademiche dell' anno 1882-83.

Nel 1877 R. Schiff (¹) descrisse una sostanza cristallizzata fondente a 90°, che egli ottenne riscaldando il pirrolo con anidride acetica. Questo corpo fu da lui riguardato come il derivato acetilico del pirrolo, nel quale dunque l'acetile è sostituito all'idrogeno del gruppo imidico. I risultati delle nostre esperienze dimostrano, che la sostanza ottenuta da R. Schiff non ha questa costituzione, ma che invece il radicale acetilico è legato al carbonio.

Noi vogliamo chiamare perciò questo composto:

« *Pseudoacetilpirrolo* »,

per distinguerlo dal suo isomero, *il vero acetilpirrolo*, che è liquido, e che si forma pure, assieme al primo, abbenchè in più piccola quantità, per l'azione dell'anidride acetica sul pirrolo.

Per preparare e separare queste sostanze noi abbiamo seguita la seguente via, che dà dei rendimenti abbastanza soddisfacenti.

Si riscaldano in un apparecchio a ricadere, in un bagno ad olio per sei ore (non è vantaggioso di riscaldare più oltre), 50 gr. di pirrolo con 300 gr. di anidride acetica e 60 gr. di acetato sodico fuso di fresco. Si distilla indi il contenuto del pallone che è formato da una massa nera, semisolida e cristallina a pressione ridotta a b. m. — Il liquido che distilla è leggermente colorato in giallo, e contiene, oltre all'eccesso di anidride acetica, pirrolo inalterato e piccole quantità dei composti acetilici; esso serve per una nuova preparazione. Il residuo è una massa cristallina gialla e bruna che viene trattata con acqua e distillata in una corrente di vapore. Passa un olio più pesante dell'acqua del quale parleremo più sotto. Quando il liquido che passa incomincia a deporre dei cristalli per raffreddamento, si interrompe l'operazione. Il liquido che resta nel pallone di distillazione è colorato in rosso-bruno, e contiene quasi tutto il pseudoacetilpirrolo disciolto, se la quantità di acqua era sufficiente; se l'acqua è in difetto una parte di esso resta indisciolto in forma d'un olio nero e pesante. Si aggiunge dunque se è necessario dell'altr'acqua

(¹) Berl. Ber. X, 1500.

fino a sciogliere tutto il pseudoacetilpirrolo e si fa bollire la soluzione con nero animale. Dal filtrato si depongono per lo più dopo 24 ore dei bellissimi aghi lunghi parecchi centimetri, che si purificano facilmente facendoli cristallizzare due o tre volte dall'acqua bollente. Essendo il pseudoacetilpirrolo abbastanza volatile col vapor acqueo, non si possono concentrare le acque madri per ricavare le notevoli quantità di materia che contengono; queste vengono perciò estratte con etere e purificate nel modo sopra indicato. Da 50 gr. di pirrolo si ottengono così 20 gr. di pseudoacetilpirrolo purissimo; esso fonde a 90°, bolle a 220° (temperatura non corretta) e corrisponde nelle sue proprietà fisiche, alla sostanza descritta da R. Schiff.

Questa sostanza, che noi chiamiamo pseudoacetilpirrolo, non si scompone, però, come dice R. Schiff nella sua Memoria, in acido acetico e pirrolo [1] per ebollizione con potassa. Essa si scioglie più facilmente nella potassa che nell'acqua; bollendo per alcune ore la sua soluzione in potassa concentratissima si ottiene per raffreddamento una massa solida, bianca, che è forse il composto potassico, che si ridiscioglie diluendo con acqua; l'etere estrae da questa soluzione il pseudoacetilpirrolo inalterato.

Trattando la soluzione del pseudoacetilpirrolo in acqua bollente, con una soluzione concentrata di nitrato d'argento ed aggiungendo alcune goccie d'ammoniaca, si ottiene dopo poco tempo un precipitato bianco e cristallino che ha la composizione:

$$« C_4H_3(C_2H_3O)NAg, »$$

come lo dimostra la seguente analisi:

I. — 0,3804 gr. di sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico diedero 0,1894 gr. di Ag.

II. — 0,3066 gr. di sostanza seccata ecc. diedero 0,3760 gr. di CO_2 e 0,0797 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_4H_3(C_2H_3O)NAg$
Ag	49,79	—	50,00
C	—	33,44	33,33
H	—	2,89	2,78

Questo comportamento del composto fondente a 90° non si può, a parer nostro, spiegare altrimenti, che ammettendo che il radicale acetilico sia entrato nel nucleo del pirrolo e che l'idrogeno imidico sia ancor libero.

Guidati da questo concetto noi abbiamo perciò ossidato il pseudoacetilpirrolo nella speranza di ottenere o l'acido chetonico della formola $C_4H_3(CO\,COOH)NH$ oppure un acido carbopirrolico.

Le nostre supposizioni sono state confermate dall'esperienza e l'acido di cui diamo qui sotto la descrizione ha realmente la formola:

$$« C_4H_3(CO\,COOH)NH ».$$

La via da noi seguita per ottenere questo corpo è la seguente. Si sciolgono

[1] Loco cit. pag. 1502.

5 gr. di pseudoacetilpirrolo, (è vantaggioso di non ossidare più di 5 gr. per volta) in 500 c.c. d'acqua aggiungendo un poco di potassa e riscaldando il liquido, e si versa nella soluzione ancor calda a poco a poco una soluzione, fatta a caldo, di 14 g. (calcolato 14,5 gr.) di permanganato potassico in mezzo litro d'acqua. L'ossidazione avviene prontamente e solo in ultimo si fa bollire il liquido per alcuni minuti per rendere completa la riduzione del camaleonte. Si filtra e si svapora la soluzione, che è colorata leggermente in giallo, per ridurla ad un più piccolo volume, ciò che può farsi senza tema di scomporre il nuovo acido. Prima di procedere all'estrazione di questo, bisogna allontanare quella piccola parte di pseudoacetilpirrolo che sempre si sottrae all'ossidazione; si agita perciò con etere la soluzione alcalina avanti di metterla a svaporare, perchè altrimenti una buona parte di questo si volatilizzerebbe durante lo svaporamento. — Da 10 gr. di pseudoacetilpirrolo se ne riottengono 2 gr.

La soluzione concentrata, che ha un colore giallo scuro, viene acidificata con acido solforico diluito ed agitata molte volte con etere perchè è molto difficile di estrarre il nuovo corpo dalla soluzione acquosa. Con 12 fino a 14 estrazioni si riesce ad esaurire il liquido in modo da non trascurare che delle tracce di materia.

La distillazione dell'estratto etereo deve esser fatta con cura e sopratutto bisogna evitare lo svaporamento a secchezza, perchè il prodotto greggio si scompone in gran parte alla temperatura del b. m. — Si distilla l'etere dunque fino ad ottenere una soluzione molto concentrata, che si chiarifica bollendola con carbone animale, e si lascia poi svaporare spontaneamente. Il residuo è formato da croste cristalline d'un colore giallo, che all'aria diventano brune. Da 10 gr. di pseudoacetilpirrolo se ne ottengono 8 gr. Nell'ossidazione si forma inoltre acido acetico e carbonico.

Per purificare il nuovo acido lo si fa cristallizzare dal benzolo bollente scolorando la soluzione con carbone animale. Un grave inconveniente in questo modo d'operare, è però la proprietà del composto ottenuto nel modo descritto, di fondere sotto il benzolo bollente con parziale scomposizione, formando un liquido quasi nero che non si scioglie che incompletamente nel benzolo. Per raffreddamento si ottengono degli aghi aggruppati, leggermente gialli, che fondono con scomposizione a 74°-76°. Il composto così ottenuto contiene però acqua di cristallizzazione che perde nel vuoto sull'acido solforico ed anche stando sul cloruro di calcio in un essiccatore.

Una determinazione, fatta con la materia cristallizzata due volte dal benzolo, seccata fra carta e poi lasciata nel vuoto sull'acido solforico fino ad ottenere un peso costante, diede i seguenti numeri, che concordano con quelli calcolati per una molecola d'acqua,

2,7108 gr. di materia perdettero 0,3118 di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_6H_5NO_3 + OH_2$
OH_2	11,50	11,46

L'acido deacquificato ha un colore giallo limone intenso, e non fonde più sotto il benzolo bollente, perciò è conveniente di deacquificare subito il prodotto greggio prima di farlo cristallizzare dal benzolo.

L'acido deacquificato fu fatto cristallizzare più volte, sciogliendolo nel benzolo bollente, nel quale non è molto facilmente solubile, ottenendo così una soluzione gialla che fu fatta bollire con nero animale. Per raffreddamento si ottengono piccoli aghi gialli finissimi aggruppati, che anche dopo ripetute cristallizzazioni dal benzolo mantengono questo colore. Essi incominciano a scomporsi verso i 113°-115° senza avere un punto di fusione ben determinato. Messi sott'acqua diventano istantaneamente bianchi.

Le analisi fatte colla sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico diedero i seguenti numeri:

I. — 0,3340 gr. di materia dettero 0,6251 gr. di CO_2 e 0,1093 gr. di OH_2.

II.— 0,2960 gr. di materia dettero 0,5618 gr. di CO_2 e 0,1078 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_6H_5NO_3$
C	51,04	51,76	51,80
H	3,63	4,05	3,60

L'acido deacquificato è poco solubile nell'acqua fredda, per riscaldamento si scioglie formando una soluzione leggermente gialla; questa soluzione dà con cloruro ferrico un coloramento rosso intenso, e non precipita coll'acetato di piombo. Riscaldando l'acido con calce spenta si ottiene probabilmente il pirrolo, almeno si nota facilmente il suo odore caratteristico e la reazione con la scheggia d'abete bagnato d'acido cloridrico.

Riscaldando il nuovo acido, con acido cloridrico avviene una reazione caratteristica che può servire a riconoscere il nuovo composto. Si forma subito una soluzione d'un colore rosso-carminio intensissimo che somiglia non poco ad una soluzione d'eosina. Aggiungendo una base, il liquido prende un coloramento giallo-verde, e ridiventa rosso acidificandolo.

Trattando la soluzione acquosa dell'acido con una soluzione di nitrato d'argento si ottiene un precipitato bianco e cristallino del

Sale argentico. Esso è solubile nell'acqua bollente e cristallizza per raffreddamento in aghi senza colore, che seccati nel vuoto sull'acido solforico diedero all'analisi i seguenti numeri:

0,3264 gr. di materia dettero 0,1431 gr. di Ag.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_4H_3(CO\,COO\,Ag)NH$
Ag	43,84	43,90

Noi ci riserbiamo lo studio ulteriore di questo acido, come pure quello dei composti che si ottengono dal pirrolo per l'azione dell'anidride acetica e di altre anidridi.

L'olio suaccennato, che si ottiene distillando con vapor acqueo il prodotto dell'azione dell'anidride acetica ed acetato sodico sul pirrolo, è formato precipuamente dal vero

« *Acetilpirrolo* ».

Per purificare questo composto si separa l'olio dall'acqua, lo si dissecca sul cloruro di calcio e lo si sottopone alla distillazione frazionata. Il liquido passa fra 160° e 222°; la piccola parte che distilla sopra i 200° si solidifica completamente, e non è altro che pseudoacetilpirrolo, il quale essendo un po' volatile col vapore acqueo, passa assieme all'olio che descriviamo.

Dopo un lungo frazionamento del liquido bollente fra 160° e 200°, si riesce a separare una frazione che distilla costantemente fra 176° e 180°, la maggior parte della quale bolle a 177°-178°. Questa frazione ha la stessa composizione del corpo scoperto da R. Schiff, e come si vedrà più sotto, deve essere riguardata come il vero composto acetilico del pirrolo.

0,2647 gr. di materia diedero 0,6378 gr. di CO_2 e 0,1661 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_4H_4N.C_2H_3O$
C	65,71	66,05
H	6,97	6,42

Si può ottenere il vero acetilpirrolo in maggióri quantità facendo agire il cloruro d'acetile sul composto potassico del pirrolo.

Il cloruro d'acetile reagisce violentemente sul composto pirrolpotassico e lo resinifica, si diluisce perciò il reattivo con etere anidro. — Si pone in un pallone, con apparecchio a ricadere 30 gr. di C_4H_4NK stemperato in 250 c.c. d'etere anidro e si fa gocciolare la quantità necessaria di cloruro d'acetile diluito con 50 c.c. d'etere. Il liquido si riscalda spontaneamente fino all'ebollizione in modo che è necessario di raffreddare esternamente il pallone. Dopo circa 15 minuti la reazione è terminata, ed il liquido, e massime il deposito solido di cloruro potassico, che si è formato, hanno un colore rosso vivo. Si distilla l'etere a b. m. ed il residuo, una massa resinosa rosso-bruna, viene trattato con acqua e distillato con vapore; passa un olio più pesante dell'acqua, che viene separato dalla medesima, seccato con cloruro di calcio e sottoposto alla distillazione frazionata. A 130° passano alcune goccie di pirrolo rigenerato, ma la maggior quantità del prodotto bolle fra 170° e 180°. — Da 30 gr. di composto potassico si ottengono 12 gr. di questo liquido. — Dopo una serie di distillazioni la maggior parte di questo bolle fra 177° e 178.° Le ultime goccie che restano nel palloncino si solidificano parzialmente dopo qualche giorno.

Il residuo della distillazione con vapor acqueo fu bollito con carbone animale, e dal liquido filtrato si ottenne per agitazione con etere 1 gr. (da 30 gr. di C_4H_4NK) di pseudoacetilpirrolo impuro.

Il composto bollente a 177°-178° è identico a quello ottenuto per azione dell'anidride acetica ed acetato sodico sul pirrolo.

0,2182 gr. di materia diedero 0,5278 gr. di CO_4 e 0,1288 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_4H_4N.C_2H_3O$
C	65,97	66,05
H	6,56	6,42

Il liquido bollente a 177°-178° ha un odore caratteristico differente affatto da quello del vapore del pseudoacetilpirrolo, è quasi insolubile nell'acqua, ma dà con

una soluzione acquosa di cloruro mercurico un precipitato bianco. Si scioglie nella soluzione di nitrato d'argento, che riduce dopo qualche tempo. Il suo vapore arrossa una scheggia di legno bagnata con acido cloridrico, trattato con questo reattivo si resinifica. Non si scioglie nella potassa acquosa, ma facendolo bollire con questa si scinde facilmente in pirrolo ed acido acetico.

Questo comportamento ci fa credere che il liquido bollente a 178° sia il vero composto acetilico del pirrolo, ed abbia la formola

$$« C_4 H_4 N . C_2 H_3 O ».$$

Azione del bromo sul pseudoacetilpirrolo.

R. Schiff descrisse nella Memoria già citata un composto d'addizione con due atomi di bromo, che lui a creduto ottenere, facendo agire una molecola di bromo sul pseudo-acetilpirrolo in soluzione di acido acetico glaciale; non avendo noi ottenuto in questo modo, che dei prodotti di sostituzione pubblichiamo i risultati delle nostre esperienze.

Facendo agire il bromo, anche in quantità esattamente stechiometriche, sul pseudoacetilpirrolo in soluzione d'acido acetico glaciale, si ottengono sempre dei miscugli di diversi composti la di cui separazione è molto difficile. La via che noi descriviamo è quella che dopo varî tentativi ci è sembrata la più adatta a raggiungere lo scopo.

Monobromopseudoacetilpirrolo ($C_6 H_6 Br NO$).

Si sciolgono a freddo 10 gr. di pseudoacetilpirrolo purissimo in poco più della quantità necessaria di acido acetico glaciale, e si aggiungono 14 gr. di bromo sciolto in una piccola quantità dello stesso solvente. — Il liquido si riscalda, emette acido bromidrico e prende un color rosso più o meno intenso a seconda della concentrazione; dopo poco tempo, se la diluizione è conveniente, si forma un precipitato (A) di cristalli bianchi. Si filtra e si lava con poco acido acetico glaciale perchè il composto è molto facilmente solubile in questo solvente. Del filtrato (B) diremo più sotto.

Il precipitato (A) viene posto nel vuoto sulla calce per eliminare l'acido bromidrico ed acetico e poi sciolto nell'alcool. La soluzione alcoolica è per lo più colorata e viene versata nell'acqua; non si ottiene che un leggerissimo precipitato d'una materia che per ora trascureremo essendo più copiosamente contenuta nel filtrato segnato con (B). Si agita la soluzione acquosa filtrata, con etere e si fa cristallizzare il residuo dell' estratto etereo, che è formato dal monobromo composto e dal pseudoacetilpirrolo inalterato, alcune volte dall'acqua bollente aggiungendo carbone animale. Si riesce così facilmente a separare queste due sostanze, essendo il monobromocomposto molto meno solubile nell'acqua fredda del pseudoacetilpirrolo.

I cristalli così ottenuti sono aghi appiattiti lunghi e senza colore che somigliano molto a quelli del pseudoacetilpirrolo. Essi fondono a 107°-108°.

0,2261 gr. di materia dettero 0,2263 gr. di Ag Br.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per $C_6 H_6 Br NO$
Br	42,55	. . . .	42,55

Il filtrato (B) si versa nell'acqua, ottenendo così un abbondante precipitato bianco che si separa dal liquido per filtrazione. Quest'ultimo contiene oltre a piccole quantità di pseudoacetilpirrolo inalterato, il monobromocomposto mescolato alla materia contenuta nel precipitato. Questo è forse probabilmente un miscuglio di monobromo e bibromo-pseudoacetilpirrolo che non siamo riusciti a separare.

Esso si presenta dopo alcune cristallizzazioni dall'alcool bollente in forma di piccoli aghi bianchi che stando esposti alla luce diventano gialli, e che fondono a 118°-120°.

Le analisi fatte con i prodotti di due diverse frazioni diedero i seguenti numeri:

I. — 0,2133 gr. di materia diedero 0,2608 gr. di AgBr.

II. — 0,1415 gr. di materia diedero 0,1756 gr. di AgBr.

In 100 parti:

	trovato			calcolato per	
	I	II		$C_6 H_6 Br NO$	$C_6 H_5 Br_2 NO$
Br	52,03	52,78	. . . .	42,55	59,92

Bibromopseudoacetilpirrolo ($C_6 H_5 Br_2 NO$).

Si aggiunge ad una soluzione di pseudoacetilpirrolo in acido acetico glaciale una quantità corrispondente a due molecole di bromo sciolto nello stesso solvente. Risulta un liquido colorato leggermente in giallo che emette acido bromidrico, e che si versa nell'acqua.

Si ottiene un precipitato bianco che si filtra e si scioglie nell'alcool bollente, aggiungendo carbone animale. Per raffreddamento si ottengono piccoli aghi che dopo alcune cristallizzazioni fondono a 145°-147°. — Essi hanno una composizione che si avvicina a quella bibromopseudoacetilpirrolo, ma contengono però ancora, come lo dimostra la seguente analisi, piccole quantità di un composto più bromurato, dal quale non siamo riusciti a separarli.

0,2463 gr. di materia diedero 0,3540 gr. di AgBr.

In 100 parti:

	trovato		calcolate per $C_6 H_5 Br_2 NO$
Br	61,16	. . . .	59,92

Il bibromopseudoacetilpirrolo puro si ottiene però facilmente dalle soluzioni alcooliche madri, dalle quali si sono separati i suddetti cristalli. Si svaporano a secchezza queste soluzioni e si fa cristallizzare il residuo dall'acqua bollente, in cui si scioglie difficilmente, scolorando la soluzione con carbone animale. Per raffreddamento si ottiene un deposito formato da piccoli aghi bianchi che ingialliscono lievemente stando esposti alla luce, e che dopo alcune cristallizzazioni fondono a 143°-144°.

Essi hanno la composizione d'un bibromoacetilpirrolo.

I. — 0,1795 gr. di materia dettero 0,2535 gr. di AgBr.

II. — 0,3245 gr. di materia dettero 0,3190 gr. di CO_2 e 0,0627 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_6 H_5 Br_2 NO$
Br	60,09	—	59,92
C	—	26,81	26.97
H	—	2,15	1,87

Le acque madri contengono tracce di pseudoacetilpirrolo inalterato.

Il monobromo ed il bibromo-pseudoacetilpirrolo si sciolgono facilmente nella potassa acquosa e precipitano inalterati aggiungendo un acido alla soluzione.

Pentabromopseudoacetilpirrolo [$C_6 H_2 Br_5 NO$].

Se si fa agire su di una soluzione di pseudoacetilpirrolo in acido acetico glaciale una quantità di bromo corrispondente a quattro molecole, si ottiene un liquido colorato in rosso, che si riscalda lievemente a b. m. per rendere completa la reazione. Dopo poco tempo, se si ha evitato un eccesso di acido acetico glaciale, si depongono per raffreddamento piccoli aghi senza colore che si separano dal liquido per filtrazione. Per purificarli si fanno cristallizzare alcune volte dall'acido acetico glaciale bollente, nel quale sono poco solubili a freddo ma molto a caldo. Essi fondono a 200° ed hanno la composizione di un pentabromopseudoacetilpirrolo.

I. — 0,1178 gr. di materia diedero 0,2189 gr. di AgBr.

II. — 0,5796 gr. di materia diedero 0,3075 gr. di CO_2 e 0,0259 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_6 H_2 Br_5 NO$
Br	79,07	—	79,36
C	—	14,47	14,28
H	—	0,50	0,40

Il liquido dal quale si sono deposti i cristalli analizzati contiene dei composti meno bromurati che precipitano dalla soluzione acetica aggiungendovi dell'acqua.

Anche adoperando maggiori quantità di bromo non si riesce, per questa via, a sostituire nel pseudoacetilpirrolo il sesto atomo d'idrogeno disponibile, probabilmente bisognerebbe riscaldare con bromo in tubi chiusi.

La formazione del pentabromopseudoacetilpirrolo serve pure a confermare la costituzione di questo composto; in quanto alla distribuzione del bromo nei tre composti descritti, il bromo potrebbe sostituire prima l'idrogeno del nucleo del pirrolo e poi per ultimo anche quello del residuo acetilico; le formole sarebbero dunque probabilmente le seguenti:

Monobromopseudoacetilpirrolo: $C_4 H_2 Br (C_2 H_3 O) NH$

Bibromopseudoacetilpirrolo: $C_4 H Br_2 (C_2 H_3 O) NH$

Pentabromopseudoacetilpirrolo: $C_4 Br_3 (C_2 Br_2 HO) NH$.

Le Cystoseirae del golfo di Napoli.

Memoria di R. VALIANTE

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 15 aprile 1883.

(Con quindici tavole)

Nel gruppo delle Fucacee il genere Cystoseira mi pare sia ancora poco ben conosciuto, così dal lato biologico, come dal lato sistematico. Ho cercato di studiare lo sviluppo e la struttura anatomica di queste piante, e distinguere, per quanto mi è stato possibile, le specie che vivono nel Golfo di Napoli. Son lontano dal credere completo questo lavoro; mi pare solo di poter dare in esso una serie di osservazioni, che possano valere ad illustrare meglio il genere Cystoseira, almeno nelle forme del Mediterraneo.

Nelle ricerche mi sono sempre servito di materiale fresco, e solo come riscontro ho studiato esemplari di erbarî, nei quali spessissimo ho trovato mozziconi di piante non bastevoli a caratterizzare una specie. Ho avuto a mia disposizione le collezioni dei Musei di Firenze, di Pisa, di Roma, nelle quali si contengono esemplari classici di diversi autori.

Ringrazio i signori Direttori dei detti Musei della cortesia, con la quale mi hanno permesso di lavorare su quelle preziose collezioni, e per gli aiuti bibliografici dei quali mi sono stati larghi; come ringrazio il sig. dott. A. Lang della gentile sua cooperazione nel fare i più difficili tra i disegni che accompagnano questo lavoro. Devo una parola di vera gratitudine al sig. dott. Bornet, il quale, oltre ad avermi fornito molti esemplari e molte notizie, ha voluto anche per mio conto fare un'accurata ricerca nell'Erbario Thuret, ricchissimo di forme di questo genere.

ELENCO DELLE OPERE RISCONTRATE

Ginanni, *Opere postume.* Venezia, 1757.
Gmelin, *Historia Fucorum.* Parisiis, 1792.
Esper, *Icones Fucorum.* Nürnberg, 1797.
Wulfen, *Cryptogama Aquatica.* Lipsiae, 1803.
Lamouroux, *Dissertation sur plusieurs éspèces de Fucus.* Agen, 1805.
Lamarck et De Candolle, *Flore Française.* Paris, 1805.
Stackhause J., *Nereis Britannica.* Oxonii, 1816.
Turner, *Fuci, sive plantarum fucorum generi a botanicis ascriptarum, icones et historia.* Londini, 1808-1819.
Bertoloni A., *Amoenitates Italicae.* Bononiae, 1819.
Pollini, *Flora Veronensis.* Veronae, 1826.
Agardh C., *Species Algarum.* Gryph. 1823-1828 et *Systema Algarum.* Lundae, 1826.

Duby, *Botanicum Gallicum.* Editio altera. Parisiis, 1828-1830.
Naccari F., *Algologia Adriatica.* Bologna, 1828.
Delle Chiaje S., *Hydrophytologiae Regni neapolitani icones.* Neapoli, 1829.
Greville, *Algae britannicae.* Edinbourgh, 1830.
Endlicher S., *Genera Plantarum.* Vindobonae, 1836.
Moris et de Notaris, *Florula Caprariae,* 1840. (Estratto dell'Accademia delle Scienze in Torino, Ser. II^a^, vol. 2).
Zanardini, *Synopsis algarum in mari Adriatico hucusque collectarum.* Venetiae, 1841.
De Notaris, *Algologiae Maris ligustici specimen.* (Atti dell'Accademia delle Scienze in Torino), 1841.
Agardh J., *Algae maris mediterranei et adriatici* etc. Parisiis, 1842.
Meneghini, *Alghe Italiane e Dalmatiche.* Padova, 1842-1846.
Montagne C., *Flore d'Algérie (Expédition scientifique de l'Algérie,* par Bory de St. Vincent).
Descaisne et Thuret, *Recherches sur les Anthéridies et les zoospores de quelques Fucus.* (Annales des Sciences Naturelles). 1845.
Agardh J., *Genera, Species et Ordines Algarum.* Lundae, 1848.
Kützing, *Species Algarum.* Lipsiae, 1849.
Thuret, *Recherches sur la fécondation des Fucacées et les anthéridies des Algues.* (Annales des Sciences Naturelles 4^e^ Série, vol. II), 1855.
Pringsheim, *Ueber Befruchtung und Keimung der Algen und das Wesen des Zeugungsprocesses* (Monatsberichte der Akademie zu Berlin, 1855).
Derbès et Solier, *Mémoire sur quelques points de la Physiologie des Algues.* Paris, 1856.
Montagne, *Florula Gorgonea.* Annales des Sciences Naturelles 4^e^ Série, vol. XIV). Paris, 1860.
Le Jolis, *Liste des Algues marines de Cherbourg.* Paris, Cherbourg, 1863.
Dufour L., *Algae ligusticae.* (Commentario della Società Crittogamologica Italiana, vol. II, Genova), 1864.
Crouan, *Florule du Finistère.* Paris, 1867.
Kützing, *Tabulae Phycologicae.* Nordhausen, 1864-1871.
Harvey, *Phycologia Britannica.* New Edition. London, 1871.
Langenbach, *Die Meeresalgen von Sicilien und Pantelleria.* Berlin, 1873.
Debeaux O., *Enumération des Algues marines de Bastia.* (Corse). Paris, 1874.
Kny, *Das Scheitelwachsthum einiger Fucaceen.* (Sitzungsberichte der Gesellschaft naturforsch. Freunde zu Berlin), 1872.
Zanardini, *Iconografia Adriatico-Mediterranea.* Venezia, 1862-1872.
Reinke J., *Beiträge zur Kenntniss der Tange.* (Pringsheim's Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik, vol. X). Leipzig, 1875.
Rostafinski J., *Beiträge zur Kenntniss der Tange.* Leipzig, 1876.
Piccone A., *Florula Algologica della Sardegna.* (Giornale Botanico Italiano), 1878.
Thuret, *Etudes Phycologiques.* Paris, 1878.
Falkenberg P., *Die Meeresalgen des Golfes von Neapel.* (Mittheilungen der Zoologischen Station zu Neapel), 1879.
Piccone A., *Catalogo delle Alghe raccolte durante la crociera del Cutter Violante.* (Atti dell' Accademia dei Lincei). Roma, 1879.
Bower F. O., *On the development of the conceptacle in the Fucaceae.* (Quarterly Journal of Microscopical science), London, January, 1880.
Berthold G., *Vertheilung der Algen im Golf von Neapel.* (Mitth. d. Zool. Station zu Neapel), 1882.
Ardissone F. e F. Strafforello, *Enumerazione delle Alghe di Liguria.* Milano, 1878.

COLLEZIONI CONSULTATE

Erbario del Museo botanico di Roma.
Erbario del Museo botanico di Pisa.
Erbario del Museo botanico di Firenze { Collezione generale. / Erbario Webb. }
Erbario Thuret (Gentilmente riscontrato dal sig. D.^r^ Bornet).

Erbario Pedicino (Roma).
Erbario Critogamico Italiano.
Rabenhorst-Algen Europa's.
Hoenaker-Meersalgen.

N.B. Negli Erbari succitati sono contenuti esemplari classici di diversi autori (Desfontaines, Bory, Naccari, Zanardini, Russel, Monard, De Notaris, Meneghini ecc.).

CAPITOLO I.

Germinazione della spora e formazione dell'embrione.

Una spora fecondata di Cystoseira è di forma sferica ed ha il diametro di 0mm09 (tav. I, fig. 1). Quando essa è posta in condizioni da germinare, si allunga secondo un asse, diventa piriforme, si appoggia ad un substratum qualunque con la sua parte appuntata, e subito, per un setto trasverso, si divide in due cellule (fig. 2). Nella cellula superiore avvengono due segmentazioni longitudinali intersecantesi ad angolo retto che la dividono in quattro. La cellula inferiore invece è divisa trasversalmente in due elementi, dei quali il superiore, che è assai grande, si divide in quattro mediante due setti longitudinali intersecantisi, e l'altro inferiore più piccolo rimane pel momento indiviso, e fa come da peduncolo della spora germinante (fig. 3). Vedremo in seguito come questa cellula basilare si comporti in modo diverso dalle altre. Le prime segmentazioni si fanno ordinariamente nel modo descritto; ma spesso si osservano delle variazioni. Così alcuna volta, dopo la prima segmentazione trasversale, la cellula inferiore, mentre la superiore rimane intatta, si divide in cinque cellule. Sempre queste prime segmentazioni avvengono in modo rapidissimo.

Mentre gli elementi dei quali consta il nuovo corpicino si accrescono in volume, nuove segmentazioni trasversali e longitudinali si fanno in ognuno di essi. La cellula basilare rimasta indivisa, quando il corpicino è già formato di molti elementi (tav. I, fig. 4), si scinde, per due setti longitudinali intersecantesi, in quattro cellule figlie le quali fanno bozza in basso ed in fuori, e si allungano in fili rizoidi semplici e segmentati (tav. I, fig. 5 e 6). Per tal modo il giovane embrione trovasi diviso esattamente in due regioni; la superiore appartenente al polo caulinare e l'inferiore al radicale. Questo embrione si ingrandisce per proliferazione degli elementi preesistenti; proliferazione che si fa sempre per segmentazioni trasversali e longitudinali. Le cellule della base poste immediatamente sopra alle quattro che hanno prodotto fili rizoidi, ne formano anch'esse altri che fissano sempre meglio l'embrione al substratum. Intanto tutte le cellule superficiali si segmentano, per un piano tangenziale, in un elemento esteriore ed in un altro che rimane immediatamente più all'interno.

Quando il corpicino ha raggiunto l'altezza di un terzo di millimetro, incomincia a presentare un infossamento nel punto culminante (tav. I, fig. 6). Un tal fatto è cagionato da che una delle cellule superficiali in quel punto si è ingrossata più delle sue vicine e poi, in luogo di dividersi allo stesso modo delle altre, si segmenta longitudinalmente secondo tre pareti curve, disposte tra loro in modo che l'elemento

centrale, dopo tale processo, tagliato per traverso presenta la figura di un triangolo curvilineo, e tagliato per lungo quella di un ellissi (tav. I, fig. 13, 17 e 18). Così un tale elemento si costituisce punto di vegetazione unicellulare, e continua a dividersi per setti paralleli ai primi. Gli elementi, che per tale processo si generano intorno a questo punto vegetativo, si dividono essi pure trasversalmente più volte (tav. I, fig. 17*a*) e poi in senso longitudinale (fig. 17*b*), producendo in modo molto rapido gran numero di elementi. Di questi i più bassi ed interni generano tessuto centrale dell'asse fatto di cellule cilindriche ed allungati (fig. 17*c*), i mediani tessuto sotto-periferico, e quelli posti alla superficie, tagliandosi solo ripetutamente per setti longitudinali, formano tessuto periferico a cellule strette ed allungate (fig. 17*d*). Ben presto si stabilisce una forte differenza di potere proliferante fra i tre strati di tessuti or ora detti. Quelli della parte centrale infatti, sui quali poggia il meristema si segmentano lentamente. Quelli dello strato sotto-periferico e periferico si moltiplicano invece più rapidamente e la massa di tessuto da essi due formata non può più rimanere al livello dell'apice del punto di vegetazione; sicchè finisce col ricrescere in fuori ed in alto e col fare intorno a quella come un cercine. Aumentandosi questo ultimo si vede ben presto il detto punto di vegetazione rinchiuso in fondo ad un canaliculo imbutiforme a sezione quasi ovoidale, costituito appunto dai tessuti più esterni (fig. 14). Per le segmentazioni ulteriori della detta cellula si formano elementi nuovi, dei quali quelli che già costituiscono la superficie interna del canaliculo vengono continuamente spinti in alto verso l'orlo di quello e di là alla superficie esterna del piccolo asse, che si allunga. Si vedrà in seguito come questo cambiamento di posizione di alcuni elementi ha una prova nello sviluppo e posizione dei ciuffi di peli, che appresso descriverò.

Il corpicino nell'allungarsi mediante il meristema descritto, assume la forma clavata. Il canaletto apicale prende sempre più la forma descritta, e si riempie di sostanza mucilaginosa prodotta dalle cellule superficiali, ed analoga a quella che, in modo meno esagerato, producendosi da tutte le cellule periferiche, forma il sottile strato viscido di che è ricoperta tutta la superficie della pianta (fig. 13, 14 e 17).

Insomma nell'embrione di Cystoseira, accresciutosi dapprima per ripetute segmentazioni dei suoi elementi secondo piani ortogonali e tangenziali fra loro si genera poi da una cellula apicale un punto vegetativo unicellulare analogo alla *Scheitelzelle* descritta dal Rostafinski (¹) per l'*Himanthalia lorea*. Dopo questo stadio tutti i membri laterali che si produrranno in tutta la vita della pianta, saranno provvisti di un grande meristema unicellulare, posto in fondo ad un infossamento e comportantesi allo stesso modo che ho descritto per l'apice dell'embrione nel produrre i tre stati di tessuto, che si trovano in tutte le Cystoseire. Lo Kny (²) ed il Reinke (³) furono i primi a scoprire l'esistenza di un punto di vegetazione unicellulare nelle Cystoseire.

Quando il canaletto è già formato, in un punto della faccia interna di esso una o più cellule periferiche perdono il potere di accrescersi in larghezza, protuberano in fuori e si segmentano ripetutamente per traverso. Esse producono così una serie

(¹) Rostafinski, *Beitr. z. Kenntn. d. Tange.*
(²) Kny, *Das Scheitelwachsthum einiger Fucaceen.*
(³) Reinke, *Beitr. z. Kenntn. d. Tange.*

di piccole cellule, delle quali le apicali si allungano più delle altre e formano, segmentandosi, dei fili a lunghe cellule (fig. 7 e 15). Gli elementi che circondano queste cellule diventate peli acquistano maggiore attività formativa e conservano il potere di accrescimento in larghezza; sicchè formano insieme come una piccola coppa, nel cui fondo troviamo impiantato il ciuffio di peli. Nuovi elementi si formano a spese di quelli che limitano il fondo di questa coppa, man mano ch'essa diventa più pronunziata. Continuando nel corpicino il processo di accrescimento apicale dianzi descritto, questa coppa a poco a poco è, assieme ai tessuti circostanti, spinta dalla faccia interna del canaletto alla superficie esteriore dell'assicello, dove poi la ritroviamo con gli apici dei suoi peli, che spuntano in forma di ciuffo dalla sua bocca. (tav. I, fig. 15, 16 e 20). Mentre questa prima coppa pilifera è spinta a prender posto sulla superficie esteriore dell'asse, in un altro punto della parete interna del canaletto si sviluppa il primordio di una seconda coppa pilifera, la quale sarà spinta in alto ed in fuori, come lo sarà in seguito una terza e le altre; sicchè tutte l'una dopo l'altra andranno a guernire il nuovo tratto dell'assicino di tanti ciuffi di peli più o meno alternamente disposti (tav. I, fig. 8 e 9). Sono queste le *Cryptae piliferae* descritte dagli autori come caratteristiche delle Fucacee.

Riguardo il nuovo corpicino così costituito, come l'embrione completamente sviluppato di una Cystoseira. Ricapitolando, dico che esso è fatto di un piccolo asse, che si termina in alto con un meristema unicellulare infossato; ed in basso con una serie di cellule, i cui processi rizoidi piliformi compiono l'ufficio di fissarlo.

I fenomeni che descriverò or ora, sono per conseguenza tutti riguardanti lo sviluppo della pianta dall'embrione.

CAPITOLO II.

Sviluppo degli organi vegetativi dell'embrione.

Quando l' embrione è giunto allo stadio di suo massimo sviluppo ed è lungo cinque o sei millimetri, ad uno o due millimetri della sua base una cellula superficiale si trasforma in cellula meristemale perfettamente simile a quella dell' apice dell'assicello embrionale. Essa si comporta come quella e produce intorno a sè il ricrescimento che dà origine ad un canaliculo meristemale (tav. I, fig. 10, 21). Si genera così un piccolo mammellone che mostra all' apice la boccuccia rivolta verso l'alto della pianticina. Questo nuovo meristema che chiamo meristema dell'asse definitivo, si comporta come l'altro dell' asse embrionale, prende subito molto vigore ed acquista molta attività formativa. Il corpo che se ne produce a poco a poco fa piegare infuori la parte superiore dell'assicello embrionale (tav. II, fig. 7*a*), e si mette in continuazione con la parte inferiore dello stesso (fig. 7*b*), per continuarsi poi in alto e formare l'asse definitivo della pianta. Così dell'asse embrionale si son fatte due parti; l'inferiore (fig. 7*b*) unita simpodialmente al primo ramo, forma la base dell'asse della pianta, e la parte superiore (fig. 7*a*) piglia l'apparenza di un ramo.

A mano che l'assicino primario sviluppasi, appariscono l'uno dopo l'altro sulla sua punta nuovi piccoli mammelloni che accrescendosi danno i nuovi rami della pianta. Essi si generano nel modo seguente.

Nel fondo del canaliculo apicale dell'asse (tav. II, fig. 15*ca*) da un setto della grande cellula centrale, che fa l'accrescimento, se ne forma una piccola e secondaria (fig, 15_4). Quest'ultima, così come abbiam visto avvenire per i primordi di ciuffi di peli, insieme agli elementi circondanti il canaliculo è spinta in alto (fig. 15_3) e poi in fuori (fig. 15_2) da nuovi tessuti che si formano. Di più essa segmentandosi come la cellula principale diventa infossata durante questo processo e finisce per comparire all'apice dell'asse primario già situata in fondo ad un canaliculo proprio che confluisce col principale (tav. II, fig. 15_3, fig. 11, $_6$, $_7$, $_8$, e tav. IV, fig. 7). Altri punti di vegetazione rameali si generano poco appresso nel fondo del canaliculo principale e sono anch'essi spinti in fuori. I loro canaliculi gradatamente si liberano dal canaliculo primario ed essi finiscono per produrre l'un dopo l'altro altrettanti rami.

Ho tentato per lungo tempo ogni mezzo per seguire minutamente fin dai primordi la formazione di punti di vegetazione dei rami dal punto vegetativo principale dell'asse, ma la grande difficoltà di ottenere buone preparazioni mi ha arrestato e stancato. Lascio ad un ricercatore più provetto e fortunato il compito di riempire questo vuoto.

Se l'asse principale si allunga di molto per successivo accrescimento intercalare degli internodî avremo che i rami si troveranno a notevole distanza fra loro (Cystoseira barbata ecc.); se invece l'asse rimane cortissima i rami saranno ravvicinati e disposti quasi a rosetta (Cyst. Abrotanifolia).

Sia l'asse lungo o corto, i rami a sviluppo completo si trovano disposti con ordine fra certi limiti costanti con distanza angolare di 144°. Nelle fig. 7 ad 11, 15 e 16 della tav. II il ramo col n. 1 è la parte superiore dell' assicello embrionale succitato (tav. II, fig. 7 *a*) e i nn. 2, 3 ecc. sono apposti ai veri rami generatisi a spese del meristema dell'asse definitivo della pianta. Guardando attentamente le dette figure e specialmente la 11 si vede che il ramo n. 2 si trova a distanza angolare dal n. 1 di 144° e parimenti il terzo dal secondo, e così via. Sicchè il 6° ramo verrà a cadere sulla linea di ortostico del primo. Seguendo attentamente questo processo di sviluppo, ci avvediamo che il primo vero ramo dell'asse definitivo (n. 2 delle figure citate) si presenta oppostamente alla parte superiore dell' assicello embrionale che consideriamo come il ramo n. 1. Il mammelloncino meristemale del ramo n. 3, quando appare all'orlo del canaliculo apicale dell'asse, trovasi a distanza che da un lato è di 144° dal ramicello n. 2, ma crescendo, forza questo a diminuire dal lato opposto la sua distanza angolare col n. 1. Il ramicello n. 4 spunta pur esso a distanza di 144° dal n. 3 e, crescendo, sforza questo ad avvicinarsi a quello n. 2, il quale a sua volta continua ad essere avvicinato a quello n. 1, sino a che la distanza angolare tra questi due ultimi non sia pur essa ridotta a 144°. Uguale spostamento producono i rami successivi. Le figure 1, 2, 3, 4, 5 della tav. II son destinate a dimostrare schematicamente come concepisco questi successivi spostamenti dei rami a mano a mano che si formano. Nella figura 6 ho voluto dare un diagramma di un individuo a sviluppo completo, in cui le linee sottili (2*a*, 3*a*, 4*a*, 5*a*, 6*a*) dinotano

la posizione primitiva di ciascun ramo, e le linee grosse (2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, 6*b*) la posizione definitiva dei rami stessi. In alcuni casi, quando cioè gli internodî dell'asse principale si allungano di molto (Cyst. barbata) questo spostamento laterale dei rami è accompagnato da due altri fenomeni. Primo, dalla direzione spirale degli elementi del fusto stesso; e secondo, da un avvolgimento a spira del fusto intorno ad un'asse ideale (tav. II, fig. 12, 19 e 20). (Vedi Schwendener, *Mechanische Theorie der Blattstellung* e *Sachs Vorlesung der Pflanzen Pfyhsiologile* pag. 606).

L'ordine spirale dei rami sull'asse si riscontra in tutte le specie del genere meno in quella che propongo come nuova col nome di *C. dubia*. In questa, che conosco solo a sviluppo completo della parte vegetativa, l'asse primario è alquanto appiattito e i rami di primo ordine nascono disticamente sugli orli di esso (tav. XV).

L'asse primario, come ho cennato di sopra, si allunga più o meno secondo le specie: così nella *C. Abrotanifolia* sola specie annuale, esso diventa lungo al più 15^{mm}, e porta da 10 a 15 rami; nelle *C. discors*, *C. Hoppi*, *C. crinita*, *C. amentacea*, l'asse si accresce più o meno lentamente, e in parecchi anni arriva a circa 15 cm. di altezza; nella *C. Selaginoides* l'asse, corto dapprima, negli anni successivi si accresce, e ne ho visti lunghi sino a 40 o 70 cent. Nella *C. barbata* in pochi mesi l'asse si fa lungo 5 o 6 cent., e continua ad accrescersi negli anni successivi sino a 75 centimetri.

Tutti i rami di primo ordine nella *C. barbata*, e quelli dell'asse giovane della *C. amentacea*, sono fin dai loro primordî tondi e si conservano tali per tutta la loro lunghezza. Nelle *C. Abrotanifolia*, *discors* ed *Hoppii* tutti i rami di primo ordine nascono e si conservano per buon tratto appiattiti e ridiventano cilindrici più in alto. Egual fenomeno si avvera anche in altra specie o solamente nei primi rami o nella parte più bassa di tutti i rami. Poche specie li conservano piatti per tutta la loro lunghezza (*C. Montagnei*, *dubia*). I rami piatti della *C. Erica-marina* diventano più o meno triquetri per la presenza di gran numero di spinette sulla loro superficie disposte più o meno regolarmente in ordine tristico. Spesso ciascun ramo di primo ordine in basso presso all'impianto sull'asse ha un rigonfiamento piriforme (*C. Erica-marina*, *Montagnei*), cilindroide (*C. Opuntioides*) o fusiforme appiattito (*C. dubia*). Questi rigonfiamenti che dagli autori ebbero il nome di *tofuli*, non sono che il prodotto di una ipertrofia del tessuto sottoperiferico della base del ramo.

Ho detto di sopra come nella *C. dubia* sull'asse appiattito i rami nascono in ordine distico, lo stesso ordine si trova su tutti i rami piatti che producono rametti. Il punto di vegetazione di questi rami piatti trovasi in fondo ad un canaliculo a sezione molto ellittica (tav. II, fig. 14). I giovani elementi periferici e sottoperiferici proliferano molto attivamente nel piano dell'asse maggiore dell'ellissi, e si allungano maggiormente nello stesso senso (tav. IV, fig. 3, 4, 5, 6, 7), sicchè il ramo diventa più esteso secondo quel piano e perciò schiacciato. Nell'interno del canaliculo apicale i meristemi dei rametti di secondo ordine si generano alternativamente solo ai due poli dell'ellissi, sicchè quando essi vengono all'orlo del canaliculo, trovansi il primo di contro al secondo e quando vi arriva il terzo si trova di necessità sovrapposto al primo (tav. II, fig. 14 e tav. IV, fig. 4). I rametti sviluppandosi si conservano nel medesimo ordine distico disposti alternativamente

sugli orli del ramo appiattito. Quando per l'accrescimento intercalare gli internodi si allungano alquanto (tav. II, fig. 13) si genera ad ogni nodo una geniculatura ed il ramo si conforma a zig-zag. I rami di primo ordine nella loro parte superiore ridiventano rotondi (tav. II, fig. 13, 13 e 20) e producono rami di 2° ordine con le stesse leggi che l'asse primario. In queste parti diventate rotonde delle specie già dette e negli assi primari svelti ed allungati della *C. barbata* (tav. II, fig, 12), si pronunzia nettamente una serie di torsioni, cagionate dagli spostamenti consecutivi che avvengono durante lo sviluppo dei rami dell'apice dell'asse che li produce.

Oltre ai rami sino ad ora descritti non se ne producono altri sparsi senza ordine lungo gli assi primari ed i rami. Solamente in tutte le specie molti fra i primi rami delle pianticelle per lo più cadono e sopra ognuna delle cicatrici prodotte dalla caduta di quelli si generano nuovi elementi che fanno una specie di callo. Tra questi nuovi elementi, uno, sempre fra quelli provenienti dal tessuto centrale dell'asse, si costituisce a punto di vegetazione avventizio. Ognuno di questi nuovi punti vegetativi dà origine ad un nuovo ramo simile ai normali, ovvero anche spessissimo ad un assicino laterale simile al primario. La produzione di assicini secondari lungo l'asse è abbondantissima nella *C. crinita* e nella *C. Abrotanifolia.* In quest' ultima, sola specie annuale, nuovi assicini secondari si veggono spuntare dalle cicatrici dei rami caduti digià nelle pianticelle appena all'età di 6 o 7 mesi. Un tal fenomeno si ripete attivamente durante il breve periodo di vita della pianta, sì che questa a sviluppo completo appare come formata da un ciuffo di brevi assicini sorgenti dal disco radicale (tav. II, fig. 17, 18 e tav. IV, fig. 1 e fig. 8).

Nelle specie perenni che perdono ogni anno tutti i vecchi rami dopo l'epoca di fruttificazione, oltre alla formazione di alcuni punti di vegetazione avventizi formatisi verso la base degli assi primari sulle cicatrici lasciate dai primi rami giovanili, si sviluppano ripetutamente ogni anno al principio di ogni nuovo periodo vegetativo tanti meristemi avventizi su tutta la lunghezza dell'asse per quanti sono i punti dai quali si sono staccati rami alla chiusura del periodo fruttifero.

Questo potere di rimettere da cicatrici che si ripetono ogni anno agli stessi posti, si conserva spesso attivo per lungo tempo su tutta la lunghezza dell'asse primario.

Nelle vecchie piante, particolarmente di alcune specie, esso va man mano a diminuire su tutta la parte inferiore degli assi primari dove naturalmente i punti capaci di rimettere come più vecchi sono più stanchi.

Spesso in queste specie perenni i rami nel cadere si staccano fin dall'impianto. Altre volte si disarticolano ad una certa altezza dalla base restandone aderente all'asse primario un tratto più o meno lungo dal quale si rifà il callo ed in seguito il punto di vegetazione.

I tofuli che ricoprono gli assi primari di alcune specie sono la base rigonfia ed ordinariamente non desidua dei rami e rappresentano la parte destinata a rimettere.

Ho procurato artificialmente la produzione di questi punti vegetativi avventizi ed ho potuto sempre constatare che essi si generano su callo proveniente dalle cellule centrali dell'asse. Ramelli nel periodo vegetativo, tofuli ecc., tagliati per traverso in modo da lasciare a nudo il tessuto centrale hanno sempre rifatto il callo

ed il punto di vegetazione; mentre quando ho prodotto solamente ferite superficiali e di decorticatura, su queste ultime si è sempre formato un tessuto lasco fatto di file di cellule allungate ed analogo a quello del disco radicale, che descriverò in seguito.

Sviluppo delle vescicule aerifere. — In molte specie (*C. Abrotanifolia*, *discors*, *Hoppii*, *barbata*) si riscontrano spesso rametti sottili provvisti di rigonfiamenti cavi fusiformi od ovoidali sulla cui superficie come sul resto del ramo sono cripte pilifere ed anche nuovi rametti. Sono queste le *vescicule aerifere* degli autori. Se ne trovano raramente sui rami di primo ordine, più spesso su quelli di ordine superiore. Più frequentemente sono isolate, qualche volta, come nella *C. discors* nella *C. Hoppii* ecc. se ne vedono sino a tre o quattro l'una in seguito all'altra (tav. VII, fig. 2). Queste vescicule si producono per una semplice modificazione nello sviluppo proporzionale dei diversi tessuti del ramo. Nella parte giovanissima di questo, poco al di sotto della parte meristemale, i tessuti periferico e sotto periferico prolificano e si accrescono più attivamente dell'ordinario, e cominciano a formare un lieve rigonfiamento. Il tessuto centrale, fatto già di elementi alquanto allungati nel senso dell'asse, non si accresce in proporzione. Esagerandosi invece lo accrescimento della zona posta intorno ad esso, è chiaro che debbonsi generare nella regione centrale, per fatto puramente meccanico, dei laceramenti ed in fine una cavità (tav. III, fig. 6). A sviluppo completo le pareti della vescicula fatte di tessuti periferico e sotto periferico portano ancora sulla loro faccia interna brandelli del tessuto centrale lacerato.

Sviluppo delle spinette. — In alcune specie gli assi primari ed i rami sono a superficie levigata (*C. barbata*, *C. Abrotanifolia*, *C. dubia*); in altre gli assi primari ed i rami sono ricoperti di aculei o rugosità (*C. discors*, *crinita*). In altre ancora (*C. amentacea*, *Selaginoides*, *Erica-marina*), oltre all'osservarsi i brevi aculei sugli assi, se ne veggono altri molto più grossi e più o meno ravvicinati su tutta la lunghezza dei rami e rametti. Questi ultimi sono stati dagli autori distinti dai primi (come p. es. da quelli della *C. discors*) e sono stati chiamati *spine*, e le specie che ne sono fornite dette *spinescenti*. Queste sporgenze sieno dell'una o dell'altra forma, si generano e si accrescono per proliferazione più attiva in gruppi di cellule periferiche e sottoperiferiche senza traccia di meristema determinato (tav. VI, fig. 2, 3, 4).

Cripte in letargo. — Nel capo primo ho detto che sull'asse embrionale si formano cripte pilifere, ed ho descritto il loro modo di origine e di sviluppo. I ciuffi di peli sporgenti persistono sulla superficie dell'asse embrionale sino a che i primi rami dell'asse definitivo non si sono sviluppati. Allora cadono e nell'interno della cripta avviene una serie di altri fenomeni. I peli cadono e non persistono che le loro cellule basali. Queste proliferano di nuovo ciascuna per conto proprio, e gli elementi che ne vengono si saldano insieme, e formano una specie di pseudo-tessuto che ostruisce quasi interamente la cavità della cripta (tav. III, fig. 1).

Sui primi tratti dei rami primarî nuove cripte pilifere si formano perfettamente simili a quelle dell'embrione, ma in processo di tempo anche in esse i peli cadono, e nell'interno della cripta le cellule basali dei peli dan luogo allo stesso pseudo-tessuto. Continuando ad allungarsi i rami primarî, nei nuovi tratti le cripte

non presentano più peli, ma le loro cellule iniziali si comportano come una cellula basale di un pelo caduto, e producono direttamente lo pseudo-tessuto che ostruisce la cavità della cripta. Cripte veramente pilifere riappariscono solo nei tratti di rami in vicinanza dei ricettacoli.

CAPITOLO III.

Produzioni rizoidi e disco radicale.

In principio del capitolo primo ho detto che le cellule basali della spora germinante si prolungano ognuna in un sottile filo rizoide septato, e che le cellule immediatamente superiori producono parimenti nuovi processi piliformi di ugual forma per fissare sempre meglio l'embrione al sostegno (tav. I, fig. 6, 9, 10, 11, 12). Durante tutto il successivo sviluppo delle piante nuovi peli rizoidi si formano continuamente dalle cellule periferiche poste immediatamente al di sopra di quelle che ne hanno già prodotti. Ognuna di queste cellule nella pianticella evoluta, prima di mutar forma, s'ingrossa e poi si divide in parecchi elementi segmentandosi nel modo riprodotto dalla fig 3, tav. III. Lo stesso sistema di segmentazioni si ripete nelle cellule figlie (tav. III, fig. 2), le più esterne delle quali in seguito fanno bozza, sporgono dalla periferia (fig. 4) e si allungano orizzontalmente in fili segmentati, i quali, impaniati dalla solita mucilagine, s'intrecciano fra loro e con quelli prodotti da cellule poste in piani superiori ed inferiori. Gli articoli apicali di questi fili sono corti, rigonfi e pieni di materia bruna e granulosa; quelli verso la base allungati ed a contenuto poco colorato (tav. III, fig. 4 e 5).

La mucilagine che come si è detto ricopre tutta la pianta sotto forma di sottile strato viscido vien prodotta abbondantemente dalle cellule che compongono questi fili. Essa disponendosi a strati di diversa densità, e solidificandosi sempre più, impania i fili su descritti e ne forma un tutto che può considerarsi come un curioso pseudotessuto, che si conforma più o meno a cono o a disco radicale. Per la formazione successiva dal basso in alto di nuovi processi rizoidi questo si ingrossa più segnatamente nelle specie perenni.

Talora nello stato adulto della pianta un nuovo strato di questo pseudotessuto vien prodotto da una assisa di cellule alquanto distante dal disco. Esso non arriva a congiungersi al vero disco basale e si accresce per conto proprio.

Un disco radicale di una vecchia pianta, tagliata, si mostra fatto di tanti strati concentrici quanti sono stati i periodi di sua formazione. Questa produzione radicale ordinariamente fissa le piante a scogli e ad altri corpi duri e prende la forma di disco alquanto rilevato nel centro. Ho raccolto talora individui di *Cyst. barbata* ed *Hoppii* i quali erano nati sopra un Briozoo (Cellepora) ed allora tale produzione radicale erasi accresciuta nell'interno del canale cilindrico che percorre la parte centrale del briozoo prendendone la forma.

CAPITOLO IV.

Organi di fruttificazione.

Si conosce già da lungo tempo come in questo genere son contenuti nei concettacoli organi di ambo i sessi, e si conosce anche dalle ricerche del Thuret ([1]) ripetute dal Pringsheim ([2]) il processo mediante il quale avviene la fecondazione. Lascio da parte dunque la descrizione di queste cose già note e mi occupo solo del modo di sviluppo dei concettacoli.

In quasi tutte le specie i concettacoli fruttiferi nascono sopra ultimi rametti più o meno rigonfiati, nei quali si termina il periodo vegetativo della pianta; solo nella *C. Opuntioides* essi son riuniti in rigonfiamenti posti verso la base di ogni ramo di secondo ordine (tav. XIV, fig. 2). Nelle specie sfornite di aculei e che spesso posseggono vescichette aerifere, i concettacoli nascono sugli ultimi rametti e spessissimo su quelli che spuntano dalle vescichette, e formano a tempo di maturità tante sporgenze più o meno pronunziate (*C. Abrotanifolia*, *discors*, *barbata*, *Hoppii*). Nelle aculeate essi nascono parimenti verso l'apice degli ultimi rametti e formano rigonfiamenti alla base di ogni spinetta (*C. amentacea*, *Erica-marina*, *Montagnei*, *Selaginoides*).

Qualunque sia l'apparenza che assumono i concettacoli a tempo di maturità nelle diverse specie, essi nei loro primordî e nello sviluppo ulteriore seguono il processo che vado a descrivere.

Nei canaletti apicali degli ultimi rami sviluppansi i primordî dei concettacoli in forma d'infossamenti allo stesso modo che abbiamo visto prodursi i primi stadî di cripte pilifere. Per la formazione di un concettacolo, al pari che per le cripte, una o più cellule periferiche in un punto sulla faccia interna del canaletto perdono il potere di accrescersi in larghezza, e formasi quindi intorno ad esse, per l'attività delle cellule circostanti, un infossamento (tav. III, fig. 7 *a*). Questa o queste cellule rimaste infossate, pel caso dei concettacoli, non crescono subito in peli, come per lo più nelle cripte, ma restano per un certo tempo grosse e brevi, segmentandosi scarsamente per traverso (tav. III, fig. 9 *a*). Gradatamente che il rametto si allunga, questi infossamenti sono spinti l'uno dopo l'altro ad occupare la superficie di quello, ed in pari tempo continuano a svilupparsi. Il primo fatto che fa distinguere uno di questi infossamenti che daranno origine a concettacoli fruttiferi da quelli che danno origine a cripte pilifere, è l'attività che manifestasi ben presto nelle cellule che limitano la cavità formatasi intorno agli elementi, per così dire, *iniziali*. Esse si ingrandiscono e si segmentano per pareti parallele alla superficie della cavità stessa, sicchè quest'ultima diventa sempre più larga e tende ad assumere la forma di un fiaschetto nel centro del quale si veggono impiantati *uno o più* grossi peli a brevi articoli, secondo che una o più sono le cellule intorno alle quali la cavità ha incominciato a formarsi (tav. III, fig. 12).

Ben presto molte fra le cellule che limitano in dentro la cavità, fanno bozze

([1]) Thuret, *Recherches sur la fécondation des Fucacées.*

([2]) Pringsheim, *Ueber Befruchtung und Keimung der Algen*; Decaisne et Thuret, *Récherches sur les Anthéridies et les zoospores de quelque Fucus.*

che si sviluppano in forma di peli semplici, clavati e fatti di pochi articoli (tav. III, fig. 12 *d*). Questi peli non subiscono ulteriori modificazioni e restano per tutta la vita del concettacolo sotto forma di parafisi. In seguito altre di dette cellule, particolarmente quelle poste verso l'apertura del concettacolo, si sviluppano ognuna in un pelo ramoso, nel quale il contenuto dei rami trasformasi in anterozoidi (tav. III, fig. 11). Non è che in ultimo che molte cellule poste fra parafisi od anteridî, fanno ognuna una bozza che si sviluppa in una cellula sferica, dalla quale si genera una sola oosfera che ben presto si libera dalla cellula madre, e nuota per venire in contatto con gli anterozoidi usciti dall'anteridio.

Il pelo o i peli dai quali era cominciato il lavorio produttore di un concettacolo, persistono in questo anche a sviluppo completo e spesso arrivano a sporgere dalla bocca del concettacolo (fig. 11 *a*).

Il Bower (¹) ha studiato lo sviluppo dei concettacoli nelle Fucacee. Le sue ricerche l'han condotto alla conclusione che la formazione di un concettacolo sia preceduta dalla decomposizione di una o più cellule, intorno alle quali incomincia, secondo lui, a formarsi l'infossamento. In un capitolo di *General remarks* si esprime così: « In drawing our conclusions from the facts before us, the most striking point « is that, in all cases described, *the formation of the conceptacle is preceded by* « *the decay of one or more cells which occupy a central position with regard to* « *the changes which follow.* The number of the cells thus removed is various, and « the manner of their destruction is not constant; but the fact remains in all cases. « I must own inability to suggest a parallel to this ».

Io non ho potuto avere a mia disposizione rami fruttiferi freschi o ben conservati delle piante studiate dal naturalista inglese (*Fucus vesiculosus* e *platycarpus*, *Ozothallia nodosa*, *Halydris siliquosa, Himanthalia Lorea*) e però nulla posso dire di preciso sulla grande diversità di sviluppo che sarebbe tra i concettacoli di dette piante e quelli delle Cystoseire. Se mi è dato giudicare per analogia, mi permetto dubitare che il Bower abbia potuto essere indotto in errore per il cattivo stato dei pezzi sui quali egli lavorava. Certo nelle Cystoseire non mi è stato possibile trovar traccia del disfacimento di elementi descritti dal Bower.

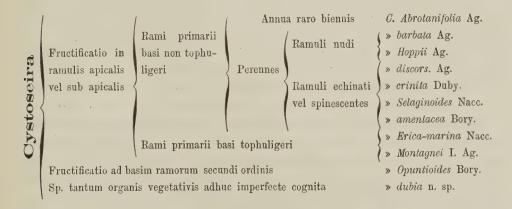
Fra i primordî d'infossamenti che produconsi dagli apici dei rametti fruttiferi ve ne sono di quelli che non si sviluppano in concettacoli, ma semplicemente in cripte pilifere. In tali casi appena si è pronunziata una certa cavità intorno alle cellule delle quali si è già fatto parola, queste si allungano in peli a lunghi articoli. Le cellule che limitano la detta cavità non proliferano molto tagliandosi per pareti parallele a quella, ma si allungano ognuna in un pelo (tav. III, fig. 10, 11). Abbiamo quindi un nuovo controllo esatto dell'analogia di origine che esiste fra le cripte pilifere ed i concettacoli.

In tutte le Cystoseire (meno nella *C. Opuntioides*) con i rametti sui quali nascono i concettacoli si mette termine all'accrescimento vegetativo della pianta. Dopo che sui canalicoli apicali si è prodotto gran numero di primordî di concettacoli, il loro meristema incomincia a segmentarsi disordinatamente fino a scomparire del tutto.

(¹) Bower, *The developpement of conceptacle in the Fucaceae.*

CAPITOLO V.

Descrizione delle specie.

Nella distinzione e limitazione delle specie di questo genere ho già detto di aver incontrate molte difficoltà provenienti massimamente da che lo studio di esse fu fatto quasi sempre dagli Autori su esemplari secchi, e da che i campioni conservati negli erbarî lascino spesso molto a desiderare. Talora mi è avvenuto di trovarmi innanzi anche esemplari classici ridotti a punte di rami o a pezzi di asse, e di essere nella impossibilità di riportarli ad una specie piuttosto che ad un'altra vicina. Non avendo potuto estendere il mio studio a forme che non vegetano nel Golfo di Napoli, ed acquistare un concetto esatto della limitazione dei gruppi specifici, ho creduto bene figurare le piante napolitane da me studiate, e descriverne con una certa larghezza le forme che assumono nei diversi stadî di loro vita per denotare il più nettamente possibile a quali piante assegno il tale o tal altro nome. Lo studio biologico che ho fatto m'induce a credere, che l'ordinamento sinora dato alle specie di questo genere sia fondato su caratteri talora molto appariscenti, ma poco costanti e di piccolo valore, e che si possa tentare un altro ordinamento, valendosi di caratteri più sostanziali e certi. Nello specchietto che segue ho compreso sole le specie a me note, lascio a chi avrà maggiori opportunità di studio il decidere, se tutte le specie di altri mari potranno o no esser comprese nelle categorie che propongo.

Cystoseira Abrotanifolia Ag.

TAV. IV.

Fucus compressus, Wulf. *Crypt. Acqu.* p. 50.
Fucus concatenatus, Poll. *Fl. Ver.* p. 229; Bertol. *Amoen. Ital.* p. 286, n. 3.
Fucus Abrotanifolius, Stack. *Ner. Brit.* p. 33, tab. 14 (ex parte); Lamark et De Cand. *Fl. Franc.* p. 35; Delle Chjaie, *Hydroph.* p. 7, tab. 2. (?).
Fucus fimbriatus, Lamour. *Diss.* p. 70, tab. 34 et 35; Desf. *Flor. Atl.* p. 243, tab. 259.

Cystoseira Abrotanifolia, Ag. C. *Syst.* p. 38, gen. n. 99, sp. n. 13, p. 284, et *Spec. Alg.* p. 85, n. 13; Zanard., *Synop.* p. 245, n. 5; DNtrs. *Alg. Mar. lig.* p. 7, n. 8; Duby, *Bot. Gall.* p. 937, n. 9; Menegh., *Alg. Ital.* p. 92 et 95; Mont. *Flor. d'Alger.* tab. 7; Ag. J., *Alg. Med.* p. 52 et *Spec. Alg.* vol. I, p. 225; Kg., *Spec. Alg.* p. 600 et *Tab. Phyc.* tab. 47; Ardiss. e Strof., *Alg. lig.* p. 158, n. 378; Piccone, *Flor. Alg. Sard.* p. 337, n. 218; Falken, *Alg. Golf. Neap.* p. 245; Berthold, *Verth. Alg. Golf. Neap.*

Cystoseira	concatenata,	Nacc. *Alg. Adriat.*	—	p. 88, n. 192.
»	elata,	Kg. loc. cit.	—	» 600, » 8.
»	microcarpa,	Kg. » »	—	» » » 9.
»	divaricata,	Kg. » »	—	» » » 10.
»	fimbriata,	Kg. » »	—	» » » 11.
»	Filicina,	Bory (in Menegh. *Alg. Ital.* p. 90).		

Esemplari riscontrati

Museo Botanico di Roma. Esemplari di Genova, Nizza, Livorno, (Corinaldi), Napoli, (Bertoloni), Golfo Arabico.

Museo Botanico di Pisa. Esemplari della Gorgona (Corinaldi), Napoli (col nome di C. glomerata), Livorno, Genova (Meneghini), Sicilia, Capraja (col nome di C. Felicina).

Museo Botanico di Firenze. Erbario fiorentino. Esemplari di Napoli (Meneghini), Palermo, Livorno (Corinaldi), Siracusa (Gasparrini). Genova, ecc. Esemplari dell'Adriatico (a rametti lineari) (Meneghini), di Cherbourg, di Antibes (rassomiglianti cogli esemplari adriatici).

Erbario Webb. Esemplari di Genova, Livorno (Corinaldi), Dalmazia (Widorwich.), Antibes (Solier).

Erbario Crit. Italiano. Serie I^a, n. 26; e Ser. II^a, n. 522.

Rabenhorst, Alg. Eur. Numero 1057 e n. 1760.

Hoenaker, Meersalgen. Numero 72 e n. 430.

È la sola specie annua, raramente biennale. Sul finire di maggio si incomincia a trovare spore germinanti ed embrioni. L'asse definitivo, affatto liscio e rotondo, si accresce lentamente e non raggiunge in tutto il periodo di vita lunghezza maggiore di 15 mill. - Su di esso in luglio-agosto appariscono i rami disposti a rosetta, sempre lisci e molto appiattiti, i quali prendono direzione quasi orizzontale con l'apice sempre più o meno rivolto in giù (tav. IV, fig. 1).

Questi rami si allungano, sempre appiattiti, per 12 o 15 cm., e per tutto l'inverno la pianta rimane in questo stato. Al cominciare della primavera i rami si raddrizzano, a poco a poco diventano tondi ed a sviluppo completo raggiungono al massimo la lunghezza di oltre 80 centimetri. Sulla parte appiattita dei rami nascono rami di second' ordine, piatti parimenti e disticamente disposti; sulla parte tonda i rametti nascono invece tondi ed in ordine quinconciale. Si producono ben presto rametti di terzo ordine e questi a poca distanza dalla loro base formano una grossa vescicula aerifera (tav. VI, fig. 8). I rametti di quarto ordine, sempre corti e ramificati anch'essi, sono impiantati sulle vescicule e terminano l'accrescimento apicale della pianta. Questi rametti in maggio generano i concettacoli e si rigonfiano.

Molti assicini avventizî si generano in prossimità del disco radicale (tav. IV, fig. 8 *a a*), sicchè la pianta acquista forma molto cespitosa. Dopo la fruttificazione, in giugno e luglio, i rami di 2° ordine marciscono e cadono. Le piante così spogliate vivono stentatamente fino a che non sono sradicate dalle prime burrasche che chiudono la state. Solamente pochi individui posti in località riparate resistono, rimettono nuovi rami dall'apice del loro asse primario, e così continuano a vivere

per un secondo anno, dopo il quale muoiono certamente. Vive in tutto il Golfo da fior d'acqua fino a tre o quattro metri di profondità.

Cistoseira barbata Ag.

Tav. V.

Fucus barbatus, Turn. *Hist. Fuc.* vol. IV. p. 124, tab. 250 (!); Delle Chiaje, *Hydroph.* p. 8, tab. 9. (?).

Cystoseira barbata, Ag. C. *Syst.* gen. n. 99, sper. n. 6, p. 183, et *Spec. Alg.* p. 57, n. 6; (sinonimia incerta); DNtrs., *Flor. Capr.* p. 248. n. 129 (?), et *Alg. lig.* p. 7, n. 6; Greville, *Alg. Brit.* p. 6, n. 3 (??); Agardh. J., *Alg. med.* p. 50, n. 121, et *Spec. Alg.* p. 223, n. 16 (esclusa la sinonimia con la C. Hoppi); Kg., *Spec. Alg.* p. 599, n. 2, et *Tab. Phyc.* tab. 44, fig. 1, a. b. c. et tab. 46, fig. 1 (C. barbatula); Piccone, *Flor. Alg. Sard.* p. 337, n. 215 (?); Falken, *Meersalg. Golf. Neap.* p. 246, Berthold, *Vertheil. Alg. Golf. Neap.*

Esemplari riscontrati

Museo botanico di Roma. Esemplari di Genova, Spezia, Cagliari, Livorno, Mar nero (Baglietto).
Museo botanico di Firenze. Esemplari di Livorno (Corinaldi), Napoli, Siracusa (Gasparrini), Nizza (De Notaris), Livorno (Savi), Spezia (Caldesi), Adriatico (Zanardini).
Rabenh. Alg. Europ. N. 229 (Genova, leg. Caldesi).
Erbario Thuret. Esemplari di località diverse. (Uno di Antibus mi è stato mandato dal sig. Bornet).

L'asse primario della *C. barbata*, levigato e svelto, acquista grande accrescimento fin dagli stadî giovanili, potendo nel primo anno diventare lungo sino a dieci o dodici cm. e grosso 4 o 5 mill. Ha rami primordiali ramificati e costantemente filiformi e lunghi al più 12 a 15 cm. (tav. V, fig. 1, 3, 4). I rami consecutivi, pur essi sottili, si allungano sino a 35 o 40 cm., e producono sottili rametti (tav. V, fig. 6). Sono sforniti di vescicule aerifere negli individui viventi a poca profondità; invece in quelli viventi in acque alquanto profonde (3 o 4 metri) son provvisti di piccole vescichette ellittiche. I concettacoli, da novembre a febbraio, si formano sugli ultimi rametti, i quali diventano perciò alquanto rigonfiati ed in forma di fuso breve o talora molto allungato.

Dopo il periodo fruttifero l'asse primario, come in molte specie rimettenti, si spoglia dei vecchi rami per rimetterne nuovi e normali, sempre dal suo apice ed altri avventizi dalle cicatrici lasciate dai rami caduti. I vecchi assi, possono raggiungere per fino 75 cm. di altezza.

La forma senza vescicule vive in acque poco profonde (sino a 3 o 4 metri); la forma vesciculifera, abbastanza rara, vive in acque più profonde (5 a 7 metri).

Cistoseira Hoppii Ag.

Tav. VII.

Abete marino di Teofrasto, Ginanni, *Op. Post.* Vol. I, p. 17 e vol. II, tav. 15 (?).
Fucus Abies marina, Gmel. *Hist. Fuc.* tab. II, fig. 2 (?).
Fucus concatenatus, Wulf. *Crypt. Acqu.* p. 49, n. 26; Esp., *Ic. Fuc.* tab. 85 et 87 (?).
Fucus Abies, Bertol. *Amoen.* Tab. IV, fig. 2, a. b. (?).
Cystoseira Hoppii, Ag. C. *Spec. Alg.* p. 59, n. 8 et Icon. Ined. tab. 2; Zanard. *Synop.* p. 243;

Menegh., *Alg. Ital.* e *Dalm.* p. 74, n. 6; DNtrs., *Alg. Lig.* p. 7, n. 7 (?); Kg., *Spec. Alg.* p. 559 et *Tab. Phyc.* vol. X, tab. 45, fig. 1, 2.

Cystoseira granulata, Delle Chiaje, *Hydroph.* tab. 5 (?).

Cystoseira Abete marino, Nacc. *Alg. Adriat.* p. 86, n. 190.

Cystoseira barbata Var. Hopppii, Ag. J., *Alg. Med.* p. 5 et *Spec. Alg.* vol. I, p. 222, n. 6.

In questa specie l'asse primario rotondo e levigato, nel primo anno si sviluppa per poco più di un centimetro e mezzo in altezza, ed accrescendosi lentamente, in parecchi anni arriva fino a 15 o 20 cm. Questa brevità dell'asse avvicina questa specie alla *C. Abrotanifolia,* ed alla *C. discors.*

I rami di primo ordine sono sempre robusti e lievemente appiattiti per un buon tratto, producendo rametti distici in forma di laminette sottili laciniate. La superficie di questi rami e rametti è resa ineguale dalla presenza di grandi cripte sporgenti che formano granulazioni di color marrone.

Crescendo i rami, essi diventano anche in questa specie rotondi e raggiungono più di un metro in altezza. Producono rametti sottili in ordine spirale, e questi per allungamento molto pronunziato dei meritalli, trovansi a molta distanza l'uno dall'altro. Il fenomeno dell'avvolgimento dei rami a spira intorno ad un' asse ideale, è in questa specie molto notevole. I rametti di terzo e quarto ordine si rigonfiano in vescichette aerifere, spesso parecchie in fila, lunghe fino a 7 od 8 mill. e larghe fino a 3 mill. Gli ultimi rametti sovrapposti alle vescicule, sia in vicinanza di queste sia ad una certa distanza da esse, si rigonfiano moderatamente, e danno luogo ai concettacoli i quali sono molto ravvicinati fra loro ed alquanto sporgenti dalla superficie del rametto (tav. VII, fig. 2).

Le granulazioni color marrone prodotto dalle cripte sporgenti ricoprono tutta la pianta e si sviluppano perfino fra i concettacoli fruttiferi.

Spesso veggonsi produzioni di assicini avventizi alla base dell' asse primario (fig. 3).

Vive in tutto il Golfo da piccolissima profondità fino a 4-6 metri. Fruttifica da febbraio ad aprile. In maggio, giugno si trovano embrioni.

Questa forma non mi pare possa riportarsi ad altra specie che alla *C. Hoppii* Ag., e debbo ritenerla per buona specie, come propone il Meneghini (*Alg. Ital.* e *Dalm.*), e non come varietà della *C. barbata* (*I. Ag. Alg. Med. e Sp. Alg.*), con la quale non ha nulla a che fare, sì per la fisonomia generale della pianta, come per la lunghezza e modo di accrescimento dell'asse primario, per la forma piatta dei rami, per le dimensioni delle vescicule e per la posizione dei rametti concettaculiferi. La tavola II delle *Icones Ineditae di Agardh* ed un esemplare di *Chauvin* proveniente da Ancona e datomi dal sig. Bornet, hanno avvalorata questa mia opinione.

Cystoseira discors Ag.

TAV. VI.

Fucus discors, Esp. *Icon. Fuc.* p. 59, tab. 25; Lam. et De Cand., *Fl. Franc.* II, p. 25; Bertol. *Amoen.* p. 284, n. 2; Pollini, *Flor. Ven.* p. 533 (esclusa in parte la sinonimia).

Fucus Abrotanifolius Var. discors, Stack. *Ner. Brit.* p. 34, tab. 17.

Fucus compressus, Esp. *Ic. Fuc.* p. 152, tab. 77 (?).

Fucus foeniculaceus, Turn. *Hist. Fuc.* IV, p. 134, tab. 252 (esclusi i sinonimi).

Cystoseira discors, Ag. C. *Syst. Alg.* p. 37 et p. 264, n. 12. *Spec. Alg.* p. 62, n. 12; Zanard, *Synop.* p. 244; Duby., *Bot. Gall.* p. 937, n. 8; DNtrs., *Alg. mar. lig.* p. 8, n. 9; Nacc., *Alg. Adriat.* p. 87, n. 191; Menegh., *Alg. Ital.* p. 83 et p. 88. (C. discors Var. paniculata); Ag. J., *Alg. Med.* p. 51, n. 122 et *Sp. Alg.* p. 224; Kg., *Sp. Alg.* p. 601, n. 11 et *Tab. Phyc.* X, tab. 51, fig. 2; Dufour, *Alg. lig.* p. 40, n. 58; Ardiss. e Stoff., *Alg. lig.* p. 158, n. 377; Piccone, *Flor. Alg. Sard.* p. 337, n. 217; Falken., *Alg. Golf. Neap.* p. 245; Piccone, *Alg. Corvet. Viol.* p. 11, n. 36; Berthold, *Vertheil. Alg. Golf. Neap.*

Cystoseira foeniculacea, Grev. *Alg. Brit.* p. 6, n. 4 (esclusa la sinonimia); Kg., *Spec. Alg.* p. 599, et *Tab. Phyc.* X, tab. 51, fig. n. 1; Harvey, *Phyc. Brit.* I, tab. 122.

Cystoseira paniculata, Kg. *Spec. Alg.* p. 599.

Esemplari riscontrati

Museo Botanico di Roma, Esemplari di Genova, Spezia, S. Remo.

Museo Botanico di Pisa, Esemplari di Dalmazia (Meneghini), di Napoli (C. paniculata), di Genova (idem), di Sidmouth (C. foeniculacea, leg. Miss Wyatt).

Museo botanico fiorentino, Erbario fiorentino. Esemplari di Portofino (Delpino e Beccari), di Spezia (Caldesi), dell'Adriatico (idem), di Napoli (Gasparrini), di Dalmazia, di Antibes.

Erbario Webb, Esemplari da Cherbourg (Lemonard).

Erbario Thuret, Molti esemplari, riscontrati dal sig. Bornet; (uno di questi, proveniente da Cherbourg, mi è stato mandato dal detto sig. Bornet).

Erbario Crit. Italiano, Serie I^a^, n. 443 e Ser. II^a^, n. 569.

Hönaker Meersalgen, Cyst. foeniculacea.

È pianta perenne e rimettente. Essa ha un asse primario rotondo e ricoperto di aculei e rugosità, il quale si accresce lentamente (impiega più anni per raggiungere l'altezza di 10 a 15 cm.). I primi rami della pianticella sono sottilissimi ed alquanto appiattiti. In maggio-giugno spuntano altri esageratamente appiattiti, quasi laminari e forniti di rachide pronunziata e rugosa (fig. 1, 4 *C*). Il loro margine è sempre più o meno dentellato. I rametti sono impiantati in ordine distico. Quando i rami alla fine dell'autunno si prolungano in tratti rotondi, son forniti di rametti quinconcialmente disposti. I rametti rotondi nella pianta adulta producono vescichette ellittiche lunghe al più 4 o 5 millimetri, larghe 2 mill. e concatenate spesso in numero di 3 a 4.

I concettacoli nascono sui brevi rametti rigonfi, ordinariamente non ramificati, che sono impiantati in vicinanza delle vescicule.

Rami avventizi che sviluppansi in assicini simili al primario, se ne producono a poca distanza dal disco radicale allo stesso modo che nella *C. Abrotanifolia,* ma in minore numero che in quest'ultima.

Dopo il primo anno di vita della pianta, fattasi la fruttificazione, i rami si staccano dall'asse primario (in maggio-giugno). Questo ricomincia ben presto ad allungarsi pel suo apice ed a produrre nuovo palco di rami simili a quelli prodottisi nel primo periodo di vegetazione e che fruttificano nella primavera seguente. Così per parecchi anni di seguito, questo asse continua ad allungarsi spogliandosi dei zami vecchi e formandone dei nuovi.

Vive in tutto il Golfo da piccola profondità fino a 25-30 metri.

Fruttifica in primavera a poca profondità, nel corso della state in luoghi più profondi.

Cystoseira crinita Duby.

TAV. VIII.

Fucus crinitus, Desf. *Flor. Atl.* II, p. 425.

Cystoseira crinita, Duby. *Bot. Gall.* p. 936; Mont., *Flor. Alg.* p. 12, tab. 3; DNtrs., *Alg. lig.* p. 7; Menegh., *Alg. Ital.* p. 53; Ag. J., *Alg. med.* p. 49 et *Spec. Alg.* I, p. 223, n. 15; Dufour, *Alg. lig.* p. 40; Debeaux, *Alg. de Bastia* p. 10; Picone, *Flor. Sard.* p. 336, n. 234 et *Alg. del Violante*, p. 11, n. 34; Ardiss. e Stroff., *Alg. lig.* p. 158, n, 376; Falkenberg, *Alg. Golf. Neap.* p. 224; Berthold, *Vertheil. Alg. Golf. Neap.*

ESEMPLARI RISCONTRATI

Museo botanico di Roma, Esemplari di S. Remo, di Porto Maurizio, ecc.

Museo botanico fiorentino, Esemplari di Genova, Terracina, del Porto di Alessandria di Egitto.

Erbario Crit. Italiano, Esemplari col nome di C. concatenata. Serie I[a], n. 852.

Erbario Thuret, Esemplari di Cadice (Monnard) (citati da Montagne) (Bornet in lettera), di Marsiglia (Soleirol) di Genova, di Algeria (tipi di Desfontaines, citati da Montagne, di Marsiglia (Giraudy).

In questa specie l'asse primario rotondo ed aculeato si allunga nel primo anno fino alla lunghezza di poco più di un centimetro, ed accrescendosi lentamente per parecchi anni, in rari casi raggiunge l'altezza di 10-15 cm.

I rami non si allungano che sino a 15 cm.; sono pochissimo appiattiti alla base, ed hanno superficie rugosa. I rametti sempre filiformi scarsamente divisi e mai vesciculiferi, spuntano molto ravvicinatamente sul ramo.

Sugli ultimi rametti nascono i concettacoli, solitarii o poco ravvicinati. Essi sono molto grandi, pigliano una tinta giallastra e protuberano in fuori, sì che danno al rametto produttore una forma bitorzoluta che ho cercato ritrarre nella tav. VIII, fig. 2.

L'asse primario in questa specie ramifica molto verso la sua base. Gli assicini secondarî che si producono, si dirigono orizzontalmente per un buon tratto (principalmente negli individui che vivono a poca profondità), e formano dischi radicali nei punti che vengono in contatto col substratum.

Una volta fissati, il loro apice si dirige verticalmente in alto e produce breve tratto di asse fornito di corti rami normali.

I dischi radicali secondarî, sono come il primario, fatti di fili generati da cellule periferiche ricresciute. Questi assicini ramificano alla loro volta in modo avventizio, producendone altri i quali subiscono le stesse fasi dei primi; sicchè dal loro complesso formasi una specie di sistema rizomatoso dal quale spuntano a breve distanza l'uno dall'altro tanti assicini verticali.

La tavola VIII rappresenta un vecchio individuo sviluppatosi ad una profondità di 6-7 metri.

Fruttifica in marzo-aprile. Vive nel Golfo solamente, verso l'alto mare, per quanto io sappia fino ad ora. A Capri da piccola profondità fino a 6-8 metri. Fuori del Golfo l'ho ritrovata alle Isole Sirene, a Ponza, a Ventotene.

Cystoscira Selaginoides Nacc.

Tav. X. ed XI.

Cyst. Selaginoide, Nacc. *Alg. Adriat.* p. 86, n. 189.
C. Selaginoides, Zanard. *Synop.* p. 243.
(C. Ericoides Var. selaginoides, Ag. C. *Syst.* p. 281)?
(C. amentacea Var. selaginoides, J. Ag. *Spec. Alg.* p. 220)?
C. selaginoides carolitana, Genn. *Erb. Crit.* Ital. Ser. I^a^, n. 747 (Cagliari).
C. amentacea ambigua, Erb Crit. Ital. Ser. II^a^, n. 474.
(Halerica selaginoides, Kg. *Tab. Phyc.* Vol. X, tab. 42, fig. 1)
(» vulpina Kg. » » » » » » » 2)?
(» tennis Kg. » » » » » 43 » 2)

Alla fine della primavera si trovano di questa specie piantine ad asse primario 8 o 10 mill. lungo, rotondo, liscio e con rami piatti lineari larghi 2 mill. e lunghi 5 o 6 cm. — Dopo la produzione di questi rami primordiali, l'asse nei suoi tratti successivi diventa molto più grosso, sicchè in principio appare come un mammellune capitato nel mezzo della rosetta di rami primordiali.

Da questo punto in poi l'asse si ricopre di sottili spinette spesso bifide, e produce rami sottilissimi tondi e flessibili, lievemente rigonfi alla base (*non tofuligeri*), e pure essi provvisti lascamente di spinette molli. I rami di secondo ordine pur essi sottili, radi ed irregolarmente appiattiti, producono altri pochi rametti corti, sottili ed ordinariamente piatti.

I concettacoli abbastanza sporgenti nascono verso l'apice dei rami e rametti rigonfiandoli alquanto. Ciò avviene nel secondo anno di vita delle pianticelle tra il finire della state e l' autunno negli individui di grande profondità ed in primavera in quelli di bassi fondi.

Dopo la fruttificazione i rami si disfanno e solo la loro parte basale per la lunghezza di qualche millimetro persiste sulla superficie dell'asse senza dare alcuna produzione. L' asse primario continua come nelle altre specie perenni, a produrre nuovi rami dal suo apice ed, allungandosi con non molta rapidità, arriva nelle piante molto annose a circa 70 cm. di altezza, portando ciuffo di rami solo all' apice, e rimanendo affatto nudo per tutta la sua lunghezza. Diventa di color bruno e rugoso ed aspro per i resti dei vecchi rami e delle spinette. È molto raro che in prossimità del disco radicale si generi qualche assicino avventizio.

Vive in acque profonde. A Posilipo (Secca della Gajola 30-35 metri), al Capo-Miseno, al declivio d Nisida.

Questa strana pianta che appare certo intermedia tra la *C. Ericoides* e la *C. crinita*, pure avendo fisonomia sua propria, trova difficilmente ad essere con certezza nominata. La difficoltà trovata da me è stata del pari incontrata dal sig. Bornet. Le descrizioni e le figure citate, sono tutte incompletissime, e gli esemplari esistenti negli erbari lasciano molta incertezza perchè incompleti. La descrizione data dal Naccari (Algol. Adriat. l. cit.) è, quantunque brevissima, quella che meglio si attaglia alla pianta napolitana per i caratteri del fusto e dei rametti appiattiti (fogliolíne lesiniformi del Naccari).

Sventuratamenta nè negli erbari italiani da me riscontrati, nè nell'erbario Thuret, esiste alcun esemplare del Naccari portante il nome di *C. Selaginoides*. Un esemplare dello Zanardini conserbato nell'erbario di Roma è incompletissimo, e lascia sospettare che non sia la stessa pianta del Naccari. I soli esemplari che rassomigliano moltissimo alla nostra pianta di grande profondità sono quelli pubblicati nell'erbario crittogamico italiano loc. cit. col nome di *C. Selaginoides Carolitana* Genn. Nell' erbario De-Notaris insieme alla *C. granulata* trovo un esemplare pure di Cagliari lasciato senza nome. Secondo me, esso non ha nulla a che fare con la *C. granulata*, e può ritenersi come una forma della nostra *C. Selaginoides*. Nel ritenere il nome di *C. Selaginoides*, non credo decidere la questione, la quale non può essere risoluta che con lo studio di forme vicine provenienti da diversi mari. Certo se questo tipo specifico meriterà di rimanere come io lo intravedo, sarà una specie molto polimorfa. Nelle tavole X ed XI ho ritratto due forme che riunisco insieme; l'una (tav. X) è di grande profondità (30-35 metri), l'altra (tav. XI) di bassi fondi (m. 1 a 4). Ambedue mostrano apparenze somiglianti, ma è facile vedere come nella seconda i rami alquanto più rigidi, presentino spinette meno rare e rametti meno allargati, portanti concettacoli molto più lascamente disposti. Gli esemplari della Spiaggia di Noli (Liguria occidentale) e pubblicati nell'*Erb. Critt. Ital.* serie II^a, n. 474, col nome di *C. amentacea ambigua*, rassomigliano perfettamente a quello nostro, ritratto nella tavola XI.

Cystoseira amentacea Bory.

Tav. IX.

Cystoseira Ericoides Var. amentacea, Ag. C. *Spec. Alg.* vol. I, p. 63, et *Syst.* p. 281.
Cystoseira Ericoides, Delle Chiaje, *Hydroph.* Tab. IV (?); Falken, *Alg. Golf. Neap.* Berthold, *Vertheil. Alg. Golf. Neap.*

Cystoseira amentacea, Bory, *Morée* n. 1451 (citato da J.'Agardh). J. Ag., *Alg. Med.* p. 47; Menegh., *Alg. Ital.* e *Dalm.* p. 47; Mont., *Algér.* p. 10, tab. 2; Dufour, *Alg. Lig.* p. 39, n. 50; Piccone, *Flor. Alg. Sard.* p. 336, n. 212; Ardiss. e Strof., *Alg. Lig.* p. 158, n. 374.
Halerica amentacea, Kg. Spec. Alg. p. 594, n. 3.

Esemplari riscontrati

Museo botanico di Roma, Esemplari della Gorgona (Savi), della Capraja, del lido occidentale di Liguria, di Cherbourg (Lenormand).
Museo botanico di Firenze, Erbario Fiorentino. Esemplari di Livorno, Siracusa, Triest, Antibes.
Erbario Webb. Esemplari di Genova, Gorgona, Alghero, Sicilia, Antibes, Napoli, e molti altri esemplari mediterranei (Bové); alcuni dell'Atlantico superiore.
Erbario Thuret, Molti esemplari di località differenti. (Un esemplare di Algeria (erb. Bory) ed un'altro dal Capo Temaro al Peloponneso (leg. Bory), mi sono stati regalati dal sig. Bornet).
Hoenaker Meersalgen, Esemplari di Marsiglia e di Genova (Caldesi).
Rabenh. Alg. Europ., Numero 1056, Genova (Piccone e Baglietto).
Erb. Crit. Ital., Ser. I,^{a} n. 475, Genova (Baglietto e Piccone).

L'asse primario di questa specie si allunga lentamente, e raggiunge in vari anni l'altezza di 12 cm. al più, ed ha la superficie ricoperta di aculei e rugosità.

I primi rami sono filiformi e lisci (tav. IX, fig. 4). I rami consecutivi negli

stadî più adulti spuntano robusti, rotondi e ricoperti di spinette ravvicinate. Queste spinette produconsi consecutivamente man mano che il ramo si prolunga; tutta la pianta è iridescente, ed acquista forma piramidale.

I concettacoli nascono nel marzo od aprile solitarî o a coppie sugli ultimi rametti in prossimità della base delle spinette al di sotto di queste. Il rigonfiamento che nelle altre specie abbiamo visto generarsi in tutto il tratto concettaculifero del rametto, qui si manifesta massimamente come rigonfiamento delle spinette, le quali pigliano la forma di mammelloncini piriformi disposti come i fiori in un amento.

La produzione di rami avventizi alla base dell'asse primario è scarsa in questa specie.

Vive in tutto il Golfo a poca profondità.

Ho adottato il nome di *C. amentacea* Bory per questa pianta che dalle descrizioni, figure ed esemplari secchi mi pare identica certamente a quella che l'autore citato volle distinguere dalla *C. Ericoides*. Non avendo io un concetto chiaro di questa ultima, che non ho potuto finora studiare sul vivo in differenti località, non sono in condizione da discutere il valore della *C. amentacea* come specie.

Nel Golfo di Napoli vivono piante che presentano lievi differenze dal tipo innanzi descritto. Esse sono più cespitose, i loro rametti hanno spine più lascamente disposte, ed i concettacoli non conferti agli apici ma sparsi su buon tratto dei rami.

Ho raccolto anche talora alcuni individui raccorciati e forniti di rami le cui basi erano irregolarmente rigonfie per un certo tratto (tav. IX, fig. 2), senza formare dei veri tofuli. Considero questa come un' anomalia individuale.

Cystoseira Erica marina Nacc.

Tav. XII.

(Fucus Erica marina, Gnel. *Hist. fuc.* p. 128, tav. 11; Bertol., *Amoen.* p. 288, n. 5)?

Fucus corniculatus, Wulf. *Crypt. Aqu.* p. 52; Esp., *Ic. Fuc.* vol. I, p. 158, tab. 69; Bertol., *Amoen.* p. 231, n. 5)?

Cystoseira Erica marina, Nacc. *Alg. Adriat.* p. 85, n. 188; Lamouroux, in Expédition scientifique de Morée, p. 74, n. 1746. (Dott. Bornet in lettera).

Cystoseira squarrosa, DNtrs., *Alg. lig.*; Menegh., *Alg. Ital.* e *Dal.* p. 50, tav. II, fig. 3; Zanard., *Iconograph.* vol. III, tav. 85, fig. 5; Ag. J., *Spec. Alg.* vol. I, p. 221, n. 11; Dufour, *Alg. lig.* p. 39, n. 51; Ardiss. e Stroff, *Alg. lig.* n. 375.

Cystoseira corniculata, Zanard. *Synop.* p. 243, et *Iconograph.* vol. III, p. 5, tav. 81.

Cystoseira granulata, Falkenberg, *Alg. Golf. Neap.* (confusa anche con la C. Montagnei): Berthold., *Vertheil. Alg. Golf. Neap.*

Esemplari riscontrati

Erbario Thuret, Esemplari del Naccari (C. Erica marina).

Museo Botanico di Roma, Esemplari autentici della C. squarrosa DNtrs. e della C. corniculata Zan.

Nell'estate ed in autunno si trovano le pianticelle di questa specie. Il loro asse primario alto 3 e 4 mill., è liscio, rotondo e ad accrescimento lentissimo. I primi rami lunghi al più due o tre centimetri, sono appiattiti su tutta la loro lunghezza

e provvisti verso gli apici, di spine lascamente disposte (tav. XII, fig. 5). Questi dopo 4 o 6 mesi cadono, mentre dall'apice dell'asse se ne producono nuovi che spuntano e si conservano in forma di grandi mammelloni impiantati ravvicinatamente l'uno all'altra. Questi mammelloni sono la base di rami e sono forniti all'apice ciascuno di un meristema. Continuando ad ingrossarsi danno origine ai tofuli che in questa specie acquistano sufficiente sviluppo. Spinette e rugosità sviluppansi tanto sui mammelloni che sull'apice dell'asse primario. Quest' ultimo si allunga pochissimo (raggiungendo al più in molti anni l'altezza di 15-17 cm.) sicchè i tofuli trovansi in definitiva molto ravvicinati e conferti. Dal meristema apicale di ciascun tofulo già formato si sviluppa un ramo quasi cilindrico, rigido e poco ramoso, e che può allungarsi per 15-20 cm. Spinette grandi a base molto larga e ad apice ristretto e spesso due o tre volte diviso, si formano nel modo che dissi innanzi nella parte più giovane di ogni ramo: e disponendosi in ordine tristico, fanno prendere al ramo una forma quasi regolarmente triquetra (tav. XII, fig, 1 e 3).

I concettacoli nascono solitari od a coppie sulla parte apicale dei rami e dei rametti, in prossimità delle spinette le quali perciò si rigonfiano alla loro base (tav. XII, fig. 4). Dopo la fruttificazione, la quale nelle piante poste a poca profondità ha luogo in primavera ed a profondità maggiore nell'estate, la parte sottile di ogni ramo marcisce non restandone vegeto che il tofulo.

Nel primo anno di vita le pianticelle producono scarsissimo numero di fruttificazioni.

Nel successivo periodo di vegetazione l'asse primario continua dal suo apice a dare nuovi tofuli e rami in modo normale, mentre sulla parte vecchia di esso si producono rami avventizi raramente sulla parte basale di esso, ed ordinariamente invece dall'apice di ciascun tofulo preesistente. Tali rami, quasi sempre solitari, sono triquetri, producono concettacoli verso il loro apice, e rassomigliano in tutto ai nuovi rami normali. Talora quelli che si formano sui tofuli più bassi ovvero direttamente sull'asse sono appiattiti come quelli del primo periodo di vegetazione della pianticella. Questa produzione di rami avventizi piatti nella parte bassa si esagera talora nelle vecchie piante, le quali non producono più rami triquetri concettaculiferi. Tali individui possono a prima vista far confondere una vecchia *C. Ericà-marina* con una *C. Montagnei.*

Vive nel Golfo in profondità diverse. A Posilipo da quasi a fior d' acqua fino a 30 o 35 metri (Secca della Gajola), a Nisida a Santa Lucia fino a 7 ad 8 m. ecc.

Per l'apparenza generale della *C. Erica-marina* e per le ramificazioni che avvengono all'apice delle sue spinette mi pare dover ritenere con certezza la *C. squarrosa* DNtrs. come una varietà di quella. Il confronto degli esemplari autentici ha avvalorata questa mia opinione. Son lieto di avere l'assenso del sig. dott. Bornet per questa proposta che fo di riportare la *Cystoseira squarrosa* DNtrs. alla specie del Naccari.

Cystoseira Montagnei I. Ag.

Tav. XIII.

Cystoseira Montagnei, J. Ag. *Alg. Med.* p. 47, n. 118 et *Spec. Alg.* vol. I, p. 216; Mont., *Flor. d'Algér.* p. 13, tab. IV, fig. 2; Dufour, *Alg. lig.* p. 39, n. 51; Ardiss. e Stoff., *Alg. lig.* n. 371; Piccone, *Flor. Alg. Sard.* p. 335, n. 208 et Alg. *Croc. d. Violante* p. 10, n. 31.
Cystoseira granulata Var. Turneri, Mont. (in Menegh. *Alg. Ital.* e *Dalm.* p. 85).
Phyllacantha Montagnei, Kg. *Spec. Alg.* p. 597 et *Tab. Phyc.* vol. X, tab. 31 (?).
Cystoseira granulata, Falken. *Alg. Golf. Neap.;* Berthold, *Vertheil. Alg. Golf. Neap.*

Esemplari riscontrati

Museo botanico di Roma, Esemplari di Genova (Caldesi), di Cagliari (Gennari), di Algeria (Montagne) (C. granulata Turneri).
Museo botanico di Firenze, Erbario fiorentino. Esempl. di Algeria, Triest, Catania, Napoli.
Erbario Webb, Esemplare di Genova (Caldesi).
Erbario Thuret, Esemplari di Algeria (Monnard), di Cagliari, di Nizza (Montagne), di Marsiglia (Giraudy), di Cette (Draparnand).
Erb. Crit. Italiano, Ser. I[a], n. 746.
Erbario Pedicino, Esemplare di Genova (Caldesi).

In primavera nelle giovani pianticelle spuntano i primi rami fortemente appiattiti e sforniti di tofuli (fig. 2). Dopo molti mesi di vita il loro breve asse primario produce grandi mammelloni (tophuli), che diventano aculeati, e che producono in seguito dall'apice un prolungamento sottile e rotondo, i tratti consecutivi del quale assumono la forma esageratamente laminare. Questi rami laminari per un buon tratto dan pochi rami in ordine distico; verso gli apici si restringono molto e si dividono scarsamente in rametti lineari e ricoperti di qualche spinetta.

Sugli estremi dei rami nascono nel corso della state concettacoli sporgenti molto ravvicinati.

L'asse primario che raggiunge al più in molti anni 20 o 25 cm. produce rarissimamente rami avventizi in vicinanza del disco radicale. I rami normali molto divaricati danno alla pianta un aspetto tutto suo particolare (fig. 3).

Vive nel Golfo solo a grande profondità, per quanto io sappia fino ad ora (Secca di Benta Palumbo 40-60 metri, Punta della Campanella ecc.). Fuori del Golfo l'ho ritrovata alla Secca delle Formiche presso Ponza (oltre 80 metri di profondità).

È conosciuta negli erbari sotto il nome di *C. Montagnei* una forma a rametti meno laminari e più forniti di aculei, ed anche nel Golfo di Napoli si rinviene a piccola profondità (tav. XIII, fig. 1). Stando alla descrizione data dal Meneghini ed agli esemplari dello stesso nell'erbario Pisano della *C. granulata Tourneri Mont.* (che divenne poi per J. Agardh la *C. Montagnei*) devo credere sia stata proprio questa forma che il Meneghini ebbe presente.

Cystoseira Opuntioides Bory.

Tav. XIV.

C. Opuntioides, Bory *manusc.* (citaz. di J. Ag.) et. in Mont. *Fl. d'Alg.* vol. I, p. 14, tab. V, fig. 1; J. Ag., *Spec. Alg.* vol. I, p. 217, n. 6; Zanard, *Iconograph.* vol. II, p. 135, tab. 73; Dufour, *Alg. lig.* p. 40, n. 55; Piccone, *Flor. Alg. Sard.* p. 335, n. 209; Ardiss. e Stoff., *Alg. lig.* p. 57, n. 372; Falken, *Alg. Golf. Neap.*; Berthold, *Vertheil. Alg. Golf. Neap.*
Phyllacantha Opuntioides, Kg. *Spec. Alg.* p. 596.
Carpodesmia Opuntioides, Kg. *Tab. Phyc.* vol. X, p. 13, tab. 36, fig. 1.

Esemplari riscontrati

Museo Botanico di Roma, Esemplari di Algeri (Russel).
Museo Botanico di Firenze, Esemplari di Genova (Caldesi), di Algeria (Russel).
Erbario Thuret, Esemplari d'Algeria (Monnard e Russel), di Marsiglia (Giraudy).
Erbario Crit. Ital. Serie II^{a}, n. 992 (Porto Maurizio, leg. Stroffarello).
Erbario Pedicino, Esemplare di Genova (Caldesi).

La pianticella in maggio a giugno su un brevissimo asse primario (9 a 10^{mm}), produce un piccolo numero di rami (larghi 2 a 3^{mm}), piatti per tutta la loro lunghezza. — Più oltre l'asse produce dei mammelloni i quali pigliano forma cilindrica rotondati agli estremi e diventano tanti tofuli lisci. Gli apici di questi si prolungano in rami cilindrici parcamente ramosi con ramicelli di secondo ordine portanti rametti di terzo ordine molto corti, molli e alquanto appiattiti, sì che simulano tante spinette.

I concettacoli, al contrario di ciò che avviene in tutte le altre specie del genere, si producono sui rami di secendo ordine a breve distanza dalla loro base. Quivi per tutto il tratto concettaculifero il rametto si rigonfia in un corpo fusiforme echinato.

Ciò avviene in piena estate a molta profondità, in marzo-aprile a profondità minore come a S. Lucia.

Rami avventizi verso il disco radicale non si producono che in rarissimi casi. Invece un tal fatto avviene in questa, come in tutte le specie fornite di tofuli, solamente dall'apice di quest'ultimi dopo la caduta di tutta la parte sottile del ramo.

Il disco radicale nella pianticella giovanissima ha la consueta forma come nelle altre specie, ma più tardi assume forma diversa perocchè si divide radialmente in tanti rami pur essi ramificati.

La *C. Opuntioides* è pianta che raggiunge in tutta l'altezza massima di 20-25 centimetri.

Vive nel Golfo ordinariamente in acque profonde, come alla Secca di Benta Palumbo (40 a 70 metri), a Massa presso Capri. La località poco profonda (4-7 metri) nella quale io l'ho ritrovata è a S. Lucia a poca distanza dal Castello dell'Ovo; località riparata dalle onde ed ombreggiata dalla collina.

Nota — Ho trovato solamente su questa specie una curiosa Pheosporea parasitica, che cagiona, nei punti sui quali si fissa, ipertrofie del tessuto della Cystoseira (tav. XIV, fig. 2). — Descriverò prossimamente questa pianticella che mi pare meriti di figurare come tipo di un nuovo genere.

Cystoseira (?) dubia n. sp.

Tav. XV.

Della pianta che mi fo a descrivere, e che riporto con alquanta incertezza al genere Cystoseira, non conosco nè lo sviluppo nè la fruttificazione, avendola sempre ottenuta allo stesso stadio di vita. Sulle rocce di mare molto profondo (40 a 60 m.) striscia un rizoma ramoso, il quale qua e là si abbarbica a quelle per processi rizoidi come gli assi avventizi della *C. crinita*, senza far mai grandi dischi radicali. Ciascun ramo di questo rizoma è pure alquanto rigonfio all'apice ed è provvisto di un meristoma di asse primario. Qualcuno di questi apici si raddrizza e genera un asse verticale in forma di fuso lievemente schiacciato. Nascono su questo in ordine distico rami di primo ordine pur essi in basso a forma di fuso schiacciato. È questa la sola specie a me nota in cui sull'asse primario si trovano rami in disposizione distica. Trovo fatto cenno di una simile disposizione nella descrizione della *C. fibrosa* Ag. (J. Ag. Sp. I, p. 226). Taluni di questi rami si allungano in forma cilindrica per parecchi centimetri senza ramificare quasi mai: ma ben presto si appiattiscono fortemente tanto da prender forma di lamine, costate nel mezzo, larghe da 4 a 6^{mm} e grosse poco più di $\frac{1}{2}$ mm. Diventati così laminari, si suddividono in altri rami parimente laminari.

Altri rami primari od anche secondari prolungano di poco il loro tratto cilindrico, si rigonfiano verso l'apice e più tardi si sviluppano in modo affatto analogo a quello dell'asse primario, producendo pur essi rami che si appiattiscono. Su tutta la superficie dei rami laminari sono cripte a corti peli; non mi è mai riuscito rinvenirvi traccia di concettacoli. Noto che su alcuni di quei rami rinvenni talora delle cavità più grandi di quelle delle ordinarie cripte, ma le trovai sempre sprovviste di produzioni tricomatose per la presenza costante in esse di uova di Briozoarii. Non so dire se, senza questo ospite, avrebbero dato luogo ad una cripta pilifera o ad un concettacolo.

Il solo posto del Golfo dal quale ebbi questa pianta è la Secca di Benta Palumbo profonda da 40 a 60 metri. La grande difficoltà di dragare a quel posto dall'autunno alla primavera, non mi ha permesso di cercarla in tutte le stagioni.

Nell'erbario del Museo di Firenze esiste un pezzo di questa pianta senza nome, accompagnata solo da una piccola scheda che dice: 24 | XI. *Anche questa mi venne colle reti dei pescatori di corallo.* Questa scheda, stando al giudizio competentissimo del sig. prof. bar. V. Cesati, è di mano del Naccari. Nei libri e negli erbari a me noti non esiste alcuna altra traccia della nostra pianta.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Fig. 1. Spora ancora indivisa (140/1).
» 2. Spora germinante (140/1).
» 3. } Spore germinanti più avanzate (140/1).
» 4. }
» 5. Spora germinante fornita di peli rizoidi (140/1).
» 6. Embrione con infossamento apicale (140/1).
» 7. Apice dello stesso fornito del primo ciuffo di peli (140/1).
» 8. Lo stesso fornito di più ciuffi di peli (80/1).
» 9. Embrione intero più sviluppato (12/1).
» 10. Embrione con mammellone verso la sua base (12/1).
» 11. Pianticella (12/1).
» 12. La stessa più sviluppata (12/1).
» 13. Taglio longitudinale dell'apice dell'embrione allo stadio rappresentato dalla fig. 6 (220/1).
» 14. Taglio longitudinale di un embrione più sviluppato (220/1).
» 15. Taglio longitudinale di un apice di embrione. Primordio di un ciuffo di peli (220/1).
» 16. Ciuffo di peli più sviluppato e che va a pigliar posto sulla superficie dell'asse (220/1).
» 17. Taglio longitudinale del meristema apicale di una pianta evoluta; *a* prima divisione di un giovane elemento prodotto da un setto del meristema, *b.* seconda divisione.
» 18. Taglio trasverso dello stesso (140/1).
» 19. Taglio trasverso dell'apice di un embrione molto sviluppato e fornito di ciuffi di peli (220/1).
» 20. Taglio tangenziale di un embrione attraverso tre ciuffi di peli (220/1).
» 21. Taglio longitudinale del mammellone basilare dell'embrione (220/1).

Tavola II.

Fig. 1. }
» 2. }
» 3. } Schemi degli spostamenti consecutivi da ramo a ramo fino alla determinazione dell'or-
» 4. } dine di 2/5.
» 5. }
» 6. }

N.B. I numeri 1, 2, 3 ecc., apposti alle parti di ciascuna figura indicano i rami nell'ordine in cui si generano.

» 7. } Cistos. Abrotanifolia. Pianticelle intere, rappresentanti gli stadî successivi di sviluppo;
» 8. } *a.* tratto dell'embrione che funziona da ramo *N.* 1; *b* tratto dell'embrione che fa da base
» 9. } dell'asse definitivo delle piante.
» 10. }
» 11. Cyst. Abrotanifolia. Pianticella più sviluppata. Apice dell'asse definitivo visto di sopra.
» 12. Cyst. barbata. Asse primario contorto.
» 13. Cyst. Abrotanifolia. Ramo appiattito e rametti distici.
» 14. Cyst. Abrotanifolia. Apice di un ramo piatto visto di sopra.
» 15. Taglio longitudinale schematico di una giovane pianticella. Il tratto *c* rappresenta la parte dell'embrione che fa da base dell'asse definitivo della pianta; il tratto *b* è la parte del-

l'embrione piegata da un lato; *ca*, canaliculo meristemale dell'asse definitivo; *a* cellula meristemale dello stesso.

FIG. 16. C. Abrotanifolia. Pianticella sviluppata, vista di sopra.
» 17. } Assicini avventiziamente sviluppati alla base dell'asse primario.
» 18. }
» 19. Cyst. Abrotanifolia. Ramo ravvolto a spira sinistrorsa.
» 20. Altro della stessa specie ravvolto a spira destrorsa.

Tavola III.

FIG. 1. Taglio longitudinale di una vecchia cripta pilifera; *b* tessuto d'imbottitura (110/1).
» 2. }
» 3. } Sviluppo degli elementi del disco radicale (110/1).
» 4. }
» 5. }
» 6. Taglio longitudinale di una giovane vescichetta aerifera (60/1).
» 7. Taglio trasverso dell apice di un giovane ricettacolo fruttifero; *a* cellula iniziale di un concettacolo (320/1).
» 8. Ramo di C. Abrotanifolia con vescichette aerifere fornite di rametti, che portano concettacoli (12/1).
» 9. Tagliò trasverso dell'apice di giovane ricettacolo; *a* cellule iniziali a sviluppo più avanzato di quello rappresentato dalla fig. 7 (320/1).
» 10. Taglio trasverso di giovane cripta pilifera, sviluppatasi fra i concettacoli fruttiferi (320/1).
» 11. Taglio trasverso di un concettacolo in via di maturazione (180/1).
» 12. Taglio trasverso di un concettacolo a stadio di sviluppo più avanzato di quello rappresentato dalla fig. 9 (320/1).

Tavola IV.

Cystoseira Abrotanifolia Ag.

FIG. 1. Giovane pianta (2/1).
» 2. » » meno evoluta (8/1).
» 3. Taglio trasverso di ramo appiattito.
» 4. Taglio longitudinale della punta di ramo tende ad appiattirsi, produzione dei rametti distici (60/1).
» 5. Taglio trasverso di una punta di ramo che tende ad appiattirsi (60/1).
» 6. Taglio trasverso dello stesso stadio rappresentato dalla fig. 4 (60/1).
» 7. Taglio longitudinale di una punta di ramo; produzione di rametti (60/1).
» 8. Pianta a sviluppo completo (gr. nat.).

Tavola V.

Cystoseira barbata. Ag.

FIG. 1. Pianticella giovanissima.
» 2. Taglio longitudinale del meristema apicale dell'asse primario di una pianta evoluta.
» 3. Pianticella più evoluta che quella della fig. 1 (3/1).
» 4. Altra ancora più sviluppata (gr. nat.).
» 5. Pezzo di asse primario con ferita rimarginatasi.
» 6. Pianta di un anno (gr. nat.).

Tavola VI.

Cystoseira discors Ag.

FIG. 1. Giovane pianticella (6/1).
» 2. Taglio trasverso di ramo appiattito (80/1.
» 3. Taglio trasverso di punta di ramo che tende ad appiattirsi (80/1).

FIG. 4. Giovane pianticella (gr. nat.).
» 5. Taglio trasverso di ramo appiattito fornito di aculei (80 1).
» 6. Pianticella più evoluta (gr. nat).
» 7. Pianta adulta (gr. nat.).

Tavola VII.

Cystoseira Hoppii. Ag.

FIG. 1. Pianta di 2 a tre anni (gr. nat.).
» 2. Pianta di ramo fruttifero (4 1).
» 3. Vecchio asse primario (gr. nat.).

Tavola VIII.

Cystoseira crinita. Duby.

FIG. 1. Vecchia pianta (alquanto ingrandita).
» 2. Punta di ramo fruttifero (10 1).

Tavola IX.

Cystoseira amentacea. Bory.

FIG. 1. Pianta adulta di 2 a 3 anni (gr. nat.).
» 2 Forma anomala della stessa.
» 3. Ricettacolo fruttifero (10 1).
» 4. Pianticella in via di caratterizzarsi (gr. nat.).

Tavola X.

Cystoseira Selaginoides Nacc.

(Forma di acque profonde).

FIG. 1. Giovane pianta (3 1)
» 2. Pianta adulta (gr. nat.
» 3. Punta di ramo fruttifero (8 1)

Tavola XI.

Cystoseira Selaginoides Nacc.

(Forma di bassi fondi).

FIG. 1. Rametto fruttifero (12 1).
» 2. Apice di asse primario visto di sopra (12 1).
» 3. Pianta adulta (gr. nat.).
» 4. Rametto appiattito.
» 5. Parte apicale dell'asse primario visto da lato (6 1).

Tavola XII.

Cystoseira Erica-marina. Nacc.

FIG. 1. Pianta evoluta a grandezza naturale.
» 2. Ramo appiattito (3 1).

Fig. 3. Punta di ramo spinescente allo stato sterile (3/1).
» 4. Punta di ramo fruttifero (3/1).
» 5. Giovane pianticella con rami primordiali piatti.

Tavola XIII.

Cystoseira Montagnei J. Ag.

Fig. 1. Forma di acqua poco profonda (gr. nat.) C. granulata Turneri Mont.
» 2. Giovane pianta (3/1).
» 3. Forma di acqua profonda (gr. nat.).

Tavola XIV.

Cystoseira Opuntioides Bory.

Fig. 1. Pianticella giovane (gr. nat.).
» 2. Pianta annosa (gr. nat.).
» 3. Rami fruttiferi; *r*, rigonfiamenti concettaculiferi; *p*, feosporea parassita (3/1).

Tavola XV.

Cystoseira (?) dubia n. sp.

Fig. 1. Pianta adulta (gr. nat.).

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
3
2
1
4
Fig. 13.
Fig. 18.
c
c
b
b
a
a
Fig. 19.

Werner & Winter, Francoforte s/M lit.

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
ca
cm

Fig. 5
Fig. 6
Fig. 11
Fig. 18
Fig. 17
Fig. 16
Fig. 19
Fig. 20

Fig. 1.
a
Fig. 2.
a
Fig. 3.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 7.
a

Werner & Winter, Francoforte s/M. lit.

Cystoseira

Werner & Winter, Francoforte s/M. lit.

...brotanifolia Ag.

Cystoseir

arbata Ag.

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Cystoseira

scors Ag.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Werner & Winter, Francoforte s/M lith.

Cystoseira Hoppii. Ag.

Werner & Winter, Francoforte s/M. lit.

Cystoseira crinita Duby.

Cystoseir

amentacea Bory.

Cystoseira
(forma di

Werner & Winter, Francoforte s/M. lit.

...ginoides Nacc.
...e profondo)

Cystoseira Se

ioides Nacc.

Cystoseira Eri

marina Nacc.

Fig. 1.

Cystoseira M

Werner & Winter, Francoforte s/M. lit.

gnei J. Ag.

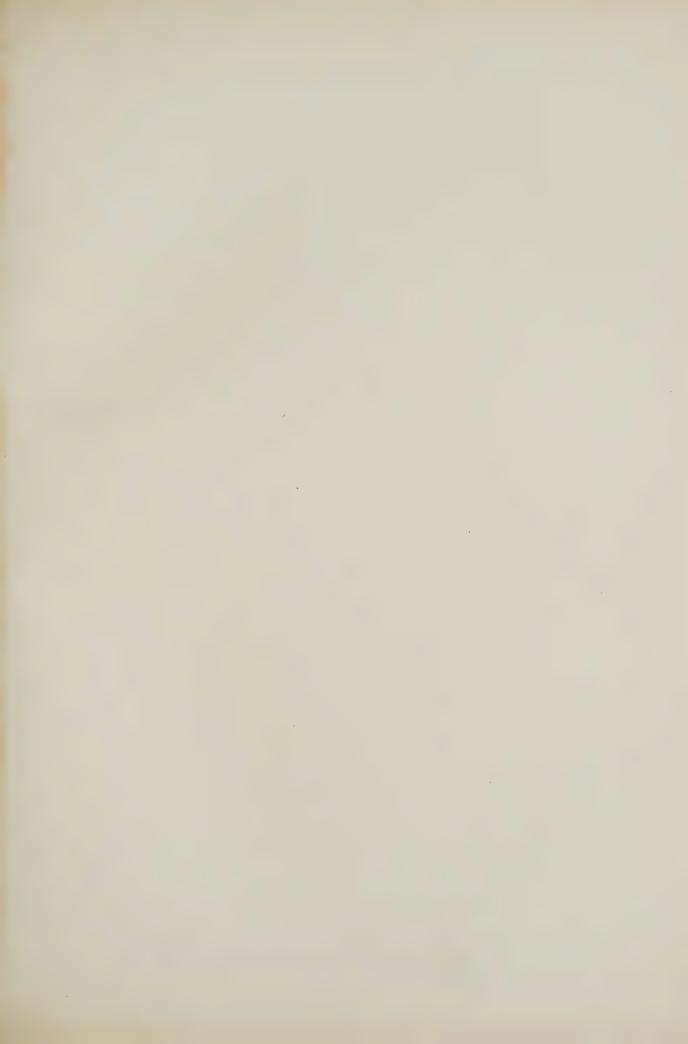
Cystoseir

Werner & Win... Frar...

puntioides Bory.

Cystoseira ?

Werner & Winter, Francoforte a/M. lit

...bia n. sp.

Ricerche embriologiche sul rene dei Mammiferi.

Memoria del prof. CARLO EMERY

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 17 giugno 1883.

(Con una tavola)

Dopo che i lavori di Semper e di Balfour ebbero dimostrato singolari ed inattese rassomiglianze fra gli organi escretori di taluni vertebrati e i tubi segmentali degli anellidi, dalla qual cosa i suddetti esimî scienziati argomentarono, almeno in modo generale, la omologia di queste formazioni, un numero grandissimo di ricerche furono istituite per appoggiare o combattere, mercè nuove osservazioni, siffatta omologia. Io non intendo ritessere la storia delle moderne ricerche sui reni, che sarebbe cosa troppo estranea all'argomento limitato che ho impreso a svolgere in questa Memoria. Mi fermerò sopra un punto speciale: qualunque opinione si possa avere circa le omologie generali dell'apparecchio escretore, nei vertebrati inferiori e nei vermi, rimane la questione se i reni persistenti degli amnioti rappresentino una porzione dei reni dei Vertebrati inferiori, o se invece siano una formazione a sè.

Balfour e la sua scuola sostengono la prima tesi, appoggiata ancora dalle ricerche di altri e specialmente da quelle di Braun sui rettili, di Bornhaupt e di Sedgwick sugli uccelli, di Kupffer, di Thayssen e di Riedel sui mammiferi. Questi scienziati hanno mostrato che il blastema, dal quale si formano i reni definitivi, ha la medesima origine che quello dei reni primitivi, ed è continuo con esso: inoltre, risulta dalle loro osservazioni che il modo di formazione dei due organi è identico, e che, in entrambi, i tubulini glandulari si formano nel blastema, indipendentemente dal condotto escretore, col quale vengono poi secondariamente a mettersi in comunicazione. Ora è ammesso da tutti che i reni primitivi, specialmente in ragione dei loro rapporti con le glandole sessuali, sono omologhi ad una parte dei reni degli anamnii; Balfour e Semper ritengono inoltre che i reni persistenti degli amnioti non sono altro che una porzione del medesimo apparecchio escretore, la quale si sviluppa più tardi del corpo di Wolff, e si mette in comunicazione con un ramo speciale del condotto di Wolff, ramo che diviene poi l'uretere. — Nè questo fatto di una porzione del rene avente un condotto escretore separato sarebbe proprietà esclusiva degli Amnioti. Già nei Selacii, la parte posteriore del rene, la quale non entra in rapporto con le glandole sessuali del maschio e che, per la perdita precoce degl'imbuti peritoneali, mostra un grado più elevato di differenziamento, ha condotti escretori proprî che sboccano nel condotto di Wolff: perciò Balfour considera questa porzione del rene come omologa al rene persistente (metanephros) degli amnioti.

La tesi opposta è sostenuta principalmente dal Kölliker, il quale, fondandosi sopra le sue osservazioni sull'embrione del coniglio, ritiene che il rene persistente degli amnioti è un organo *sui generis*, affatto differente dal corpo di Wolff pel suo modo di sviluppo. Mentre, nel rene primitivo, i tubulini avrebbero origine separata da quella del condotto, invece, i tubulini contorti del rene persistente, come ammisero pure Remak e Waldeyer, sarebbero tutti derivati da propagini dirette dall'uretere, il quale, come è consentito da tutti, è una diramazione del condotto di Wolff. Il blastema che circonda l'estremità dell'uretere non prenderebbe parte, secondo Kölliker, alla formazione dei canalini glandulari, ma fornirebbe soltanto il tessuto connettivo e i vasi del rene. La questione dell'origine del blastema renale perderebbe allora tutta la sua importanza.

Onde formarmi una opinione personale sull'argomento, ho dovuto accingermi allo studio dello sviluppo del rene persistente, e poichè, debbo dichiararlo, io propendeva già per il modo di vedere di coloro i quali considerano il rene persistente e il corpo di Wolff come formazioni congeneri, mi sono rivolto a quelli animali che hanno fornito materiale al Kölliker, cioè ai mammiferi, per potere quindi, con nuove osservazioni confermare o combattere quanto l'illustre anatomico asserisce nel suo libro.

Principale oggetto delle mie preparazioni fu una serie di embrioni di capra raccolti a Palermo alcuni anni addietro. Non ho poi trascurato di esaminare alcune altre specie di mammiferi, onde assicurarmi che il processo di formazione dei canalicoli fosse il medesimo come nella capra; a tale scopo bastò l' esame di un solo esemplare di ciascuna specie: ho esaminato, il gatto domestico, il coniglio e lo scojattolo.

In quanto a metodi di preparazione, sono quelli stessi adoperati pel mio lavoro sul rene dei Teleostei. Per le sezioni aventi scopo istologico e in ispecie per lo studio dei primi tubulini in giovani embrioni, la spessezza di 0,010 a 0,015 mm. mi è parsa la più conveniente: per lo studio del decorso dei canalicoli, specialmente in embrioni più inoltrati nel loro sviluppo, si può adottare con vantaggio lo spessore di 0,020 a 0,030. — Debbo notare espressamente che non mi sono contentato di esaminare i canalicoli renali in formazione, sopra singole sezioni dei reni: poichè i miei oggetti erano divisi in serie continue di sezioni, ho sempre esaminato tutti quei tagli che comprendevano il tubulino o l'abbozzo di tubulino di cui si trattava di determinare la continuità o scontinuità rispetto al canale collettore attiguo; e, quando anche nella tavola è rappresentata una sola sezione, le sezioni vicine sono state sempre accuratamente osservate. Questa dichiarazione non è superflua, poichè, se l'esame di singole sezioni è per sè bastevole a stabilire la continuità di due formazioni, non lo è del pari per stabilirne la scontinuità. Toldt rimprovera a Kupffer e ad altri che hanno sostenuto l'origine separata dei canalicoli contorti e dei tubi collettori di essersi avvalsi solo del metodo delle sezioni, e non di preparati per isolamento. Io credo che le sezioni fatte *in serie continua*, coi metodi moderni, bastano, nel nostro caso, a dare piena certezza; questo metodo è certamente di molto superiore per esattezza a quello dei preparati per macerazione, perchè permette di scoprire i primi principî del differenziamento nel blastema renale, quando si rivela ancora soltanto per la posizione delle cellule e per la colorazione più intensa che assumono col carminio; e ciò senza alterare i rapporti di queste cellule con i canali collettori e col resto del blastema.

D'altronde le ricerche di Toldt sono molto superficiali, per quel che riguarda la prima origine dei canalicoli, e i suoi risultati sono in contradizione con quelli di Riedel, ottenuti col metodo stesso dei preparati di macerazione.

Passo ora all'esposizione delle cose osservate: descriverò principalmente lo sviluppo del rene della capra, accennando poi brevemente quanto si riferisce ad altre specie esaminate.

Non ho avuto occasione di studiare il principio dello sviluppo dell'uretere: gli embrioni a mia disposizione erano o troppo giovani, o troppo inoltrati nella loro evoluzione. D'altronde quello che ho veduto, relativamente alla formazione di questo canale e dei suoi rami, non offre nulla di nuovo; esso viene a penetrare in una massa di connettivo embrionale ricco di elementi cellulari, situata, come è noto, al lato mediale e dorsale del corpo di Wolff, penetra cioè nel *blastema renale*. Ivi l'estremità dell'uretere è dilatata a clava e produce delle insaccature appajate, ciascuna delle quali formerà poi un canale collettore del rene. Più tardi, ciascuno di questi canali collettori si biforca all'estremità, assumendo la forma di lettera T.

A questo stadio, il blastema renale raggiunge il diametro trasversale di 0,75 mm. e incomincia la formazione dei primi tubulini contorti. Se in tale momento si ricostruisce una porzione del sistema dei canalicoli collettori del rene, mediante la sovrapposizione dei contorni di una serie di sezioni trasverse, si ottiene il diagramma rappresentato a fig. 12, il quale, messo a confronto con l'immagine data dal Braun (a tav. IX, fig. 5) di una sezione longitudinale del rene di un embrione di serpente, offre con essa molta rassomiglianza. La differenza principale sta nell'ordine spirale e nel ravvicinamento delle coppie di tubi collettori, lungo un breve tratto dell'uretere, nella capra, mentre, nel serpente, l'uretere è disteso e i canalini si seguono fra loro spaziati e in ordine lineare. Questa differenza di struttura trovasi in armonia con la forma esterna che dovrà assumere il rene, contratta e massiccia nei Mammiferi, distesa nel serpente.

La forma più giovane dei canalicoli renali che io abbia potuto osservare in questo stadio è rappresentata a fig. 1 e 2 *tt'*; contigui con la sezione di un canale collettore, si vedono nel blastema renale gruppi di cellule che hanno assunto una disposizione radiale e convergono colle loro estremità più strette, verso uno spazio centrale vuoto, o pure occupato da una cellula con plasma trasparente e nucleo pallido. Altre volte questi gruppi cellulari sono meno differenziati, senza spazio centrale (fig. 1 *t'*). I gruppi raggiati s'infossano talvolta nell'epitelio dei condotti collettori, ma sono costantemente divisi da esso per mezzo di quel contorno splendente e molto preciso, che suole separare dovunque i canali collettori dal blastema renale circostante: invece, la parte dei gruppi di cellule opposta al condotto collettore si continua tuttavia, senza nessun contorno nè limite distinto, col tessuto del blastema renale. Su di ciò non è possibile errore nè dubbio, purchè si adoperi una buona oggettiva, e si tenga conto di tutta la serie delle sezioni che interessano l'abbozzo di un tubulino, onde eliminare il sospetto che una connessione, la quale non si vede in un preparato, possa esistere invece in un altro.

Questi abbozzi dei tubulini o *vescicole renali* si estendono poi contorcendosi in varî sensi e, in uno stadio di poco più inoltrato di sviluppo, costituiscono ciascuno

un piccolo gomitolo (*pseudoglomerulo*) formato di due anse, dirette in due piani fra loro quasi normali. In questo stadio, il tubulino ha un lume ben marcato ed evidente, qualunque sia la direzione nella quale viene sezionato. Le sue cellule sono più grandi e la parte del tubulino che trovasi in vicinanza del collettore ha un contorno molto netto verso i tessuti circostanti: l'estremo opposto si confonde ancora col blastema; il tubulino è sempre assolutamente privo di comunicazione col canale collettore, e questa condizione dura ancora per qualche tempo (fig. 3 a. b. c. d. *t*; fig. 4 a. b. c. *t*). Non ho potuto riconoscere con precisione il momento in cui questa comunicazione si stabilisce; è certo però che ciò non ha luogo prima della formazione dei glomeruli malpighiani, i quali si sviluppano in rapporto con la seconda ansa del pseudoglomerulo.

In quanto al modo di formazione dei glomeruli, non posso aggiungere cose nuove a quanto scrivono su tale processo gli autori recenti, Riedel, Toldt, Kölliker, di cui confermo in massima i risultati. La cavità della capsula di Bowman preesiste alla formazione del glomerulo vascolare e non si forma, come vorrebbe il Thayssen da una fessura che si determina in una sfera piena. Però evvi un momento, in cui, non essendo ancor ben differenziata la seconda ansa del pseudoglomerulo, le cellule che dovranno formare poi il glomerulo (fig. 5 a. *n*) non sono ancora nettamente separate da quelle che diverranno l'epitelio della capsula di Bowman.

Più tardi, i canali collettori, crescendo, si ramificano dicotomicamente, e quando il rene ha raggiunto il diametro 1,7 mm., essi presentano ben quattro dicotomie successive, mentre è già accennata la 5ª dicotomia (diagramma a fig. 13); a ciascuna di queste divisioni corrisponde una generazione di tubulini contorti e di glomeruli di Malpighi più o meno sviluppati. I canalicoli più vecchi hanno già un decorso molto complicato e la loro ricostruzione esige la sovrapposizione di molti tagli e non è esente da difficoltà: vedesi in essi ben distinta la formazione di un'ansa di Henle (si confronti il diagramma a fig. 15); essi sboccano riuniti a gruppi nei canalini collettori di 1° ordine (fig. 16). I canalicoli della 2ª generazione sono poco meno complicati. Quelli della 3ª serie, comunque già notevolmente contorti e provveduti di un glomerulo ben riconoscibile, ma privo ancora di una rete vascolare bene sviluppata, sono ancora senza comunicazione coi canalini collettori, come risulta dall'esame accurato di serie di sezioni (fig 8 a. b.). Eseguendo la ricostruzione del canalicolo con la sovrapposizione di tutte le sezioni che lo comprendono, si vede che incomincia la formazione dell'ansa di Henle (fig. 14 *h*). Però quantunque siasi già notevolmente allungato, questo tubulino mostra ancora evidenti le due anse del pseudoglomerulo; l'accenno dell'ansa di Henle non è altro che la prima ansa del pseudoglomerulo (fig. 13 *h*).

Continuano intanto a formarsi, nello stesso rene, nuovi canalicoli alla periferia, in relazione con le ultime ramificazioni dei tubi collettori. Nei suoi punti principali, il processo rimane lo stesso come nei reni più giovani. Però, gli elementi cellulari degli abbozzi dei canalicoli sono meglio differenziati da quelli del blastema renale, e questo blastema stesso è un po' meno ricco di cellule, meno dissimile dal connettivo embrionale. Da ciò risulta che, in conformità di quanto ebbi ad osservare nel mio lavoro sui teleostei, è più facile studiare il processo negli embrioni inoltrati nel

loro sviluppo anzichè in quelli giovanissimi. Accanto a vescicole renali già formate e simili a quelle descritte sopra, ma meglio distinte dal blastema circostante (fig. 5 *t*) si trovano, come primi principî del differenziamento di nuove vescicole, dei cumuli di poche cellule embrionali, strettamente applicati alla parete di un collettore (fig. 5 b. *a*) e distinte dalle altre cellule del blastema, perchè più stivate fra loro e con nuclei che si colorano più intensamente a mezzo del carminio. Le vescicole si allungano tosto a forma di pera (fig. 6) verso l'estremo che tocca il collettore, mentre formano dall'altro estremo la doppia ansa, di cui il ramo più discosto dal collettore mostra precocemente una differenza d'altezza fra l'epitelio del lato convesso e quello del lato concavo (fig. 7). Il connettivo situato nella piega dell'ansa dà poi origine al gomitolo Malpighiano. Insomma tutto questo processo non differisce da quello che si osserva nei reni più giovani, fuorchè per la differenziazione più rapida e completa degli elementi cellulari dei canalicoli da quelli del blastema, per la formazione più pronta del glomerulo.

Anche in stadî più inoltrati dello sviluppo del rene, continua la formazione di nuovi canalicoli, fino al completo sviluppo dell' organo. Ho seguito la formazione del rene della capra fino in embrioni di circa 6 cm. di lunghezza, con rene del diametro trasverso di 4 $^1/_2$ mm. Il processo rimane lo stesso: sempre i nuovi canalicoli hanno per punto di partenza un cumulo di cellule del blastema renale, situato in vicinanza immediata di un ramo terminale dell'uretere (fig. 9).

Tanto nel coniglio quanto nel gatto, ho potuto riconoscere, con piena certezza, che i canalicoli contorti si formano, come nella capra, per differenziazione delle cellule del blastema renale e che non si mettono in comunicazione coi collettori prima dello sviluppo dei glomeruli. — La fig. 11 rappresenta una sezione di un giovane tubo contorto, nel rene di un embrione quasi maturo di coniglio: l'abbozzo del tubulino contorto è separato dal collettore per mezzo di un contorno splendente assai preciso: nei tagli successivi si riconosce la formazione della doppia ansa.

In un rene di capra di circa 4 mm. di diametro trasverso, si riconosce bene la formazione delle piramidi della sostanza midollare (fig. 10. *P*). Esse devono la loro origine sopratutto allo sviluppo delle anse di Henle, che si formano per l'allungamento della prima ansa di ciascun tubulino contorto, la quale si avanza come un tubo ripiegato su di sè, nella direzione dell'ilo del rene. Le anse provenienti da tubulini fra loro vicini procedono parallele e strette fra loro, formando dei fasci convergenti, i cui apici sono separati l' uno dall'altro per mezzo dei tubulini contorti della prima generazione. Questi tubulini si riconoscono nei preparati a carminio e già con debole ingrandimento, per la loro tinta molto più pallida (fig. 10 t^*): a forte ingrandimento, le cellule epiteliali veggonsi granulose, con nuclei atrofici e pallidi e con contorni indistinti: talvolta tutto l'epitelio di un tubulino è trasformato in una massa granulosa poco densa, in cui le cellule non si riconoscono più affatto. Sono questi i segni evidenti di una degenerazione o atrofia dei canalicoli della prima generazione, conseguita la quale, le estremità centrali delle piramidi potranno confluire, formando una zona continua di sostanza midollare. Questa atrofia dei primi tubulini, supposta dal Riedel, è negata dal Kölliker, per quanto si riferisce al coniglio. Nella capra essa è evidentissima. In quanto al coniglio, non posso essere

egualmente reciso nell'affermarla, vista l'età avanzata dell'unico embrione esaminato: la sostanza midollare era già formata, e, solo in vicinanza del suo limite esterno, si vedevano dei tubulini contorti (probabilmente però non riferibili alla prima generazione) alquanto pallidi e granulosi, come se fossero affetti da incipiente degenerazione dei loro epitelî. Anche in un feto di gatto a sviluppo inoltrato, il cui rene misurava $4^1/_2$ mm. di diametro trasverso, la metamorfosi granulosa di alcuni canalicoli era evidente, benchè meno progredita che nell'embrione di capra di cui fu detto poc'anzi. A chiarire meglio questo punto saranno necessarie ulteriori ricerche.

Un processo non meno interessante e poco noto è quello della formazione della pelvi renale e rispettivamente dei calici renali. Conformemente a quanto riconoscono Riedel e Kölliker, posso affermare che, passato il primo stadio dello sviluppo del rene, in cui si formano i canali collettori di primo ordine, non ha più luogo produzione di nuovi collettori che partano dall'uretere (rispettivamente dal bacinetto); ora, poichè il numero dei fori delle papille ossia dei dutti papillari è maggiore di quello dei collettori di primo ordine, è d'uopo che avvenga una riduzione di questi collettori, almeno fino alla seconda o alla terza dicotomia per cui i collettori di 3° o di 4° ordine abbiano sbocco diretto nella pelvi. Kölliker crede che, per ottenere una siffatta riduzione, basti la scomparsa o l'atrofia parziale dello stroma congiuntivale del centro del rene. Tale atrofia è certo necessaria, e mi pare anche, per quanto ho osservato, ch'essa abbia luogo difatti; ma, oltreciò, è pure indispensabile che avvenga la riduzione dei canalicoli contorti i quali sboccano in quei collettori, come suppone il Riedel. Se questa riduzione non avesse luogo, ne seguirebbe che, ridottisi i collettori, i canalicoli contorti avrebbero il loro sbocco direttamente nel bacinetto, ciò che non fu visto mai da nessuno. Nonostante la scarsezza dei fatti constatati finora, io ritengo la riduzione dei canalicoli contorti delle prime generazioni sufficientemente dimostrata, sia per l'osservazione fattane nella capra, sia ancora per la necessità logica di questa riduzione in tutti i mammiferi.

Però, non è meno necessario supporre una simile atrofia dei canalicoli delle generazioni seguenti, con persistenza delle ultime generazioni soltanto: almeno se si vuole ammettere che la struttura del rene sia quale la descrivono i moderni anatomici (Ludwig, Henle, Krause ecc.). I tubulini retti dell'adulto non accolgono tubulini contorti prima di essere giunti, dopo ripetute dicotomie, nella sostanza corticale. E poichè ad ogni dicotomia dei collettori corrisponde, nell'embrione, lo sbocco di tubulini uriniferi, è d'uopo che quei tubulini che corrispondono alle dicotomie della sostanza midollare siano scomparsi durante lo sviluppo. Se queste considerazioni sono giuste, si avrebbe quindi nello sviluppo del rene dei mammiferi la scomparsa successiva dei tubulini e glomeruli più interni, cioè primi formati, mentre avverrebbe la formazione di nuovi tubulini e glomeruli negli strati superficiali dell'organo. Il rene dell'embrione crescerebbe per apposizione di nuovi strati glandulari sviluppatisi nella zona corticale del blastema, i quali, a partire da un certo livello, rappresenterebbero la corteccia definitiva, mentre gli strati situati più internamente, perdendo i loro tubulini contorti, diverrebbero, a sviluppo compiuto, la sostanza midollare del rene.

In conclusione, risulta da queste mie ricerche che, nei mammiferi, come nei

rettili (Braun) e negli uccelli (Sedgwick), quindi in tutti gli amnioti, i canalicoli contorti del rene persistente hanno origine indipendentemente dall'uretere e dai tubi collettori; ciò conformemente a quanto ha luogo nel rene primitivo degli stessi amnioti e nei reni degli anamnii. Essi hanno per punto di partenza gruppi di cellule, i quali, differenziandosi, formano ciascuno un tubulino urinifero tutto intiero, dalla capsula di Bowman fino allo sbocco nel collettore; l'ansa di Henle si forma per prolungamento della prima ansa formata dal tubulino contorto nello stadio di pseudoglomerulo; in ciò mi trovo d'accordo con Riedel contro Thayssen, nel riconoscere che quel tratto di tubulino contorto che sta tra l'ansa di Henle e il collettore (*Schaltstück* dei Tedeschi) ha origine dallo stesso abbozzo embrionale come il resto del tubulino contorto e non è una propagine del tubo collettore; ciò risulta chiaramente dai diagrammi a fig. 13, 14 e 15.

Inoltre il blastema embrionale da cui i canalicoli contorti si differenziano è continuo con quello del rene primitivo.

Sembrami quindi legittima, anzi necessaria conseguenza morfologica di questi fatti: 1°) Che il rene persistente degli amnioti e il corpo di Wolff sono formazioni omodiname. 2°) Che il rene persistente e il rene primitivo sono, in maniera generale, omologhi ai reni degli anamnii. — Queste due proposizioni sono interamente conformi alle vedute teoriche di Balfour, cennate in principio. Viene ancora in appoggio alla seconda proposizione la grande rassomiglianza che vi ha, in quanto al modo di formazione del primo accenno dei canalicoli, fra il rene dei mammiferi e quello dei teleostei, come si riconoscerà facilmente confrontando le fig. 6 e 9 di questa Memoria con le fig. 7, 8 e 9 del mio lavoro sul rene dei teleostei. Negli uni, come negli altri, i canalicoli renali partono da alcune cellule che si differenziano dal blastema del rene, in vicinanza immediata dal condotto renale o dei rami dello uretere, e sono affatto indipendenti dai loro condotti escretori.

In ciò, il rene differisce profondamente da tutte le altre glandole, le quali, senza eccezione, hanno origine dalla invaginazione di un epitelio. È vero che, in seguito alla scoperta degl'imbuti segmentali degli embrioni dei selacii, si è cercato di far rientrare il rene nello schema generale, considerando i canalini uriniferi dei selaci come invaginazioni dell'epitelio peritoneale, e ritenendo che il processo di sviluppo si fosse poi modificato in altri animali, in modo che il blastema renale derivasse da propagini cave o piene dell'epitelio peritoneale; io stesso ho accettato questo punto di vista nel mio lavoro sui teleostei. Ma la scoperta fatta da Sedgwick, e che posso confermare appieno per propria osservazione, che un vero processo d'invaginazione peritoneale non esiste negli embrioni dei selacii, ma che i cosidetti tubi segmentali non sono altro che avanzi della communicazione esistente da prima fra il peritoneo e la cavità delle protovertebre, schiude la via a ben diversi concetti teorici, e rende necessaria una revisione di tutti quei processi descritti come invaginazioni segmentali del peritoneo, nello sviluppo dei rettili, dei pesci ecc. Lascerò quindi per ora interamente riservata la questione del significato che debbasi attribuire a questo modo tutto proprio di sviluppo dei tubi uriniferi dei selacii.

Mi piace pertanto porre in rilievo l'appoggio che le osservazioni embriologiche sullo sviluppo del rene dei mammiferi ricevono dalla sperimentazione patologica.

A tal riguardo, io mi trovo in una condizione eccezionalmente favorevole, poichè il mio ottimo amico prof. Tizzoni, non avendo finora in questa Università un laboratorio conveniente, ha cercato ricovero nel laboratorio di Zoologia ed ivi fa con un suo bravo discepolo, il sig. Pisenti ricerche sulla rigenerazione e sulla ipertrofia compensativa del rene (già pubblicate in comunicazione preliminare). Ho veduto molti preparati, i quali dimostrano ad evidenza che, avvenendo neoformazione patologica, i tubulini uriniferi derivano, per differenziamento, dal tessuto connettivo interstiziale, ciò che equivale a dire, dai residui del blastema renale non impegnati nella formazione dei tubi glandolari, residui i quali costituiscono lo stroma congiuntivale del rene. Certo il processo di neoformazione patologica si scosta di molto da quello embrionale, in quanto ai particolari dello sviluppo, che gli autori faranno conoscere fra non molto nel loro lavoro definitivo; ma il sostrato congiuntivale o (mi si permetta l'espressione) mesenchimale della neoformazione rimane lo stesso.

Ben diverso da questo è il processo di neoformazione patologica di altre glandole, ad es. del fegato, di cui avemmo in questo laboratorio un bel caso sperimentale: anche qui il processo patologico ripete essenzialmente il processo di sviluppo embrionale: gli elementi epiteliali, essendo quelli di una vera glandola, derivano da elementi epiteliali preesistenti e non dal tessuto connettivo circostante. Questo avviene in forza del principio generale, che le differenze dello sviluppo embrionale persistono nell'accrescimento fisiologico e patologico, sicchè anche questo può valere a spargere nuova luce sui fenomeni della prima formazione degli organi e dei tessuti. Vi sono nello sviluppo dell'organismo animale dei processi molto più facili a riconoscersi ad evoluzione embrionale inoltrata, anzichè nel momento in cui un organo incomincia appena ad accennarsi da un abbozzo indifferente: ciò dipende dal fatto che, non solo le cellule embrionali già impegnate in una formazione nuova, ma tutte le cellule dell'embrione, anche quelle relativamente indifferenti si differenziano man mano in vario senso e vengono allora più facilmente riconosciute e discriminate le une dalle altre. Onde meglio conoscere il modo di formazione di certe parti sarà sovente buon consiglio non attenersi alla ricerca dei primi accenni, ma studiare eziandio ciò che avviene più tardi, e perfino nell'adulto, in condizioni normali o patologiche.

OPERE CITATE IN QUESTA MEMORIA

Balfour, *Handbuch der vergl. Embryologie.* Uebers. von B. Vetter. II Bd. Jena 1881.

Braun, *Das Urogenitalsystem der einheimischen Reptilien.* Arbeiten aus d. Zoolog. Zootom. Instit. Würzburg. IV. 2. 1877.

Emery, *Studî intorno allo sviluppo ed alla morfologia del rene dei Teleostei.* R. Accademia dei Lincei. Memorie Ser. 3.ª XIII.

Kölliker, *Entwicklungsgeschichte des Menschen u. der höheren Thiere.* Leipzig 1879.

Kupffer, *Untersuchungen über die Entwicklung des Harn-und Geschlechtssystems.* Archiv. f. Mikrosk. Anat. I.

Riedel, *Entwicklung der Säugethierniere.* Untersuch. aus dem Anatom. Institut zu Rostock. 1874.

Sedgwick, *Development of the Kidney in its Relation to the Wolffian Body in the Chick.* Studies from the Morphological Laboratory in the University of Cambridge. 1880.

Semper, *Das Urogenitalsystem der Plagiostomen und seine Bedeutung für das der übrigen Wirbelthiere.* Arbeiten aus dem Zoolog. Zootom. Institut zu Würzburg II. 1875.

Thayssen, *Die Entwicklung der Nieren.* Vorläuf. Mitth.: Centralbl. f. d. Medic. Wiss. 1873, n. 38.

Tizzoni, *Studio sperimentale sulla rigenerazione parziale e sulla neoformazione del fegato.* R. Accademia dei Lincei. Memorie Ser. 3.ª XIV.

Tizzoni e Pisenti, *Studî sperimentali sull'accrescimento fisiologico e patologico del rene.* R. Istituto Veneto di sc. lett. ed arti. Ser. 5.ª Vol. VIII.

Toldt, *Untersuchungen über das Wachsthum der Nieren des Menschen und der Säugethiere.* Sitzungsber. d. kk. Akad. d. Wissensch. III Abth. LXIX. 1874.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Segni comuni a tutte le figure.

U Uretere.
u rami di esso o canali collettori.
t tubulini contorti.
g glomerulo di Malpighi.
h ansa di Henle.
P piramide di Malpighi.

Tutte le figure fuorchè la 11ª si riferiscono ad embrioni di capra.

FIG. 1, 2. Sezioni di un rene di capra del diametro di 0,75 mm.: abbozzi di tubulini contorti allo stato di vescicole renali. 200:1.

» 3. a, b, c, d. Quattro sezioni successive comprendenti un tubulino allo stadio di pseudoglomerulo, di un rene un poco più inoltrato nello sviluppo. 200:1.

» 4. a, b, c, Tre sezioni successive di un pseudoglomerulo del medesimo rene. 200:1.

» 5. a, b, Due sezioni successive di un rene ancora più inoltrato nel suo sviluppo, del diametro di 1,7 mm.; *a* primo accenno della differenziazione di un tubulino; *n* cellule che dovranno formare il glomerulo, in un canalino contorto che sta tra lo stadio di vescicolo renale e quello di pseudoglomerulo. 200:1.

» 6. Sezione di un giovane canalicolo allo stadio di pseudoglomerulo del medesimo rene. 200.1.

» 7. Sezione dell'accenno di un glomerulo di Malpighi del medesimo rene; *n* cellule del blastema che formeranno il gomitolo vascolare; *e* epitelio esterno; *i* epitelio interno della capsula di Bowman. 200:1.

» 8, a, b, Due sezioni di un medesimo canalino contorto della 3ª generazione, dello stesso rene come le fig. precedenti: Nella fig. a, si vede il glomerulo; nella b il punto di contatto col collettore, col quale la comunicazione non è ancora stabilita. 200:1.

» 9. Primo accenno di un tubulino contorto in un rene del diametro di 2,3 mm.; *a* gruppo di cellule che formeranno il tubulino. 200:1.

» 10. Sezione trasversa di un rene di 4 mm. di diametro; *zc* zona corticale granulosa in cui si formano i nuovi tubulini; g^1· g^2· g^3· g^4· successive serie o generazioni di glomeruli; t^* e g^* tubulino e glomerulo della prima generazione in via di atrofia per degenerazione granulosa. 32:1.

» 11. Dalla sezione trasversa del rene di un embrione quasi maturo di Coniglio: si vede un giovane tubulino contorto ancora separato dal collettore: nelle sezioni contigue si riconosceva la formazione delle anse del pseudoglomerulo. 200:1.

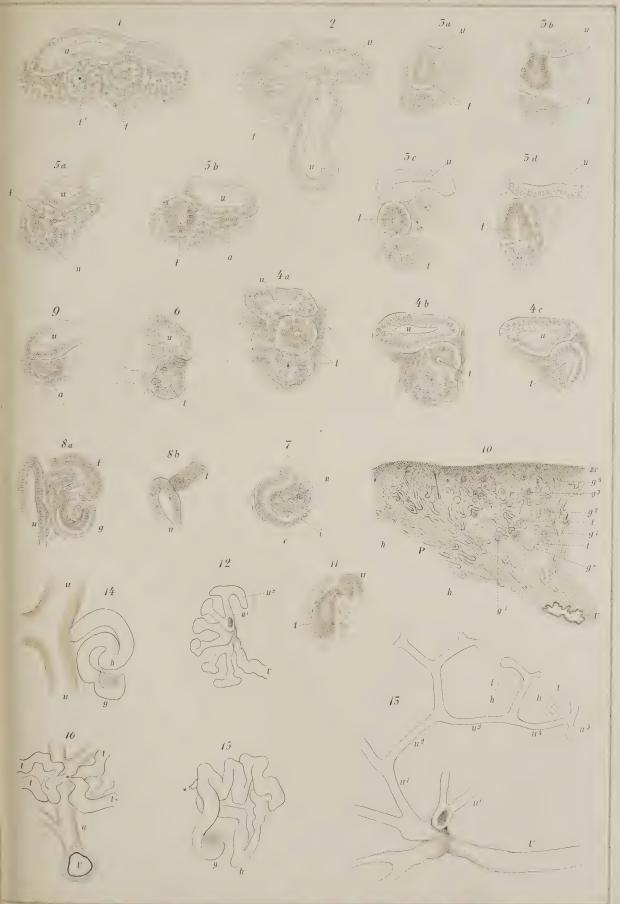
» 12. Diagramma di alcuni rami successivi dell'uretere in un rene di 0.75 mm. di diametro costruito mediante la sovrapposizione dei contorni di più sezioni successive (al medesimo rene si riferiscono le fig. 1 e 2). 45:1.

» 13. Diagramma costruito nello stesso modo di alcuni collettori in un rene del diametro di 1,7 mm. (si riferiscono allo stesso rene le fig. 5, 6, 7, 8, 14, 15 e 16) : u^1, u^2, u^3 . . . . . collettori di 1°, 2°, 3° . . . . ordine. 50:1.

» 14. Ricostruzione del tubulino contorto della terza generazione rappresentato dalle sezioni a fig. 8. 200:1.

» 15. Ricostruzione di un tubulino contorto della prima generazione dello stesso rene: * sbocco nel collettore. 100:1.

» 16. Collettore che accoglie più tubulini contorti; ricostruzione come sopra: t^* il tubulino rappresentato a fig. 15; * sbocco nel collettore. 100:1.

Emery fec.
Lit. Bruno e Salomone Roma

Osservazioni sulla medicazione locale della lepra (Elefantiasi dei Greci).

Memoria del prof. ROBERTO CAMPANA

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 17 giugno 1883.

(Con una tavola)

Dopo riconosciuta la natura parassitaria della lepra, in tanto sconforto di risultati terapeutici innanzi ad un male così grave, nasceva spontaneo il pensiero di osservare se i parassiti di essa subissero una qualche influenza sotto l'azione di replicati tentativi di cura puramente locale. A questo fine io ho eseguito alcune ricerche, che enumero:

1. Medicazione dei tratti di cute con infiltrati leprosi, mercè diverse sostanze *antiparassitarie*;
2. Osservazioni cliniche dei risultati avuti con questi mezzi;
3. Osservazioni microscopiche di tratti di cute affetti da infiltrati leprosi, prima e dopo l'applicazione delle dette sostanze.

I.

Prima di passare a dire delle medicazioni eseguite, riporto in un breve sunto le storie cliniche degl' infermi su cui son cadute le osservazioni.

Osservazione 1ª. — Serretta Antonio, di anni 42, di Voltri, soffre dell'attuale malattia da 5 anni, ed ha presentato macchie eresipelatoidi sparse in diversi tratti dell' ambito cutaneo, eruzioni noduliformi del volto e degli arti, eruzioni flittenose degli arti, sintomi febbrili ricorrenti.

Ora fa osservare ispessimenti diffusi e notevoli della cute del volto, specialmente del naso, gote, fronte, che deformano grandemente la sua fisonomia: il volto è liscio, bruno-giallastro, lucido, glabro in diversi punti. Sul tronco fa vedere parecchi noduli roseo-brunastri, lisci, di varia grandezza da quella di una piccola avellana a quella di una moneta da 5 centesimi, molli al toccamento.

Negli arti le seguenti modificazioni. Nelle mani la cute delle palme è assottigliata, invece il tessuto sottocutaneo è ispessito ed è più duro del normale; i muscoli sottoposti sono ridotti di volume, ciò tanto nella regione tenare come nella ipotenare. Anche i muscoli interossei della parte dorsale delle mani sono ridotti di volume. Nelle braccia ed avambracci, noduli papuloidi di varia grandezza e dai caratteri di quelli osservati nel tronco. Arti inferiori: noduli sparsi, come quelli del tronco, sulle cosce: gambe assottigliate con cute arida, floscia, poco spessa; strato sottocutaneo più spesso del normale; muscoli ridotti di volume. Contrattilità muscolare diminuita negli arti. Sensibilità tattile od alterata, o diminuita sugli arti medesimi e su tutti i tratti con eruzione; sensibilità dolorifica, termica, elettrica diminuite. Cromocitometria,

in media, 160. Le altre alterazioni si omettono per brevità, e saranno descritte per esteso in altro lavoro.

Diagnosi. — Lepra tubercolare con manifestazioni cutanee, della mucosa nasale, palatina e laringeale; nevriti croniche leprose; tumore splenico idem.

Osservazione 2.ª — Zino Giuseppe di Genova, di anni 50, uomo valido, sofferente da oltre sei mesi di eruzioni maculo-eritematose cutanee, delle quali, una al gomito destro, a causa di traumi, che vi hanno agito sopra, si è ulcerata.

Ora presenta delle macchie eresipelatoidi e grosse papule distribuite senz'ordine su molti punti della superficie del corpo, con maggiore confluenza sulle regioni rotuliene, sulle natiche e sul volto.

In corrispondenza di queste eruzioni la cute è più calda delle parti vicine, alquanto più spessa e più duropastosa di queste. Le papule sono di grandezza varia, del diametro cioè da quello di un' avellana a quello di una moneta da 5 centesimi; sono pianoconvesse, poco proeminenti, rossofosche. La sensibilità tattile è alterata in esse, come sulle macchie.

Oltre a queste alterazioni vi hanno nelle natiche degl' indurimenti nodiformi, estesi in larghezza per oltre una moneta da 5 franchi, e corrispondenti al derma ed al tessuto sottocutaneo, ben limitati. Alcuni di essi corrispondono a delle eruzioni eresipelatodi, altri sottostanno a delle papule.

Si constata la presenza di bacilli della lepra nel succo spremuto da una puntura praticata su di un nodulo.

Diagnosi. — Lepra con manifestazioni cutanee eritematonodulari.

II.

Sopra i predetti due infermi sono stati eseguiti esperimenti curativi con diverse sostanze ed in varia guisa; quelle delle quali faremo parola sono due: la *crisarobina* applicata sulla cute sotto forma di unguento, ed il *nitrato* di *argento*, iniettato con adatte siringhe ipodermiche a doppia corrente nella cute medesima, in soluzioni opportune.

Non ripeterò i reperti clinici delle fasi giornaliere delle eruzioni trattate coi metodi in parola; solo accenno in generale che dove fu applicata a proposito la crisarobina, colà avvenne la disparsa della eruzione.

Nell' adoperare il nitrato d' argento mi servivo del seguente mezzo: Due aghi di Pravaz (*a b c*), riuniti ad angolo acuto per la loro punta, costituirono la parte principale della piccola siringa a doppia corrente. Com' è naturale, la goccia di liquido iniettata al di sotto della cute, a mezzo di uno degli aghi, al quale era adattata la siringa, non potendo distendere molto i tessuti in mezzo a cui penetrava, facilmente prendeva la via di scarico, che le forniva lo estremo beante dell'altro ago, al quale non era aggiunto nulla che impedisse il defluvio del liquido. La soluzione di *nitrato* di *argento*, adoperata per le iniezioni, fu dell'uno per 100. Colla iniezione di questa sostanza venivano prodotti degli ascessi dermici piccolissimi, ai quali succedeva tutt'all'intorno la formazione di un granuloma cicatriceo, con cui

cercavasi di sostituire al tessuto granulomatoso della lepra, poco vitale e stabile, un tessuto più compatto, più vitale e più stabile.

Clinicamente l'esperimento corrispose; poichè in corrispondenza di tratti di cute ove erano state praticate delle decine di queste iniezioni si veniva a formare una larga chiazza di depressione cicatricea, la quale facea un notevole contrasto colle parti circostanti, rimaste tuttavia molto tumide, dure, rilevate.

Questo pel *nitrato di argento*. Per la *crisarobina*?

Come ho già fatto conoscere in un' altro mio scritto (*La polvere di Goa in alcune dermopatie*) la crisarobina dà effetti giovevoli soltanto nelle forme leprose eritematonodulari di recente data. Epperò io ho adoperato questo mezzo soltanto sull' infermo Zino (Osserv. 1[a]).

Nel predetto infermo, dietro questo trattamento della crisarobina, applicata a forma di unguento sulle chiazze nodulari ed eresipelatoidi, si produceva lo eritema *crisofanico*, a cui succedeva, dopo un certo numero di giorni, la disparsa della eruzione leprosa.

III.

Avendo asportato, col permesso dello infermo, dei piccoli brani di cute (ammalata), prima di praticarvi la medicazione, ho preparato i medesimi con induramento in alcool assoluto, per poterli poi osservare in tagli per microscopio.

Esame microscopico. — Non parlerò della notevole infiltrazione flogistica del derma, del rilevante assottigliamento della epidermide, della presenza, nel derma medesimo, di grosse cellule, che passano ora col nome di cellule leprose di Virchow, nè della disparsa, o dello stato quasi rudimentale delle glandule e follicoli cutanei, e di altre alterazioni delle quali hanno parlato molti, da Virchow in poi, e delle quali ho data descrizione in un altro mio scritto (*Note cliniche ed anatomiche sulla lepra*). Invece accennerò a quel tanto che riguarda la presenza del parassita nel granuloma cutaneo della lepra medesima.

Trattando i brani di cute col metodo di tinzione alla Ehrlich, colla fucsina disciolta nella cosidetta acqua di anilina, acido nitrico, ecc. si avevano i seguenti risultati.

Esame microscopico eseguito con un microscopio della Clinica, fabbrica Nachet, grande modello, fornito di un condensatore della luce, non di Abbe, ma ideato ed adattato dal medesimo Nachet.

In mezzo alla trama connettivale, residua all'azione dell'acido e tinta di vesuvina (fig. 1 *a*) si osservavano non più le cellule di granulazione e le cellule di Virchow, che formavano la infiltrazione, di cui ho accennato sopra, ma, nel loro posto, tanti gruppi di granuli e di sottili e piccoli bastoncelli, colorati in rosso-rubino, tendente al violaceo in alcuni di essi (fig. 1 *b*). Tali gruppi nella loro forma ricordavano la forma di cellule, e si presentavano sparsi irregolarmente nei punti ove prima della preparazione alla Ehrlich si osservavano cellule di infiltrazione.

Se invece di trattare questi brani di cute col metodo di Ehrlich, li preparava colla semplice tinzione col violetto di genziana, e consecutivo trattamento in acqua, alcool, olio di garofani, e chiusura in olio di garofani, col microscopio ad ingrandimento di 800 diametri si constatava la esistenza dei medesimi bastoncelli e granuli; ma questi si presentavano disposti nel protoplasma di ciascuna cellula; protoplasma

che era stato quasi del tutto disfatto nel metodo di Ehrlich, coll'acido nitrico. Quivi le forme granulari ed i bastoncelli si presentavano più allontanate tra di loro, e sparse in un perimetro molto più largo di quello che occupavano se trattati col metodo di Ehrlich; perimetro che corrispondeva a quello del protoplasma delle cellule di granulazioni e delle cellule cosidette di Virchow.

Osservando alcuni di questi gruppi di bastoncelli con un più forte ingrandimento (oculare 3, obb. 7, immersione in acqua, condensatore della luce di Nachet) si rilevano le stesse forme ricordate più in alto, colle seguenti particolarità. Dei bastoncelli si presentano uniformi nella loro superficie e molto sottili, soltanto pochi; i più si presentano alquanto spessi e fanno vedere nel loro interno dei punticini non colorati, splendenti, rotondi (sporule?) in numero di uno, o di rado di due, e, più frequentemente di tre, disposti successivamente ; quando ne presentano uno solo, questo è in un estremo. Oltre di questi bacilli con entro dei corpuscoli, che dai più competenti nella materia (Neisser, Tommasi-Crudeli, ecc.), sono stati considerati come sporule, si osservano pure degli altri corpuscoli, o sporule libere nel protoplasma della cellula. Però queste sono in piccolissima quantità : e di essi alcuni si vedono isolati, altri riuniti in due (fig. 2, *bb*).

Avendo asportato un tratto di cute in cui è stata praticata la cura colla crisarobina si sono rilevate le seguenti particolarità.

La cute che era infiltrata interamente da cellule con bacilli si presenta ora soltanto qua e là infiltrata da cellule di granulazione, non contenenti bacilli. Solo poche di esse ne presentano tuttavia qualche gruppo. Così per es. in un campo di microscopio (ingr. 800 diametri) di queste cellule che hanno tuttavia bacilli se ne vede una o due (fig. 3, *c*, *c*); ed in alcuni tratti lungo le lacune linfatiche perivasali.

Il preparato che presento l'ho eseguito colla tinzione al violetto di genziana, e non in fine di cura. Altro preparato eseguito dal prof. Salvioli in fine della cura e con metodo di Ehrlich non avrebbe fatto rilevare più la presenza di qualche bacillo.

I brani di cute medicati col nitrato d'argento, preparati anche dal prof. Salvioli si presentavano infiltrati intensamente da cellule simili a leucociti, delle quali cellule molte prive di bacilli, parecchie ripiene di essi, ed in mezzo a queste si vedevano tuttavia alcune cellule di Virchow.

In una *conferenza clinica* notai che la eresipela può avere una notevole influenza a far disparire le eruzioni leprose cutanee. Intanto avendo potuto esaminare al microscopio dei tratti di cute di leproso presi da eresipela, ho trovato diminuita la infiltrazione specifica della lepra; in alcuni punti il processo di infiltrazione si distribuisce attorno ai vasi come nello inizio della lepra ; però la infiltrazione specifica si presenta tuttavia riccamente provvista di bacilli.

Riserbandomi di ritornare sull'argomento dopo nuove osservazioni, noto ora soltanto le seguenti brevi conclusioni.

1. Alcuni medicinali che agevolano la risoluzione di eruzioni leprose, agiscono anche come mezzi atti a far disparire il parassita esistente in esse eruzioni medesime.

2. Delle sostanze da noi tentate a questo fine la crisarobina tiene in alcuni casi, la preferenza.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

1.ª Sezione di cute asportata da una chiazza eruttiva leprosa di recente data, esistente nel petto, pria che sulla medesima fosse stata applicata qualche medicazione. Tinzione col metodo di Ehrlich.

a) Fibre connettivali ecc., rimaste all' azione dell'acido nitrico.

b) Cumoli di bacilli in corrispondenza dei punti dove vi erano cellule di infiltrazione leprosa.
(3 oculare, 5 obb. Nachet).

2.ª Sezione di cute come sopra, osservata a maggiore ingrandimento.

a) Fibre connettivali residue, tinte con vesuvina.

b) Cumoli di bacilli, di cui alcuni in isporificazione, e di sporule.
(3 ocul. 7 obb. immersione e condensatore della luce).

3.ª Sezione di cute asportata dopo alcuni giorni dalla medicazione con crisarobina. Tinzione con violetto di genziana.

a) Nuclei di cellule di granulazione.

b) Pochi gruppi di bacilli tuttavia esistenti.
(3 ocul. 5 obb. Nachet).

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3

Nuove ricerche sulla riproduzione totale della milza. Contribuzione sperimentale allo studio della funzione ematopoetica del tessuto connettivo.

Memoria del prof. GUIDO TIZZONI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 17 giugno 1883.

(Con due tavole)

Dimostrata con alcune mie precedenti ricerche la possibilità della riproduzione totale della milza, tanto per l'asportazione, quanto per alcune malattie di questo viscere, studiata la sede, il modo di sviluppo e la struttura istologica di queste neoformazioni di parenchima splenico a seconda che hanno origine per l'una o per l'altra cagione, stabilito il significato che devono ricevere questi fatti per rapporto alla fisio-patologia della milza e all'ematopoesi in generale (¹), rimaneva ancora da esaminare quello che accada quando si pratica la splenectomia in animali che abbiano già neoformazioni di milza nel grand'omento e nell'epiploon gastro-splenico per malattia della milza primaria, ciò appunto che mi son proposto di fare col presente lavoro.

Già da qualche tempo io era invitato a queste nuove ricerche, come può vedersi da quanto io scriveva a p. 176 (degli Atti) della mia precedente Memoria « *Sulle milze accessorie e sulla neoformazione della milza per processi patologici della milza primaria* », nella quale appunto venivano riportati alcuni esperimenti, che mentre servivano in allora alle questioni che ci eravamo proposti di studiare, dovevano valere in appresso, allorchè questi animali sarebbero stati uccisi, a rispondere a questi nuovi quesiti, e a fornire il materiale per il presente lavoro. In quell'occasione io annunziava che avrei reso conto di queste nuove ricerche insieme ad altre splenectomie da me praticate da molto tempo (1 a 3 anni) sopra animali giovanissimi e con milza sana; e nel fatto avrei pienamente corrisposto alle promesse, se queste ultime osservazioni non avessero richiesto ancora molto tempo prima di essere terminate, e se l'attività vertiginosa della nostra scienza e l'andazzo di correr dietro ad un fatto nuovo o ad una nuova via di ricerca appena questa è annunziata e prima che venga esposta per intiero e in tutte le sue particolarità, non mi avessero dato luogo a temere che altri potesse seguirmi in queste osservazioni, precedermi nelle conclusioni

(¹) Tizzoni e Fileti, *Studi patologici e chimici sulla funzione ematopoetica.* Atti della R. Accad. dei Lincei. Ser. 3ª, Vol. X; Tizzoni, *Sulla riproduzione della milza.* Atti della R. Accad. dei Lincei. Ser. 3ª, Vol. X; Tizzoni, *Sulle milze accessorie e sulla neoformazione della milza per processi patologici della milza primaria.* Atti della R. Accad. de' Lincei. Ser. 3ª, Vol. XIII.

e fors' anche combattermi in quel poco che, in modo molto sommario e incompleto, fu da me esposto in una comunicazione preventiva ([1]). Per queste ragioni debbo limitarmi oggi a pubblicare quello che riguarda gli effetti della splenectomia negli animali che hanno già riproduzione della milza per malattia della milza primaria, e debbo rimettere ad altra Memoria e ad altra epoca il riferire quanto avrò occasione di osservare negli animali giovanissimi smilzati da molto tempo. Così avrò ancora l' opportunità di studiare in questi animali, come difatti ho già cominciato a studiare, se le alterazioni di forma e di sede che si osservano nella milza riprodotta possono trasmettersi per eredità, e spiegare a questo modo come possano trovarsi in animali con la milza primaria perfettamente normale un certo numero di piccole milze nelle grandi duplicature del peritoneo; ciò che, almeno a priori, sembra essere molto probabile dopo le bellissime e recenti ricerche del Brown-Séquard sulla ereditarietà di alcune alterazioni di nutrizione sperimentali ([2]).

Le ricerche che formano l'oggetto del presente lavoro, furono eseguite esclusivamente sopra due animali. Il numero delle osservazioni perciò non pecca davvero per abbondanza; ma di questo certamente non vorrà farmi carico chi conosce in quali condizioni e con quali mezzi io debbo lavorare, e chi pensa che mancando segni clinici particolari per diagnosticare le malattie della milza primaria e la neoformazione della milza nelle grandi duplicature del peritoneo, non si riesce sempre a trovare alla prima prova, nell'animale che si opera, le condizioni richieste, e che solo praticando molte splenectomie alcune volte si arriva a cadere per caso sopra animali che hanno neoformazione di milza per malattia della milza primaria. Si aggiunga a questa considerazione, che il cattivo andamento della operazione e la morte dell'animale operato (oss. 4ª della mia precedente Memoria) guastano spesso o diminuiscono il materiale già preparato per questo studio, e che, per farsi un' idea completa dell'intiero processo di neoformazione, non si può nè si deve prender conoscenza solo di quanto avviene in alcune sezioni di piccole milze neoprodotte, esaminate prima e dopo la splenectomia, ma bisogna analizzare molti di questi noduli, e rendersi padroni di quanto ciascuno di questi presenta in tutte le sue parti, col fare dell'intiero nodulo delle serie complete di sezioni microscopiche, e si comprenderà allora anche meglio come le ricerche di questo genere non possono esser mai molto ricche di osservazioni.

E adesso passo senz'altro alla descrizione dei due esperimenti che formano soggetto della presente Memoria, e dei quali ho già riferito nell'oss. 5ª e 6ª di un mio precedente lavoro quella parte che poteva interessare le questioni che studiavo in allora.

I.

Oss. 1ª. 20 maggio 1882. — Piccolo cane pomere; cloroformizzato l' animale e tirata fuori la milza con la solita incisione laterale delle pareti addominali, riesce facile di accorgersi che quest' organo è profondamente alterato e aderente per una discreta estensione col grand'omento, e che esistono, tanto nell'epiploon gastrosplenico

([1]) Tizzoni, *Nuove ricerche sulla riproduzione sperimentale della milza.* — Comunicazione preventiva. — Rendiconto dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna — Sessione 26 nov. 1882.

([2]) Brown-Séquard, Académie des Sciences. 1882.

quanto nel grand' omento, grosse e numerose milze neoprodotte, le quali si fanno tanto più piccole e tanto più rade quanto più ci si allontana dagli attacchi normali e anormali della milza primaria. Si esamina allora con molta attenzione il grand'omento e l'epiploon gastro-splenico, per calcolare così approssimativamente, e direi quasi all'ingrosso, il numero e il volume delle milze che contengono, e si tien conto dell'impressione ricevuta nel protocollo di quest'osservazione, non potendo disporre di una macchina fotografica che ci riproduca istantaneamente l'immagine di quelle parti, da confrontarsi con quella che avessero offerto quando fossero passati vari mesi dalla praticata operazione, nè volendo troppo a lungo tenerle esposte all'aria e al raffreddamento per farne un disegno molto esatto. Risulta da queste ricerche, che i noduli più grossi e più numerosi sono quelli dell' epiploon gastro-splenico e del grande omento che furono poi asportati insieme alla milza primaria, i quali noduli, fatta eccezione dei cordoni scuri che rappresentano una continuazione della polpa di questo viscere e che sono riprodotti nella fig. 3 della mia precedente Memoria, raggiungono appena un diametro massimo poco superiore a un millimetro; nel rimanente delle duplicature del peritoneo sopra citate, queste nuove produzioni di perenchima splenico sono assai piccole (come un capo di spillo all'incirca) e molte rade.

Fatte le solite legature in massa e a laccio perduto sui vasi splenici (due sole legature), si asporta la milza insieme ad una buona porzione dell' epiploon gastro-splenico e del grand'omento (4 dita trasverse all'incirca) che erasi fatto aderente a quell' organo, e con queste sierose si porta via un certo numero di milze neoprodotte, per aver modo di stabilire successivamente un confronto con quelle lasciate in posto.

Si fa in ultimo la sutura delle pareti addominali e la medicatura della ferita. Tanto nell'operazione quanto nelle medicature successive di quest'animale si seguono, per quanto c'è possibile, i precetti del metodo asettico del Lister.

La milza portata via ha una lunghezza di 8 centimetri, una larghezza massima di 4 e una larghezza minima di 1 centimetro: presenta verso il suo terzo superiore un profondo solco, della lunghezza di 2 cent. e $\frac{1}{2}$, il quale, rispetto all'asse longitudinale dell'organo, ha una direzione obliqua: questo solco divide la milza in due parti ineguali congiunte da un cordone piuttosto sottile di paranchima splenico, il quale si è prodotto in seguito alla distruzione parziale di questo organo (vedi tav. I, fig. 3 della mia precedente Memoria). Per tutta la lunghezza di questo solco aderisce il grand' omento, sul quale, come ho già accennato, si prolunga per piccolo tratto la polpa della milza primitiva sotto forma di cordoni rosso-bruni che seguono l' andamento dei vasi sanguigni, e al di là dei quali si trova la solita neoformazione circoscritta, a forma di piccoli noduli, che vanno rendendosi sempre più piccoli e più radi a misura che ci si allontana dalla milza primitiva (vedi la figura citata poco sopra); di questi i più grossi hanno un diametro massimo di millimetri $1\,^1/_2$, gli altri arrivano solo alle dimensioni del capo di uno spillo od a quelle di piccoli punti scuri appena percettibili ad occhio nudo. La porzione inferiore della milza primitiva è del tutto normale, salvo un poco d'induramento nelle vicinanze delle notate aderenze coll'omento; la parte superiore di quest'organo è invece discretamente indurata, e alla sezione presenta diminuzione della polpa, scomparsa di molti corpuscoli di Malpighi, inspessimento delle trabecole (splenite indurante).

22 maggio 1882. — L'animale sta discretamente; cammina volentieri, prende del latte e mostrasi assai festoso; ha però un poco di diarrea e nel giorno ha vomitato due volte. Temp. rett. 39, 4.

23 maggio 1882. — È cessato il vomito, continua invece un poco di diarrea; levati i punti di sutura si trova che la ferita è riunita completamente, ad eccezione della pelle. Temp. rett. 39, 2.

24 maggio 1882. — Sono migliorate assai le condizioni locali e generali dell'operato, onde si dichiara la convalescenza e lo si lascia a sè senza nessuna medicatura.

Nel rimanente dell'esperimento e fino a che quest'animale fu tenuto in vita, si mantenne sempre in buona salute e non presentò mai nessuna particolarità che fosse degna di nota.

Il 20 novembre 1882, vale a dire 6 mesi dopo la praticata splenectomia, si sacrifica l'animale. Alla sezione si nota, nel punto nel quale era stata praticata la ferita delle pareti addominali, una spessa cicatrice della pelle e dei muscoli, e molto adipe nel connettivo sottocutaneo di tutto il corpo dell'animale. Aperta la cavità addominale, il peritoneo parietale presentasi lucido, trasparente, levigato come in un animale sano; l'epiploon gastro-splenico, trasformato in un tessuto di cicatrice, forma un grosso tumore sopra la grande curvatura dello stomaco (tav. I, fig. 6, *b*), e contiene nell'interno, natanti in un liquido siero-purulento, i due lacci coi quali era stata fatta la legatura dei vasi splenici; il grand'omento non ricopre più la matassa intestinale come nelle condizioni normali, ma è raccolto, tutto aggrinzito, al disotto dello stomaco, fra questo viscere e il colon trasverso, e fissato in questa sua anormale posizione per aderenze avvenute fra vari punti della detta sierosa che si posson lacerare per leggere trazioni, e per aderenze più valide con la cicatrice della parete addominale, con lo stomaco e col fegato (tav. I, fig. 6, *c*, *d*, *e*). Nel fondo della cavità addominale si trovano solo poche goccie di siero. Fra tutte le aderenze anormali del grand'omento che ho di sopra rammentate, quella col fegato offre certamente maggiore interesse, non tanto per quello che riguarda i fatti della riproduzione della milza che stiamo adesso esaminando, quanto per quello che si riferisce allo studio della rigenerazione e neoformazione del fegato, studio che fu già annunziato nelle sue conclusioni principali in una breve comunicazione preventiva [1], ed esposto più tardi in una estesa Memoria [2]. Per comprender poi le ragioni per le quali era avvenuta quest'aderenza, devo dichiarare, che in quest'esperimento non caddi col taglio della parete addominale proprio al disopra della milza, come avviene d'ordinario quando si mette in pratica il metodo sperimentale che io ho sempre adottato nelle mie splenectomie; che anzi, essendo la milza tirata molto in avanti ed in alto (rispetto alla stazione orizzontale del cane) per retrazioni del legamento freno-splenico, mi riuscì assai difficile di rintracciare questo viscere, e nei molti tentativi che

[1] Tizzoni, *Studio sperimentale sulla rigenerazione parziale e sulla neoformazione del fegato.* Comunicazione preventiva, Gaz. degli Ospedali, 21 gennaio 1883, n. 6.

[2] Tizzoni, *Studio sperimentale sulla rigenerazione parziale e sulla neoformazione del fegato.* Atti della R. Accad. dei Lincei. Ser. 3a, Vol. XIV.

dovei fare per andar a cercarlo, mi accadde una volta di afferrare con due dita il bordo del fegato e di fare in quest'organo una grossa lacerazione, a guisa di una profonda soluzione di continuo, a causa delle trazioni con le quali io cercava di condurlo a livello della ferita addominale, avendolo per errore confuso con la milza. Per questa lesione del fegato, dalla massa principale del grand' omento che si trova, come ho detto, tutto aggrinzito e raccolto fra il colon trasverso e la grande curvatura dello stomaco, una porzione di questa sierosa si è rovesciata in avanti, aderendo alla faccia inferiore dello stomaco (sempre rispetto alla stazione orizzontale del cane) e alla grossa tumefazione emisferica che rappresenta i resti dell'epiploon gastro-splenico (tav. I, fig. 6, *c*), e dopo aver ricoperta una piccola parte triangolare della detta faccia dello stomaco, corrispondente a porzione della grande curvatura e della sua faccia inferiore, termina come sottile bandelletta (tav. I, fig. 6, *d*) nel bordo del fegato (tav. I, fig. 6, *e*), dove accidentalmente era stata praticata la soluzione di continuo, e dove si osservavano poi quei fatti di rigenerazione e di neoformazione di parenchima epatico che furono esposti nell'accennata Memoria.

Esaminato attentamente il grand'omento, ajutandosi ancora con una lente semplice, si trova che i noduli di milza neoformati sono più grossi ed in maggior numero in quella sua porzione triangolare che passa sopra ed ha contratto aderenze piuttosto solide con la faccia inferiore dello stomaco, e che è stata esattamente riprodotta nella fig. 6 della tav. I, che nelle rimanenti parti di questa sierosa, la quale del resto, all'infuori delle piccole milze neoprodotte, non presenta altra cosa degna di nota che una discreta iniezione vascolare, in forma di una fitta rete sanguigna, della quale i rami più grossi, anzi che essere circondati da grasso, come avviene nel grand' omento di animali sani che non presentano neoformazione di milza, sono fiancheggiati da una specie d' intorbidamento del tessuto della sierosa il quale sembra prodotto da infiltrazione di globuli bianchi. Calcolato il numero e considerato il volume delle milze neoprodotte del grand'omento così ad occhio e croce, come suol dirsi, e come era stato fatto quando la milza fu portata via, si trova che le milze neoprodotte non sono aumentate di quantità e di grossezza in quella parte dell'omento che è raccolta al disotto dello stomaco, mentre quelle poche che stanno nella porzione triangolare di omento che va ad attaccarsi alla lesione del fegato, sembrano un poco più grosse di quelle che questa sierosa presentava prima della praticata operazione; onde se ne deduce, che se dopo la splenectomia vi è stato ingrossamento delle milze preesistenti o formazione di nuove milze, per il lato del grand'omento ciò non ha avuto luogo che in una parte molto limitata, vale a dire in quella porzione triangolare di questa sierosa che passando sopra allo stomaco va a raggiungere il fegato (tav. I, fig. 6). Infatti, all' infuori di questa piccola porzione, la più grossa milza trovata nel grand'epiploon non arriva nemmeno ad avere un diametro massimo di 2 mill. In generale poi le neoproduzioni del grand' omento hanno un contorno molto netto e non presentano nelle loro vicinanze nè infiltramento di globuli bianchi nè infiltramento di sangue; hanno una forma sferica o leggermente allungata, una superficie liscia, non bernoccoluta; non presentano insomma nessuno di quei caratteri che, per lo studio fatto in molti altri casi, si possono oramai considerare con certezza come segni di un accrescimento di queste neoproduzioni, sia sotto

forma di nuovi nodettini che vanno ad apporsi alla superficie dei più vecchi, sia sotto forma d'infiltramento di sangue e di successiva neoformazione di polpa, come nel caso di riproduzione per malattia della milza primaria. Nel grand' omento che si trova fra i noduli di milza neoformati, mentre si osservano grand' infiltrazioni di globuli bianchi al dintorno dei vasi, non si vede poi nessuno di quei tubercoletti migliari che stanno a rappresentare corpuscoli di Malpighi in via di formazione, che sono appunto le prime fasi di sviluppo delle piccole milze.

Nei resti dell'epiploon gastro-splenico non si trova nessuna milza neoformata, e non si vede più che un fitto tessuto connettivo che circoscrive una cavità ripiena di un liquido siero-purulento nel quale nuotano gli avanzi dei due lacci, tutti erosi e già per buona parte distrutti.

Perciò dal lato del grand'omento e dell'epiploon gastro-splenico, che furono le due sole duplicature del peritoneo che esaminammo durante l'atto operatorio, la neoformazione della milza non era per niente progredita in seguito alla praticata splenectomia, anzi sembrava essersi arrestata nel grand'omento, regredita nello epiploon gastro-splenico.

Oltre quello che abbiamo notato nel grand'omento e nell'epiploon gastro-splenico, si trova in quest' animale una grossa milza nella faccia inferiore dello stomaco (tav. I, fig. 6, *g*), in vicinanza della sua grande curvatura, e poco distante dal lembo triangolare del grand'omento che passa sopra a questo viscere per andare a raggiungere il fegato, e dai resti dell'epiploon gastro-splenico. Questa milza, che ha una lunghezza massima di 1 centimetro e $^1/_2$ e una forma allungata che all'incirca richiama alla mente la forma della milza primaria, è rilevata sulla superficie del peritoneo di rivestimento dello stomaco dal quale ha avuto origine, e col quale si può facilmente spostare sugli strati sottostanti di questo viscere; ha il colore della milza normale del cane, ed ha un contorno assai irregolare per sporgenze arrotondate che rappresentano probabilmente la zona di accrescimento di questo piccolo organo, o la formazione e l' apposizione di altrettanti piccoli nodettini più giovani alla periferia della massa principale più vecchia. Dall' estremo più grosso di questa milza neoprodotta, che starebbe a rappresentare la testa della milza primaria, parte una seconda neoproduzione più piccola, che ha i caratteri di quella poco sopra descritta, a lato della quale decorre presso che parallelamente; sembra quasi che la neoformazione di questa milza dello stomaco abbia avuto luogo sopra la diramazione di un vaso sanguigno, e che la parte più grossa della neoproduzione ne segua il tronco principale, mentre la parte più piccola cammini sopra una diramazione collaterale che da quello si distacca ad angolo assai acuto. Poco distante dalla grossa milza della faccia inferiore dello stomaco che abbiamo adesso descritta, si trova un' altra piccola neoproduzione, avente tutti i caratteri della prima, e del diametro massimo di mill. 2 $^1/_2$.

Asportato lo stomaco insieme al grande omento e ai resti di epiploon gastro-splenico, tolto via il fegato e spostata in basso la matassa intestinale, si trova nella faccia addominale del centro frenico una grossa milza (tav. I, fig. 1, *d*). Essa è situata in prossimità dell' unione del bordo destro del centro frenico con le fibre muscolari del diaframma, circa un centimetro al disotto (sempre rispetto alla stazione orizzontale

del cane) dal passaggio della vena cava e della vena epatica; ha una lunghezza massima di 8 millimetri a un dipresso, una figura triangolare con angoli arrotondati, un colore rosso bruno eguale a quello della milza normale del cane, ed è assai rilevata sulla superficie del diaframma. Nel contorno di questa grossa milza si vedono dei piccoli bitorzoletti o delle piccole appendici arrotondate, che rappresentano con probabilità la zona di accrescimento di questo nodulo, e che si perdono all' esterno in un anello rosso più chiaro, formato da una fitta e sottile iniezione sanguigna la quale circoscrive tutt' all' intorno il piccolo organo descritto. Il resto del diaframma non presenta di rilevante che una discreta iniezione venosa e capillare (tav. I, fig. 1 *c*).

Tutte le particolarità che ho descritte nel diaframma di quest'animale vennero esattamente riprodotte nella fig. 1, tav. I disegnata dal pezzo fresco a grandezza naturale, per mezzo del prisma, dal carissimo amico e collega prof. C. Emery.

Nel legamento gastro-epatico si trovano 12 a 14 piccole milze, delle quali una diecina delle dimensioni del capo di un grosso spillo all'incirca, e una, a superficie bernoccoluta, quasi moriforme, della grossezza di una veccia; tutti questi noduli dell'epiploon gastro-epatico hanno i caratteri delle milze neoformate in via di accrescimento. Fra questi noduli si vedono inoltre delle piccole milze nelle prime fasi del loro sviluppo, vale a dire dei piccoli nodulini bianco-grigiastri, simili a tubercoli migliari, che stanno a rappresentare corpuscoli di Malpighi in via di formazione, talora isolati, talora circondati già da una sottile zona di polpa.

Piccoli e numerosi nodettini di milza, aventi tutti i caratteri di quelli sopra descritti, si trovano nei ligamenti laterali della vescica orinaria (designati nell'uomo sotto il nome di ligamenti della vescica), nel peritoneo che cuopre il dutto deferente, e nel peritoneo dei cul di sacchi pubico-vescicale e vescico-rettale. Inoltre tre grosse milze, del volume di una veccia all'incirca, si rinvengono al disotto della sierosa peritoneale che si ripiega sui lati della vescica; questi tre noduli, mentre si vedono assai facilmente dalla cavità peritoneale, non vi fanno poi nessuna sporgenza, ma s'affondano nel tessuto adiposo del bacino dal quale sembra abbiano avuto origine.

Nessuna milza si trova nel peritoneo parietale, nel mesenterio, e in tutte quelle parti del peritoneo che non sono state rammentate nel reperto di questa autopsia. Le glandule linfatiche addominali, cervicali, inguinali, poplitee sono normali; solo le glandule toraciche che stanno in vicinanza dello sbocco del dutto toracico sono un poco ingrossate ed arrossate, come è già stato da me osservato in altre splenectomie.

Nelle sezioni che ho praticate sopra a molte di queste milze neoprodotte ancora fresche, ho trovato sempre corpuscoli di Malpighi, polpa e capsula come nella milza normale del cane.

Esaminate a fresco diverse di queste piccole milze col mezzo di semplici dilacerazioni, esse presentano, oltre dei soliti elementi della milza normale di un animale adulto, dei globuli rossi nucleati.

Per lo studio istologico del grand'omento e delle altre duplicature del peritoneo, si trattano queste sierose, appena tolte dall'animale, con liquido di Müller nel quale si lasciano per 48-60 ore circa, quindi si lavano in acqua distillata, e distesele, col mezzo della semi-disseccazione dei bordi, sul vetrino portaoggetti, si colorano prima con ematossilina quindi con eosina, estraendo infine l'eccesso di quest'ultima sostanza

colorante per mezzo dell'alcool, e chiudendo la preparazione in balsamo del Canadà. In questa maniera si ottengono bellissime e larghe preparazioni dei pezzi di sierosa peritoneale compresi fra le milze neoformate. Al fine però di studiare con maggior esattezza tutte le particolarità istologiche che presenta il grand'omento e le altre duplicature del peritoneo, specialmente al dintorno dei vasi sanguigni, dove la quantità delle cellule non permette di distinguere i caratteri dei singoli elementi nei preparati ottenuti con la semplice distensione, si fanno inoltre sopra di queste sierose delle sottilissime sezioni microscopiche; e a tal uopo s'indurano in alcool, a concentrazione gradatamente crescente, dei pezzettini di omento stati prima per 24-48 ore in liquido di Müller, quindi, dopo averli colorati con carminio borico di Grenacher e chiusi in paraffina, se ne fanno sezioni microscopiche a mill. 0,01 per mezzo del microtomo a slitta di Thoma, e s'incollano queste sezioni in serie continua sul vetrino portaoggetti; oppure si praticano delle sezioni sopra a pezzettini incolori di sierosa già indurati nell'alcool e chiusi in paraffina, e si tingono i tagli microscopici così ottenuti, dopo averli liberati dalla paraffina per mezzo del cloroformio, con una soluzione acquosa ordinaria di ematossilina. Sulle piccole milze neoformate, e tanto su quelle asportate con la milza primaria quanto su quelle rimaste in posto, si fanno delle serie complete di sezioni microscopiche, sia colorando il pezzo intiero con carminio borico di Grenacher, sia tingendo secondariamente le sezioni ottenute dai noduli incolori con la solita soluzione d'ematossilina.

Esaminata al microscopio la milza primaria, si trova in questa la solita splenite indurante da me descritta in altro lavoro. Studiate, sopra a serie complete di sezioni istologiche, alcune delle piccole milze neoformate asportate nella praticata splenectomia insieme alla milza primaria, si trova che queste sono sprovviste di corpuscoli di Malpighi, e che sono costituite quasi esclusivamente da una trama connettiva e da sangue. La trama connettiva forma delle rozze trabecole che non hanno nessuna regolarità; queste in alcuni noduli sono assai spesse, ricchissime di nuclei, e comprendenti fra di loro delle maglie molto piccole, per la massima parte sprovviste di parete propria e intieramente ripiene di sangue; in altri noduli invece formano una trama sottilissima, molto delicata, e che divide delle lacune sanguigne molto larghe. Nella maggior parte di queste piccole milze manca una vera capsula nettamente limitata e distinta dalle parti vicine; ordinariamente la polpa presenta delle trabecole più fitte, più regolari, in fasi più avanzate di sviluppo nelle parti centrali del piccolo nodulo, mentre alla periferia di questo si hanno stadî più giovani di sviluppo, e l'infiltrato sanguigno passa senza nessun confine nel connettivo che circoscrive la polpa e divarica i fasci più interni delle fibre di esso. Alcuni noduli sono del tutto sprovvisti di questa specie di capsula, e la polpa che contengono passa quasi per gradazioni insensibili nel connettivo dell'epiploon che la circoscrive, e che al dintorno del nodulo si mostra solo un poco più ricco di nuclei. In queste milze neoformate asportate insieme alla milza primaria non si osservano globuli rossi nucleati; solo qualche elemento simile del tutto, per i caratteri istologici, a quelli che descriveremo nel grande omento restato in posto e che crediamo dovere interpretare per globuli rossi nucleati, si vede nel connettivo dell'epiploon che sta al dintorno di questi noduli, o in quei punti di questa sierosa dai quali si va

sviluppando qualche nuova milza. Al contrario queste milze neoformate mostrano un discreto numero di cellule con nucleo in gemmazione; qualcuna di queste cellule, benchè ciò accada assai di rado, si trova anche nel connettivo che sta al dintorno dei piccoli noduli, dove, in generale, si ha una certa quantità di globuli rossi che infiltrano le maglie di questo tessuto. Non posso escludere in modo assoluto, tanto in questa quanto nella successiva osservazione, che la forte dilatazione delle lacune vascolari di queste piccole milze e l'infiltrato sanguigno che si osserva nei loro dintorni, non siano l'effetto di alterazioni di circolo occasionate da stiramenti avvenuti nell'estrarre queste parti dalla cavità addominale, o dall'azione della legatura praticata sui vasi splenici.

All'infuori delle piccole milze descritte, si osserva nelle sezioni di epiploon asportato un forte accumulo di globuli bianchi al dintorno dei vasi, i quali si presentano assai dilatati e per la massima parte con il carattere dei vasi cavernosi; quest'accumulo di globuli bianchi, ora è circoscritto e in forma di piccoli tubercoletti simili a follicoli linfatici, ora è più esteso e segue l'andamento dei vasi stessi in forma di grossi cordoni ramosi; solo due volte nell'epiploon asportato mi fu dato di vedere, nelle vicinanze di queste infiltrazioni perivascolari di globuli bianchi, un corpuscolo di Malpighi non ancora circondato di polpa, costituito da un piccolo nodettino sferico, che si ritrovava appena in 8-10 sezioni microscopiche dello spessore di mill. 0,015, e che era formato da piccole cellule linfatiche raccolte al dintorno di un sottile ramo vascolare; di queste cellule con difficoltà si potevano precisare i contorni per esser molto stipate e fortemente compresse le une contro le altre. Questi corpuscoli di Malpighi si distinguevano facilmente dagli accumuli circoscritti di globuli bianchi al dintorno dei vasi, sia per la maggior vascolarizzazione di quest'ultimi, sia perchè nei primi mancavano i globuli rossi nucleati che nei secondi si trovavano disseminati in discreta quantità in mezzo alle cellule linfatiche.

Perciò, per dirla in modo generale, le piccole milze delle porzioni di epiploon gastro-splenico e del grand'omento asportate nella splenectomia erano costituite da un infiltramento di sangue in una trama connettiva; erano perfettamente eguali cioè, tanto per la loro struttura quanto per il modo del loro sviluppo ed accrescimento, a quelle che si producono per alterazione della milza primaria, e che furono da me descritte e figurate in apposito lavoro; rappresentavano quindi degli organi imperfetti che coadiuvavano la funzione della milza primaria, qualunque essa si sia, parzialmente alterata, e che formavano uno stadio di passaggio, quasi un anello di congiunzione, fra il semplice tessuto congiuntivo e la struttura complessa della milza normale di un animale adulto.

All'esame a piccolo ingrandimento di larghe porzioni di omento rimasto in posto e fissato sul portaoggetti col metodo della semidisseccazione dei bordi, i due fatti che maggiormente colpiscono l'osservatore sono, la ricchezza e la dilatazione dei vasi sanguigni di questa sierosa, la scomparsa del grasso al dintorno di questi vasi e la sostituzione di quest'adipe con un infiltrato cellulare.

A più forte ingrandimento, oltre a confermare le cose di sopra accennate, si rilevano ancora alcuni altri fatti molto interessanti. L'endotelio di rivestimento delle grandi duplicature del peritoneo, ed in modo particolare quello del grand'omento,

presenta anzitutto segni evidentissimi di proliferazione, onde sulle trabecole di queste sierose si raccolgono dei veri accumuli di cellule endoteliali simili a quelli che si osservano nelle peritoniti adesive. I vasi sanguigni, che sono molto dilatati e ricchissimi di nuclei nelle loro pareti, formano una fitta rete vascolare a maglie piuttosto strette, rete vascolare che nelle grosse trabecole è costituita specialmente da vene enormemente dilatate, mentre nelle trabecole più piccole è costituita per la massima parte da vasi capillari; al dintorno delle predette vene, allato delle quali scorrono delle arterie di un calibro molto minore, si trova un grandissimo accumulo di elementi, dei quali, a causa appunto della loro abbondanza e del loro stipamento, spicca solo il nucleo ovale o rotondo, mentre si perdono quasi intieramente i contorni cellulari. Con tali preparazioni perciò rimane difficile di pronunziarsi sulla natura di questi elementi, come pure rimane impossibile di decidere se tutti o solo una parte appartengano alla stessa specie. Queste infiltrazioni cellulari del grand'omento non sono limitate e a forma di piccoli noduli, come avviene nella neoproduzione di corpuscoli di Malpighi, ma seguono per lungo tratto il corso dei vasi sanguigni, e danno luogo così a dei grossi cordoni ramosi, i quali, per le ragioni dette, dovranno essere studiati in tutte le loro particolarità per mezzo delle sezioni trasverse. Alla periferia di questi cordoni, dove le cellule sono un poco più rade, come nel tessuto connettivo che rimane fra le maglie dei vasi di discreto calibro, o lungo il corso dei vasi capillari delle trabecole più sottili dell'omento, si vedono i fatti più interessanti; le cellule fisse del connettivo sono più grosse, più evidenti che nelle condizioni normali (sembrano quasi tumefatte), conservano però la loro forma stellata, fusata, irregolare, ed in alcuni punti lasciano vedere molto chiaramente un reticolo cellulare, formato per le anastomosi dei loro prolungamenti, reticolo che si mette in rapporto con le pareti dei capillari sanguigni (tav. I, fig. 5, *b*). Queste cellule hanno di solito un solo nucleo ovale o rotondo, raramente ne posseggono due, dei quali uno ordinariamente assai allungato; hanno un protoplasma a grossi granuli albuminosi il quale si colora solo in violetto pallido con la doppia colorazione ad ematossilina ed eosina, non fissando nemmeno traccia di quest'ultima sostanza colorante. Molto rimarcabile poi è il modo di comportarsi di alcuni prolungamenti di queste cellule fisse del connettivo, i quali terminano liberi in mezzo alle fibre e finiscono con un piccolo rigonfiamento a forma di bottoncino o di gemma, che differisce del resto dal protoplasma di queste cellule per il suo aspetto del tutto liscio e perchè, con la colorazione doppia sopra citata, acquista una debole tinta rosso dorata (tav. I, fig. 5 *e*). Alcune volte, oltre il bottoncino terminale, si vede ancora un altro piccolo rigonfiamento sul corso dello stesso prolungamento cellulare. Libere in mezzo al connettivo fra le maglie della rete cellulare descritta, o raccolte al dintorno dei vasi sanguigni, si trovano delle piccole cellule, delle quali alcune hanno tutti i caratteri dei globuli bianchi, quali ad esempio le dimensioni, la scarsezza e l'aspetto granuloso del protoplasma, nonchè la colorazione violetto-pallida di questo per l'ematossilina (tav. I, fig. 5 *e*), mentre altre presentano alcune particolarità per le quali si distinguono facilmente dalle prime (tav. I, fig. 5 *d*). Queste ultime, alcune volte sono raccolte in gruppetti di 3 o 4 elementi, altre volte sono disposte in serie longitudinali o isolate in mezzo ai fasci del tessuto connettivo; ora hanno una forma

rotonda, ora sono allungate in un senso, e di solito seguono con il loro diametro massimo la direzione dei fasci connettivi; hanno delle dimensioni che oscillano entro certi limiti, ma che in generale sono di poco inferiori a quelle dei globuli bianchi vicini e di poco superiori a quelle dei globuli rossi che si trovano entro i vasi sanguigni. Le maggiori particolarità le troviamo nel nucleo e nel protoplasma di questi elementi. Il nucleo presenta nelle varie cellule di questa specie (tav. I, fig. 5 *d*) delle notevoli differenze nella intensità della sua colorazione violetta e nella sua forma; in alcune il nucleo è diviso in due fino a sei globettini, disposti ora alla rinfusa ora situati in corona nel mezzo o da un lato della cellula; in altre presentasi foggiato a biscotto, a rene, o ad altre forme anche più irregolari; in altre finalmente è colorato molto pallidamente dall'ematossilina e ciascuna delle parti nelle quali è stato primitivamente diviso è disfatta in grossi granuli, granuli che per la diminuzione della loro grossezza e per l'impallidimento della loro colorazione finiscono per sparire poco a poco alla osservazione, per cui in ultimo molte di queste cellule compariscono intieramente sprovviste di nucleo o di traccia di nucleo. Una sola volta mi occorse di osservare uno di questi nuclei spinto tutto da un lato della cellula tanto da fare sporgenza alla sua superficie, e da lasciar supporre che in ultimo finisse per abbandonare l'elemento che dapprima lo conteneva; però, per quanta attenzione vi ponessi, non mi occorse mai di osservare di questi nuclei liberi nel tessuto connettivo, come sarebbe dovuto accadere se in tal modo le cellule in discorso avessero perduto il loro nucleo. Il protoplasma di queste cellule presentasi del tutto liscio e colorato in rosso dorato dall' eosina (tav. I, fig. 5 *d*), colorazione che in alcuni elementi è abbastanza accentuata, mentre in altri è così pallida che appena si può apprezzare, specie se si adoprano ingrandimenti piuttosto forti; in generale questi elementi sono tanto più intensamente colorati dall'eosina quanto più avanzate sono le fasi distruttive del nucleo, onde in un periodo ultimo della evoluzione di queste cellule, quando hanno completamente perduto il loro nucleo, se ne trovano molte che in niente si possono distinguere dai globuli rossi dell'interno dei vasi sanguigni vicini e per l'aspetto e per l'intensità della colorazione rosso-dorata. Al dintorno dei vasi sanguigni, e specialmente nelle parti nelle quali è stato riassorbito il tessuto adiposo, si trovano molte delle cellule descritte, le quali però, a causa del grandissimo numero degli elementi ivi raccolti e della pallidezza del loro protoplasma, non si lasciano distinguere in tutte le loro particolarità, benchè si possa facilmente arguire la loro esistenza e dalla colorazione rosso-dorata che prende l'insieme di questi infiltrati perivascolari quando vengono osservati a piccolo ingrandimento, e dal grandissimo numero di queste cellule col nucleo in via di scomparsa e col protoplasma liscio e colorato in rosso-dorato dalla eosina nel confine dei predetti infiltramenti, dove gli elementi sono più radi, e dove si possono adoprare perciò ingrandimenti più forti e distinguere bene i contorni e i caratteri di ciascuna cellula.

Riguardo al rapporto delle cellule descritte con quelle fisse del tessuto connettivo, dirò, come mi occorse molto raramente di vedere qualcuna delle prime cellule, specialmente di quelle nelle quali il protoplasma non era ancora divenuto intieramente liscio, unita ad uno dei prolungamenti delle seconde. Può darsi però che questo fatto sia molto più frequente di quanto io abbia affermato, giacchè in molti casi non

ho osato pronunziare un giudizio assoluto, per la difficoltà di stabilire se uno di questi elementi con protoplasma rosso e con nucleo in via di scomparsa sia veramente attaccato al corpo o ai prolungamenti di una cellula stellata del connettivo, o vi sia semplicemente sovrapposto. Nello stesso modo, solo molto di rado mi sono potuto accertare che alcune di queste cellule più sopra descritte si trovano proprio nell'interno di qualche cellula fissa del connettivo che non si vede direttamente in rapporto con la parete di qualche vaso sanguigno, ed ho trovato in questi casi, che le cellule incluse non presentavano già più traccia di nucleo e in niente si potevano più distinguere dai globuli rossi del sangue.

Per quello che concerne la significazione delle cellule fino ad ora descritte, io sono inclinato a ritenerle per globuli rossi in via di formazione; questo lo comprova il colore giallognolo del loro protoplasma e la colorazione rosso dorata che questo assume per l'eosina, in seguito alla nota benchè non esclusiva proprietà dell'emoglobina di fissare questa sostanza colorante, nonchè la presenza delle varie fasi di distruzione del nucleo. Non accettando queste conclusioni saremmo molto imbrogliati per trovare una ragione che ci spiegasse l'aspetto e le proprietà del protoplasma di questi elementi, e che c'indicasse perchè presentano un nucleo in via di scomparsa; a meno di non volere ammettere una differenza nell'aspetto e nelle proprietà delle cellule semoventi del tessuto connettivo, ciò che fino ad oggi non è stato fatto.

Studiato il grand'omento e le altre duplicature del peritoneo per mezzo di sezioni fatte col microtomo a slitta e colorate con carminio borico di Grenacher o con ematossilina, si ottengono delle bellissime preparazioni, nelle quali si vedono i vasi sanguigni, le cellule e le fibre connettive di queste sierose, e in alcuni punti, in mezzo agli spazi irregolari che rimangono fra le fibre, si osservano dei globuli rossi senza nucleo e dei globuli rossi nucleati, con le varietà nella forma dei nuclei e nella intensità della loro colorazione già accennata nel descrivere questi elementi studiati su preparati fatti per semplice distensione della sierosa. Il sangue che si trova libero nelle maglie di questo connettivo non è in tutti i punti nella stessa quantità; così in alcune parti si vedono appena pochi globuli con nucleo o senza nucleo, come ad esempio nel connettivo che è interposto o che sta al dintorno dei vasi, in altre parti invece, come ad esempio in vicinanza delle milze neoformate e al dintorno delle grosse vene, questi globuli sono molto abbondanti, e tanto da formare emorragie di un certo rilievo; come piccole emorragie si vedono molto spesso fra le cellule adipose che circondano i grossi tronchi vascolari. In quei punti che rimangono al dintorno dei vasi nei quali si ha dell'adipe in via di riassorbimento, si osservano spessissimo delle figure analoghe a quelle che si hanno nel midollo giallo delle ossa lunghe in seguito a splenectomia o a salassi ripetuti, e che rappresentano le prime fasi di trasformazione di questo midollo adiposo in midollo ematopoetico; si trova cioè una forte dilatazione vascolare e un buon numero di globuli bianchi e di globuli rossi fra le cellule adipose dalle quali viene riassorbito il grasso.

Nelle sezioni longitudinali e trasversali degl'infiltramenti perivascolari, si vedono fra i rami di grossi vasi, rappresentati per massima parte da vene dall'aspetto delle vene cavernose, dei grossi nuclei rotondi o allungati, gli uni quasi accosti agli altri, tanta è l'abbondanza delle cellule che sono provviste di questi nuclei, e fra le

dette cellule dei gruppi di cellule o delle cellule separate, che spiccano sulle prime per l'aspetto giallognolo del loro protoplasma, e per lo spezzettamento o la divisione in granuli dei loro nuclei (tav. I, fig. 3). Questi elementi, che sono eguali a quelli più sopra descritti e interpretati come globuli rossi in via di formazione, non sembrano contenuti entro i vasi o entro canali limitati da parete propria, ma si presentano come infiltrati fra le cellule connettive che costituiscono il nodo o il cordone perivascolare.

Non è a credersi poi che queste modificazioni avvenute al dintorno dei vasi dopo il riassorbimento del grasso, siano le prime fasi di formazione delle piccole milze, giacchè queste, come io ho già descritto per altre splenectomie, hanno sempre principio con la formazione dei corpuscoli di Malpighi, dei quali talune volte alcuni molto caratteristici si trovano completamente isolati (tav. II, fig. 8 *a*) ovvero si trovano allato di queste infiltrazioni perivascolari (tav. II, fig. 9 *a*, *b*). Queste prime fasi di sviluppo delle milze si osservano specialmente nella neoproduzione che avviene fuori del grande omento, nel quale, a causa del processo infiammatorio pregresso, questa neoproduzione è molto meno attiva.

Le piccole milze trovate alla sezione di quest'animale 6 mesi dopo praticata la splenectomia, presentano tutte la stessa struttura; offrono solo alcune piccole differenze riguardo al grado del loro sviluppo e al rapporto fra lo spessore della trama connettiva e la quantità di sangue contenuta nelle sue maglie, come vedremo più in basso. Ciascuno dei noduli da me esaminato in serie complete di sezioni microscopiche, contiene uno o più corpuscoli di Malpighi; nelle milze di un discreto volume si arriva a contarne fino a 5. Questi corpuscoli, ora si trovano nell' interno del nodulo e in mezzo alla polpa, ora risiedono invece alla superficie di quello; nel primo caso ordinariamente sono situati nella parte periferica del piccolo organo, e sono circondati da polpa in fasi meno avanzate di sviluppo; nel secondo caso i corpuscoli della superficie del nodulo con la poca polpa che li circonda smagliano, infiltrano poco a poco la capsula che li divide dalla vecchia polpa, e in ultimo finiscono per fondersi con questa; e ciò avviene in modo identico a quanto fu descritto da me nel processo di accrescimento delle milze sviluppatesi in seguito alla splenectomia. La polpa di questi noduli è costituita da un reticolo regolare, molto serrato, che per struttura è perfettamente identico a quello della milza di un animale adulto; contiene molte vene cavernose, le quali hanno la nota costituzione di questi vasi e si presentano assai dilatate, turgide di sangue; solo alla periferia del nodulo e al dintorno dei corpuscoli di Malpighi che risiedono nelle parti molto superficiali delle piccole milze, si trova la polpa splenica in fasi meno avanzate di sviluppo, e con una struttura meno perfetta di quella delle parti centrali del nodulo stesso. La capsula, nella maggior parte delle milze neoformate, è molto ben distinta e di una discreta spessezza: in alcune invece è fortemente infiltrata di sangue, a causa o del rapido accrescimento della polpa, o della fusione di nuovo parenchima splenico, formatosi al difuori di un nodulo, con quello del nodulo stesso.

Nella polpa di queste piccole milze neoformate si hanno molte cellule con nucleo in gemmazione e un discreto numero di globuli rossi nucleati; questi ultimi si trovano tanto nelle maglie della polpa quanto nell'interno delle vene cavernose, e come

quelli osservati nel connettivo dell'omento e precedentemente descritti, hanno ora un nucleo unico, ora un nucleo diviso in tre o quattro piccole masse e in fasi distruttive più o meno avanzate. Nel connettivo dell' epiploon che sta al dintorno di questi nodi, si nota un discreto numero di globuli bianchi e di globuli rossi nucleati, i quali sono liberi nelle maglie di questo tessuto, ed eguali per apparenze istologiche a quelli più volte rammentati nel corso di questo lavoro; alcune volte si hanno dei veri accumuli di globuli bianchi o dei veri cordoni cellulari sul corso dei vasi sanguigni che si trovano in vicinanza di queste piccole milze; non mi accadde mai di osservare dei globuli rossi nucleati nell'interno dei vasi sanguigni dell'epiploon, nemmeno in vicinanza delle piccole milze, come ebbi ad osservare in altre splenectomie, e come già fu descritto in uno dei miei precedenti lavori.

Le milze neoformate fino ad ora descritte presentano, in rapporto alla loro sede, delle differenze nel grado di sviluppo, nella dilatazione delle maglie e nella ricchezza del sangue della polpa, nonchè una differenza nella quantità dei globuli rossi nucleati. In generale, le milze rinvenute nei dintorni della vescica e nel tessuto adiposo del bacino sono più grosse e più molli di quelle delle altre parti della cavità peritoneale, fatta eccezione dai noduli della superficie dello stomaco e del diaframma; hanno una polpa in fasi meno avanzate di sviluppo, con maglie maggiormente dilatate e ricchissime di sangue. In rapporto al numero dei globuli rossi nucleati contenuti nelle piccole milze, non si possono fare delle differenze per regioni, perchè in una stessa parte si trova che la quantità di questi elementi varia moltissimo nei singoli noduli; mentre in qualcuno sono abbondantissimi, in altri se ne osservano pochissimi nell'interno delle vene cavernose, in altri finalmente mancano del tutto. In tesi generale posso dire solamente, che la quantità dei globuli rossi nucleati delle piccole milze neoformate è tanto maggiore quanto meno avanzato è il loro sviluppo.

Confrontando adesso quello che è stato trovato nelle milze neoformate dell'epiploon asportato insieme alla milza primaria, con quello che presentavano i noduli lasciati in posto ed esaminati 6 mesi dopo praticata la splenectomia, abbiamo che questi sono maggiormente sviluppati ed hanno una struttura più perfetta di quelle, e che contengono un numero maggiore di globuli rossi nucleati; le milze lasciate in posto, a differenza dei noduli asportati, sono provvedute costantemente di corpuscoli di Malpighi, hanno una polpa più perfetta, più regolare e a fasi più avanzate di sviluppo, sono fornite per la massima parte di una capsula piuttosto spessa assai ben distinta, e presentano segni evidenti di accrescimento. Perciò l'asportazione della milza primaria in questo caso avrebbe avuto per resultato il perfezionamento delle piccole milze preesistenti e la formazione di nuovi noduli, i quali nel loro sviluppo e nel loro accrescimento avrebbero seguito le varie fasi di sviluppo e di accrescimento della milza embrionale.

Oss. 2ª. 1 maggio 1882. — Cloroformizzato un cane bracco bastardo, giovane, di media taglia e di mantello nero macchiato di bianco, apro la cavità addominale con il solito processo e tiro fuori la milza, non senza incontrare una certa difficoltà in questa parte dell'operazione, per le aderenze piuttosto valide che quest'organo aveva contratte col fondo dell'ipocondrio sinistro. Allargo allora la praticata incisione, al fine di esaminare la milza estratta dalla cavità addominale e ancora attaccata ai suoi

vasi, senza che questi avessero a subire stiramenti o compressioni di sorta, e mi accorgo subito che quest'organo è profondamente alterato; infatti non si lascia distendere in modo uniforme dall'onda sanguigna ed è diviso trasversalmente, verso il suo mezzo, da un profondo solco. Osservo inoltre delle piccole milze neoformate nel ligamento gastro-splenico in prossimità della milza primaria. Fatta la solita legatura in massa e a laccio perduto dei vasi splenici (3 legature), asporto la milza insieme a piccola porzione di epiploon gastro-splenico che contiene diversi noduli neoformati. Divaricata allora la ferita delle pareti addominali, esamino in sito il grand'omento, ciò che mi riesce assai facile per buona estensione della metà sinistra di questa sierosa, nella quale osservo un discreto numero di milze neoformate, non superiori in volume a quelle portate via coll'epiploon gastro-splenico. Faccio in ultimo la sutura delle pareti addominali e la medicatura della ferita, seguendo nella medicatura come nell'operazione, almeno per quanto i mezzi me lo concedono, i precetti del metodo antisettico del Lister.

La milza asportata ha una lunghezza di 12 cent., una larghezza massima di 4 cent. e 7 mill., e una larghezza minima di 1 cent. e 8 mill.; verso il suo mezzo, e precisamente a 5 cent. e $\frac{1}{2}$ dall'estremo superiore, presenta nelle sue due faccie un profondo solco trasversale, esteso a tutta la larghezza della milza, e formato dalla retrazione di un fitto tessuto cicatriziale che in quella parte ha distrutto completamente il tessuto splenico e compressa una delle grosse branche dell'arteria splenica. Alla sezione di quest'organo, trovo che l'anemia e la splenite indurante sono più estese e più intense nella sua metà superiore che nella sua metà inferiore, e specialmente nelle vicinanze della descritta cicatrice, dove i corpuscoli di Malpighi sono del tutto scomparsi e scarsissima è la polpa che si può raccogliere sulla lama del coltello, per mezzo del raschiamento.

I noduli scuri della porzione di epiploon gastro-splenico asportata, che hanno tutti i caratteri delle milze neoformate, sono assai piccoli e poco numerosi; i più grossi arrivano ad avere un diametro di due mill. circa.

Questo cane risentì pochissimo della praticata operazione, come può vedersi dalle osservazioni termometriche e dall'intiero diario che qui sotto trascrivo.

2 maggio 1882. — L'animale è un poco abbattuto; rifiuta il cibo. Temp. rett. 39,3.

3 maggio 1882. — L'animale è assai più vispo del giorno precedente; ha preso del latte. Temp. rett. 39,5.

4 maggio 1882. — Seguita il miglioramento dell'operato, il quale prende il latte con molta avidità; la ferita è già completamente riunita nelle parti profonde, mentre si è distrutto il coalito della pelle, per alcuni movimenti bruschi fatti dall'animale durante la medicatura; si unisce la pelle con nuovi punti di sutura superficiale. Temp. rett. 39,7.

5 maggio 1882. — Si lascia la dieta lattea e si concede una buona razione di pane e di carne di cavallo. Temp. rett. 39,7.

6 maggio 1882. — Si levano tutti i punti di sutura, perchè la ferita si è completamente riunita. Temp. rett. 39,6.

7 maggio 1882. — Si sospende ogni medicatura, poichè l'animale può considerarsi come guarito completamente della subìta operazione.

Il 3 decembre 1882, vale a dire 7 mesi dopo la praticata operazione, si uccide l'animale. Alla sezione si nota una spessa cicatrice cutanea e muscolare nella parte sinistra dell'addome, e una buona quantità di adipe nel connettivo sottocutaneo di tutto il corpo. Aperta la cavità addominale, il peritoneo mostrasi in ogni parte lucido, levigato, trasparente come in un cane sano; pochissime goccie di siero limpido si raccolgono nel fondo della cavità peritoneale; mancano insomma tutti i caratteri di una peritonite pregressa. Il pacchetto adiposo sterno-addominale, che negli animali ben nutriti scende dagli attacchi anteriori del diaframma lungo la linea alba, alla quale aderisce molto lassamente, mostra 8 piccole milze, delle quali una sola fa sporgenza nel cavo peritoneale, mentre le altre giacciono proprio nel mezzo di questo tessuto adiposo, in punti però non molto distanti dalla superficie peritoneale; la più grande di queste milze ha un volume di poco superiore a quello di una veccia; la loro forma, per quanto si può apprezzare attraverso il tessuto adiposo che le circonda da ogni parte, sembra essere la sferica.

Il grande omento è regolarmente disteso sulla matassa intestinale, che ricuopre fin verso la vescica orinaria, e per piccola porzione del suo bordo sinistro aderisce, per aderenze molto lasse e che si possono facilmente lacerare con leggere trazioni, alla cicatrice della ferita addominale. Macroscopicamente non offre modificazioni di sorta, all'infuori di una grandissima dilatazione delle sue vene e di un gran numero di noduli scuri che hanno tutti i caratteri delle milze neoformate (tav. II, fig. 7); queste sono disseminate lungo il corso dei vasi sanguigni e tanto nel foglietto superiore quanto nel foglietto inferiore di questa sierosa. Il numero di questi noduli, fra grossi e piccoli, è tanto grande, che difficilmente si riesce a contarli con esattezza, come può comprendersi facilmente osservando la fig. 7 della tav. II, che correda questo lavoro, e che fu ritratta e disegnata con precisione, per mezzo del prisma, dal mio carissimo amico e collega prof. C. Emery. La distribuzione di queste milze neoformate del grand'omento non tiene nessun ordine determinato; rovesciata questa sierosa sulla faccia inferiore dello stomaco, si osserva solo che le milze più grosse e più numerose si trovano nel lato sinistro dell'omento e lungo il corso dei vasi splenici (tav. II, fig 7). Per il volume, i più grossi di questi noduli arrivano fino ad avere un diametro longitudinale di cent. 2,3 e di cent. 3; del resto, all'infuori di queste dimensioni eccezionali, se ne trovano moltissimi che raggiungono un diametro massimo di $\frac{1}{2}$ cent. a 1. cent. Queste milze hanno una superficie irregolare, bernoccoluta, come se risultassero dalla fusione di tanti nodettini più piccoli; hanno il colore della milza normale, e le più grosse una forma allungata come quella della milza primaria, col diametro maggiore sempre nella direzione di qualche grosso vaso sanguigno (tav. II, fig. 7 G). Alcune sono nettamente limitate, rilevate sulla superficie dell'omento, e rivestite da una capsula sottile che lascia trasparire il colore rosso-bruno della polpa sottostante (tav. II, fig. 7 F), altre invece si nascondono in mezzo al grasso che circonda i vasi, sul quale compariscono come chiazze scure, sfumate alla periferia (tav. II, fig. 7 E). Da questi noduli, almeno da quelli che hanno raggiunto un certo volume, esce una grossa diramazione venosa (tav. II, fig. 7 D), che mette in una vena di un calibro maggiore; queste sono quelle vene molto dilatate che abbiamo notato più sopra e che certamente compiono l'ufficio di vene spleniche. Esaminata per trasparenza la

sierosa peritoneale che rimane fra questi noduli scuri, si osservano, sul corso dei vasi sanguigni, molti di quei corpiccioli bianco-grigiastri che somigliano a tubercoli migliari e che stanno a rappresentare altrettanti corpuscoli di Malpighi in via di sviluppo. Una piccolissima porzione del bordo sinistro del grande omento prende aderenza sulla faccia inferiore del rene, e pure in questa parte della sierosa si osservano 3 o 4 piccole milze neoformate; la neoformazione però non si estende al peritoneo che normalmente passa sopra al rene (tav. II, fig. 7 H, A).

Spostato a destra il grand'omento, si vede nel fondo dell'ipocondrio sinistro quella porzione di epiploon gastro-splenico che non fu portata via durante l'operazione, e che raggiunge appena una lunghezza di 2 o 3 dita trasverse. Questa porzione residua dell'epiploon gastro-splenico non ha contratto nessun'aderenza anormale con le parti vicine, come suole avvenire nella maggioranza dei casi, e presentasi, come nelle condizioni normali, ancora fortemente infiltrata di grasso; mostra un discreto numero di milze neoformate lungo il corso dei suoi vasi, e non offre più traccia dei lacci con i quali era stata fatta la legatura dei vasi splenici. Questa duplicatura del peritoneo possiede insomma tutti i caratteri dell'epiploon gastro-splenico di un animale sano, meno la neoformazione delle piccole milze e la riduzione della sua lunghezza per la praticata operazione. Questa è certo la più bella dimostrazione che il peritoneo non risentì niente della praticata splenectomia, meno che nei punti più vicini alla ferita e che direttamente vennero interessati dal tagliente. Ciò può spiegare perchè in questa splenectomia, come in quelle praticate in animali che hanno la milza primaria normale e nei quali si ebbe ad osservare questa riproduzione, si sia avuto uno sviluppo così abbondante delle milze neoformate.

Nel ligamento che va dall'alto fondo della vescica alla cicatrice ombellicale, e che rappresenta l'uraco obliterato, si trova una milza neoformata che ha il volume di una veccia e che presenta tutti i caratteri macroscopici di quelle sopra descritte.

Nel ligamento gastro-epatico si rinvengono all'incirca 15 milze neoformate, la più grossa delle quali arriva ad avere un diametro di $^1/_2$ centimetro; anche queste del resto hanno tutti i caratteri delle milze neoprodotte.

Nel cul di sacco peritoneale pubico-vescicale, e nei cul di sacchi che stanno di lato alla vescica, si trovano 9 milze neoformate, delle quali 8 raggiungono appena le dimensioni di un capo di spillo o poco più, mentre una invece è assai più grossa, ha una forma sferica, ed arriva ad avere un diametro di 7 mill. Delle milze di queste parti, non tutte fanno sporgenza sulla superficie peritoneale; alcune sviluppatesi in mezzo all'adipe del bacino, sono completamente circondate da questo tessuto, e solo s'intravedono come punti scuri attraverso il grasso e attraverso la sierosa, che lo riveste dal lato della cavità-peritoneale. Cercando attentamente nel grasso della fossa ischio-rettale destra, si trova una di queste piccole milze, di forma presso che sferica, grossa quanto una veccia, la quale si era sviluppata in mezzo al tessuto adiposo in un punto assai lontano dalla sierosa peritoneale. Niente si trova nel cul di sacco peritoneale vescico-rettale e nelle ripiegature del peritoneo che tengono in posto i dutti deferenti. Invece nelle ripiegature peritoneali che stanno ai lati del retto e vanno indietro a formare il mesoretto, si trovano 7 piccole milze, la più grossa delle quali arriva ad avere un diametro di 4 mill.

Messo allo scoperto il diaframma, si osserva nella faccia peritoneale del centro frenico, a circa 1 cent. e ½ di distanza da quei fasci di fibre muscolari che legano questo centro tendineo allo sterno, una piccola chiazza rilevata, di un colore roseo, di forma assai irregolare, e sopra di questa una piccola milza neoformata, sferica, grossa quanto un chicco di panico e situata sul corso di una piccola vena, visibile facilmente anche ad occhio nudo perchè turgida di sangue (tav. I. fig. 2 *c*, *d*, *e*). Fuori delle cose notate, il centro frenico non presenta altro di anormale che una discreta iniezione venosa.

Nella sierosa peritoneale che riveste quei fasci muscolari del diaframma che vanno ad attaccarsi allo sterno, si trova un'altra piccola milza, rilevata sulla superficie peritoneale del diaframma, di forma sferica, a contorno regolare, e del diametro di 2 mill. circa (tav. I, fig. 2 *f*). Un' altra milza neoformata, del diametro di 2. mill., di forma irregolare, a superficie bernoccoluta, si rinviene nel tessuto fibroso che unisce le fibre muscolari del diaframma alla porzione ensiforme dello sterno (tav. I, fig. 2 *h*) ; altri noduli più piccoli si trovano qua e là disseminati in altri punti delle inserzioni tendinee del diaframma (tav. I, fig. 2 *i*).

Nel connettivo sotto-cutaneo dell' inguine sinistro, un poco al disotto delle glandule linfatiche inguinali, si trova un piccolo corpicciolo, di forma ovoidale, schiacciato dalla parte che guarda la pelle verso le parti profonde del corpo, di un colore rosso-bruno, a superficie molto irregolare, bernoccoluta, del diametro massimo di mill. 7; alla superficie del taglio di questo piccolo nodulo si vedono alcuni follicoli linfatici in mezzo ad una polpa assai molle, circoscritta all' esterno da una capsula piuttosto sottile, ma ben distinta. Trattavasi adunque di una piccola milza sviluppatasi nel connettivo sotto-cutaneo dell' inguine sinistro; di questa non fu tenuto affatto parola nella comunicazione preventiva della presente Memoria, poichè nel timore di aver a che fare con una glandula linfatica alterata piuttosto che con una milza, volli attendere che l'esame microscopico rendesse certa la diagnosi, prima di annunziarla al pubblico.

Volendo dare un giudizio approssimativo sul volume complessivo delle milze riprodotte rinvenute in questo animale in rapporto al volume della milza primitiva, credo di non esagerare asserendo che in questo caso si era riformata poco meno della metà della milza portata via.

Le glandule linfatiche addominali, cervicali, inguinali, poplitee, sono normali; solo un poco ingrossate ed arrossate le glandule toraciche che rimangono in prossimità dello sbocco del dutto toracico.

Nel rimanente della sezione non si trova niente altro che possa avere interesse per la presente Memoria.

Sezionate molte piccole milze neoformate, prese da vari punti della cavità peritoneale, si vedono corpuscoli, polpa e capsula, che per i rispettivi caratteri macroscopici sono del tutto simili alle parti corrispondenti della milza normale. Fatte delle dilacerazioni a fresco, si rinvengono in questi noduli tutti gli elementi della milza normale embrionale; sono molto numerosi i globuli rossi nucleati (dei quali alcuni in scissione nucleare e cellulare), le cellule con nucleo in gemmazione e le cellule globulifere.

Esaminata in serie complete di sezioni microscopiche la porzione di epiploon gastro-splenico asportata e le piccole milze in quella contenute si osservano i seguenti fatti. La maggior parte di queste milze non contengono, nè in mezzo alla polpa, nè alla loro superficie, dei corpuscoli di Malpighi; non sono limitate da una capsula distinta, e sono costituite intieramente da una polpa imperfetta e ancora nei primi stadi del suo sviluppo; questa polpa è formata intieramente da un rozzo stroma connettivo smagliato da sangue, e nei singoli noduli presenta solo una differenza di proporzione per la quantità del sangue, la dilatazione delle maglie della polpa e la quantità del connettivo che costituisce questa trama, nonchè una certa differenza nella ricchezza dei nuclei dello stroma; mancano, o sono molto rare, le vene cavernose; assai scarse sono le cellule con nucleo in gemmazione e i globuli rossi nucleati. In alcuni noduli la piccola milza è rappresentata solo da un infiltramento di sangue nel tessuto connettivo dell'epiploon, divenuto più spesso e non distinto dal connettivo delle parti vicine da un limite netto. In conclusione, anche questi noduli, come quelli asportati nella precedente splenectomia, somigliano perfettamente a quelli che si formano per malattia della milza primaria e che sono stati da me descritti in una precedente Memoria. Solo eccezionalmente si trovano delle milze in fasi più avanzate di sviluppo e di una costituzione più perfetta; dei 10 noduli da me esaminati in modo completo, appena uno, il più grosso di quelli asportati, aveva un corpuscolo di Malpighi e presentava una capsula distinta e una polpa in stadi più avanzati di sviluppo di quella delle altre piccole milze.

Le milze asportate, misurate nel loro piano massimo di sezione sopra a preparati microscopici, in media raggiungono il diametro di ½ mill.; solo la più grossa ha un diametro di 2 mill.; un'altra pure arriva ad avere una lunghezza di 2. mill. a un dipresso, ma non è formata da un solo nodulo, come si vede facilmente col microscopio, ma da 3 o 4 piccoli nodettini ancora ben distinti e separati gli uni dagli altri.

Al dintorno di queste milze neoformate si trova una grande quantità di globuli rossi, fra i quali solo eccezionalmente se ne vede qualcuno provvisto di un nucleo; nel rimanente dell'epiploon gastro-splenico asportato insieme ai noduli descritti, si vedono delle forti dilatazioni vascolari, e una leggera infiltrazione di globuli bianchi e di globuli rossi nei punti nei quali è stato riassorbito il grasso che segue l'andamento dei vasi sanguigni; finalmente in qualche parte si trova un inspessimento del connettivo di questa sierosa con una rete cellulare più ricca e più evidente che nelle condizioni normali, inspessimento che sembra essere il punto di partenza di nuovi noduli.

Studiato il grand'omento, la porzione di epiploon gastro-splenico lasciato in posto e l'epiploon gastro-epatico, sopra a preparati fatti con la distensione e con la colorazione successiva di queste sierose, come sopra abbiamo accennato, si vedono a un dipresso gli stessi fatti che sono stati notati nell'esperimento precedente; il grasso che segue il cammino dei vasi è già per la massima parte riassorbito e sostituito da un infiltramento di globuli bianchi; questo poi ora è limitato a piccoli tratti del vaso e in forma di noduli o di tubercoletti, ora invece ha un' estensione maggiore ed assume la forma di lunghi cordoni; in questi accumuli cellulari perivascolari,

e nel rimanente del tessuto di queste sierose si vedono assai raramente dei globuli rossi nucleati, come quelli descritti nella precedente osservazione. Anche in questo caso non è infrequente di vedere nella sierosa che rimane fra le milze neoformate dei corpuscoli di Malpighi in via di sviluppo e non ancora circondati di polpa.

Le milze neoformate rinvenute all'autopsia di quest'animale presentano costantemente nel loro interno uno o più corpuscoli di Malpighi; hanno una polpa formata da una trama regolare piuttosto serrata e provvista di numerose vene cavernose ben distinte e turgide di sangue; sono circoscritte all' esterno da una capsula piuttosto spessa e nettamente limitata; contengono un discreto numero di cellule con nucleo in gemmazione e di globuli rossi nucleati: questi poi risiedono, tanto nello interno delle vene cavernose, quanto nelle maglie della polpa. In altre parole, le varie parti di queste milze neoformate hanno a un dipresso la stessa costituzione delle parti corrispondenti della milza normale del cane.

I corpuscoli di Malpighi, che si trovano specialmente nelle parti periferiche di questi noduli, sono attorniati di solito da polpa in fasi meno avanzate di sviluppo; solo qualcuno di questi corpuscoli risiede alla superficie della milza, come nell'accrescimento di questi piccoli organi da me descritto per altri casi di splenectomia, od è prossimo a fondersi, insieme alla poca polpa che lo attornia, con il parenchima del nodulo più vecchio. La polpa, in generale, ha una costituzione più perfetta nelle parti centrali della milza neoformata; si trova in stadi meno avanzati di sviluppo nelle sue parti periferiche. Attorno a questi noduli si nota nel connettivo dell'omento un discreto numero di globuli bianchi e qualche globulo rosso libero nelle maglie di questo tessuto; assai di rado si vedono in queste parti dei globuli rossi nucleati.

Piccole sono le differenze che si osservano in queste milze neoformate per rapporto alla loro sede; sono differenze nel grado del loro sviluppo o nella dilatazione maggiore o minore delle maglie della polpa e delle vene cavernose, più che differenze essenziali di struttura. È in special modo ricca di sangue la milza trovata nel connettivo dell'inguine sinistro e quella del centro frenico; quest'ultima risiede sopra una chiazza rilevata (tav. I, fig. 2 *d*), formata da un fascetto di fibre muscolari del tutto staccate dal rimanente muscolo del diaframma.

Confrontando i preparati istologici delle milze asportate nell'operazione con quelli delle milze lasciate in posto e raccolte all'autopsia dall'animale, è facile di accorgersi come, anche in questo caso, la splenectomia abbia avuto per risultato di aumentare il numero, la diffusione e il volume delle milze preesistenti, e di perfezionarne in modo la struttura, da trasformare degli organi incompleti, imperfetti, in organi completamente sviluppati, i quali nei loro componenti in nulla si distinguono più dalle corrispondenti parti della milza normale del cane. Abbiamo avuto insomma un' attività tale di questo processo di neoformazione, che esso non si è più limitato alle sole parti nelle quali ordinariamente suole aver luogo quando è causato da malattia della milza primaria, ma ha invaso altresì tutti quei punti che l'organismo suol mettere in opera quando i bisogni sono maggiori, cioè quando invece di essere parzialmente abolita la funzione della milza primaria, qualunque essa si sia, viene mediante la splenectomia, soppressa l' intiera funzione dell' organo.

II.

I fatti esposti, per quanto poco numerosi si sieno, mi portano a concludere qualche cosa sugli effetti che induce l'ablazione della milza primaria ammalata sulle milze neoformate preesistenti all'operazione, e uniti agli altri fatti da me rinvenuti e già in parte resi di pubblica ragione, mi permettono di fare alcune considerazioni sulla funzione del tessuto connettivo.

È cosa evidente che la splenectomia, fatta nelle accennate condizioni, conduce anzitutto ad un aumento del numero e del volume delle milze preesistenti, con alcune piccole differenze in questi risultati, a seconda che le parti le quali sono la sede più frequente di queste neoformazioni risentirono più o meno intensamente gli effetti della praticata operazione. Le piccole differenze che si sono ottenute nei risultati dei due esperimenti sopra riportati, dipendono appunto dalla diversità nella reazione infiammatoria presentata dai due animali. Infatti, se nel primo caso la neoformazione di parenchima splenico si arrestò nel grand'omento e regredì nell'epiploon gastro-splenico, ciò dipese da un leggero processo infiammatorio di queste parti che tenne dietro alla loro asportazione generosa, processo infiammatorio che mentre alterò pochissimo le apparenze macroscopiche del grand'omento, ci venne poi annunziato da particolari fenomeni clinici e anatomici; così il vomito e la diarrea che si osservarono nei giorni successivi alla splenectomia, benchè disgiunti da altri fenomeni gravi, c' indicarono l' esistenza di un processo infiammatorio, fosse pure localizzato, nella cavità peritoneale, ciò che ci venne confermato in ultimo dalle aderenze che alcuni punti del grand' omento avevano contratto fra di loro, nonchè con lo stomaco, col fegato e colla parete addominale in corrispondenza della praticata ferita. Perciò, impedita la neoformazione di parenchima splenico nelle grandi duplicature del peritoneo, questa avvenne in altri punti della sierosa peritoneale più lontani dalla parte operata, e quindi meno interessati, meno alterati dal processo reattivo locale, nonchè nel tessuto adiposo che trovasi in vicinanza di questa sierosa. Nel secondo caso invece il grand' omento non venne attaccato nell' operazione, la guarigione fu pronta, il processo infiammatorio non si estese al di là dei bordi della ferita, come ne fecero fede le mancate aderenze e la persistente infiltrazione adiposa dell'epiploon gastro-splenico, quindi non solo si ebbe in queste parti un perfezionamento delle milze preesistenti, ma anche un aumento colossale del loro numero e del loro volume. Ma esaurito in queste parti il processo di neoproduzione, esso si diffuse in altri punti della sierosa peritoneale nei quali la neoformazione di parenchima splenico si suol rinvenire più raramente, ed in quelli stessi punti nei quali questa neoformazione erasi sviluppata immediatamente dopo l'asportazione della milza in quei casi nei quali la riproduzione di quest' organo non potè aver luogo nelle grandi duplicature del peritoneo, per le alterazioni che queste parti avevano subite. E che la neoformazione della milza che ebbe luogo al difuori delle grandi duplicature del peritoneo fosse di data più antica nel primo che nel secondo caso, che nel primo cioè questa neoproduzione fosse primitiva, quasi immediata all'atto operatorio, mentre nel secondo caso non fosse che un processo di diffusione, un processo secondario a quello delle grandi duplicature del peritoneo, ciò si rileva

con bastante chiarezza dal volume di queste neoproduzioni. Si confrontino le milze che in ambedue gli esperimenti si sono sviluppate sul diaframma, e sarà molto facile di convincersi, che quelle della prima osservazione, a causa del loro volume, sono di data molto più antica di quelle della seconda.

Perciò in questi due casi si è ottenuta quella diffusione nella neoformazione della milza che si ottiene nella splenectomia praticata in animali che hanno la milza normale, diffusione che non ho mai potuto osservare nella riproduzione della milza per alterazione patologica della milza primaria, la quale di solito è limitata alle due grandi duplicature del peritoneo (epiploon gastro-splenico, grande omento), e che deriva da abolizione più completa della funzione di quell' organo, e quindi da maggiori sforzi dell'organismo per stabilire un compenso al viscere asportato. Sembra quasi che nel primo caso entrino in funzione solo le parti più predisposte alla neoformazione della milza, e che nel secondo la natura metta in opra tutte le sue risorse onde tutti quei punti del corpo che possono dar origine a parenchima splenico, in queste circostanze diventino attivi.

Oltre ad un aumento del numero, del volume e della diffusione delle milze riprodotte, nella splenectomia praticata in animali che avevano la milza primaria ammalata, si osserva un perfezionamento nella struttura dei noduli del grand'omento e dell'epiploon gastro-splenico preesistenti all' operazione; questi da una struttura molto rozza, dallo stato di semplice infiltrazione sanguigna di un tessuto connettivo, passano ad avere la struttura identica della milza normale del cane. Solo in un caso nel quale l'animale morì per infezione settica poco tempo dopo praticata l' asportazione della milza (vedi Oss. 4 della mia precedente Memoria), l'aumento di volume delle piccole milze riprodotte fu dato esclusivamente da una enorme dilatazione delle lacune sanguigne, dilatazione che aveva talmente assottigliato le trabecole connettive che di questi noduli con molta difficoltà se ne potevano fare delle sezioni microscopiche. All' infuori di questo caso, in quelli nei quali si ebbe una pronta guarigione, e nessun segno d'infezione settica, l'ingrossamento delle milze riprodotte preesistenti all'operazione fu sempre accompagnato dalla comparsa di corpuscoli nell'interno o alla superficie dei vecchi noduli, e dal perfezionamento della loro polpa, la quale acquistò una struttura identica a quella della milza normale del cane; come pure fu accompagnato dalla produzione di nuovi noduli, la quale avvenne sempre secondo le leggi dello sviluppo embrionale, vale a dire con la neoproduzione di corpuscoli di Malpighi dapprima e successivamente con la comparsa della polpa.

Ma una volta che è impedito o esaurito il processo di formazione del parenchima splenico nelle grandi duplicature del peritoneo, in quali altre parti della sierosa ha luogo questa neoformazione? Avviene indifferentemente in una parte o in un' altra del peritoneo, ovvero in punti determinati? Per quanto la scarsezza delle osservazioni mi permette di concludere a questo riguardo, io son molto inclinato a ritenere che la neoformazione della milza abbia luogo in punti determinati, che sarebbero, l'epiploon gastro-epatico, i dintorni della vescica, il diaframma, il peritoneo di rivestimento di alcuni organi (stomaco): sarebbero a un dipresso quelle stesse parti che abbiamo visto egualmente entrare in funzione quando si pratica la splenectomia in animali che hanno la milza normale. Nel primo come nel secondo di

questi casi, vale a dire tanto che la milza asportata fosse ammalata quanto che fosse normale, io non ho mai visto avvenire questa neoformazione di parenchima splenico nel mesenterio, nel peritoneo che riveste le pareti addominali e in quello che avvolge il fegato, l'intestino, o nelle altre parti di questa sierosa non rammentate nei reperti delle osservazioni sopra analizzate. Sembra quindi che questa neoformazione avvenga in punti determinati della sierosa peritoneale. Siccome poi questi punti coincidono, per la massima parte, con quelli che il prof. Maffucci [1] ha dimostrato essere le vie di assorbimento della sierosa peritoneale ed avere una struttura speciale, così è presumibile che ragioni speciali di costituzione limitino la neoformazione di parenchima splenico a punti determinati di questa sierosa.

Ma questa proprietà di dar origine a neoformazione di corpuscoli e di polpa, è speciale di alcuni punti del peritoneo od è un fatto molto più generale che può estendersi anche ad altre parti del tessuto connettivo? Per quanto i pochi fatti da me osservati non mi permettano a questo riguardo di concludere in modo reciso, ma mi concedano solo di accennare una questione che sarà in seguito svolta con maggior larghezza (confermando o contraddicendo questi primi risultati) da coloro che hanno la fortuna di possedere quei mezzi di studio che io fino ad ora non ho mai posseduto, nonostante, basandomi sopra alcuni fatti rilevati da questi due esperimenti, io mi trovo inclinato ad ammettere che la proprietà di dar luogo alla neoproduzione della milza, questa splenogenesi come potrebbe dirsi, non è speciale del peritoneo, ma è propria del tessuto connettivo in genere. E i fatti ai quali accenno sono quelli di avere trovate di queste milze neoprodotte non solo nel peritoneo, ma ancora nel tessuto connettivo, sia nel semplice tessuto connettivo, sia nel tessuto adiposo, quali ad esempio le milze osservate nel pacchetto adiposo sterno-addominale in punti piuttosto lontani dalla superficie peritoneale, le milze rinvenute nell'adipe del bacino e quella trovata nel connettivo sotto-cutaneo dell'inguine sinistro. Negli animali che mi restano ancora da uccidere e che furono smilzati da molto tempo, cercherò in seguito di studiare più accuratamente l'estensione e la forma che queste neoformazioni di parenchima splenico possono assumere nel tessuto connettivo e nel tessuto adiposo. Mi affretto peraltro di aggiungere per non essere frainteso o contradetto dai primi risultati negativi che si possono ottenere, che con questa asserzione io non intendo esprimere che una possibilità, senza sostenere al certo che in ogni caso di splenectomia si debbano produrre le milze nelle parti sopra designate; che anzi, potendo disporre l'animale di numerose forze per compensare la funzione della milza che è stata portata via, può darsi benissimo che, a seconda delle circostanze, risponda ora con maggiore attività del midollo delle ossa, ora con neoformazione di milza dal peritoneo, ora con sviluppo di questi piccoli organi anche da altre parti del connettivo; precisamente come nel caso nel quale si eccita la funzione ematopoetica per mezzo del salasso, non sempre rispondono con eguale attività la milza ed il midollo delle ossa.

Stabiliti questi fatti, rimane a risolvere per il tessuto connettivo in genere la

[1] Maffucci, *Esperimenti sull'assorbimento del peritoneo.* Giornale internazionale delle scienze mediche. Anno IV, fas. 7-8, 1882.

questione che già fu sollevata per il peritoneo, cioè se tutto il connettivo o alcuni punti determinati di questo tessuto son capaci di dar origine a parenchima splenico; ma a questo riguardo non potendo portar innanzi per ora che delle ipotesi, preferisco di lasciare la questione del tutto insoluta.

Risulta intanto dalle cose fin qui esposte, che il tessuto connettivo in genere e la sierosa peritoneale in particolare, possono, in determinate circostanze, servire da tessuto matrice del parenchima splenico. Questo è certamente il punto più importante delle mie ricerche sulla riproduzione della milza, poichè non solo vale a farci conoscere il fatto materiale della possibilità che un organo completamente asportato possa riprodursi, ma vale per sè stesso, quasi a priori, a dimostrare altresì, che fra questo tessuto e la milza esiste una grandissima parentela anatomica e funzionale, e che il tessuto connettivo può e deve quindi esser considerato come un tessuto ematopoetico.

Non mi dissimulo l'opposizione che troveranno queste mie idee prima di essere accettate nella scienza, e sento quindi il dovere di dare sopra di loro alcuni schiarimenti, e di esporre in modo sintetico quei fatti sui quali si appoggiano le mie conclusioni.

Qual è anzitutto il significato che si deve dare oggi a un tessuto o ad un organo ematopoetico? Certamente per le cognizioni che si hanno al presente a questo riguardo, non si può più sostenere che una data parte del corpo per esser dichiarata ematopoetica debba presentare degli elementi del sangue in via di formazione, qualunque sia il modo che si accetti per la neogenesi dei globuli rossi; è oramai provato che la milza e il midollo delle ossa lunghe, ai quali nessuno vorrebbe più contestare oggi una funzione ematopoetica, si mantengono per lunghi periodi della vita in stato inattivo, ed in tali periodi si ricercherebbero invano in queste parti dei globuli rossi nucleati; ma appena si verifichino alcune circostanze, appena venga impoverita la massa del sangue con ripetuti salassi ad esempio, questi organi si modificano prontamente nella loro costituzione e dallo stato inattivo passano subito a prender parte attivissima alla formazione del sangue, come ce lo indica la comparsa in queste parti dei globuli rossi nucleati e le varie forme di scissione nucleare e cellulare che presentano i detti elementi. Quindi il concetto che oggi abbiamo di un organo ematopoetico si è quello di un organo che ha in sè la potenza di produrre in determinate circostanze dei globuli rossi del sangue, di un organo che ha quasi un'attività allo stato latente, la quale si rende manifesta solo in determinati periodi della vita e quando si verifichino alcune condizioni fisiologiche o patologiche. Da questo si arguisce già che la funzione ematopoetica per la sua importanza non può essere stata affidata ad un solo organo, ma che dev'esser molto più diffusa di quello che ordinariamente non si pensi, perchè quando uno od alcuni di questi organi si trovano nello stato di riposo, altre parti possano adempiere con tutta regolarità a questa funzione. E da ciò si comprende ancora, come non si possano così alla prima rifiutare queste mie conclusioni, solo perchè l' esame del connettivo del primo animale che capita fra mano non presenta elementi del sangue in via di formazione, ma come sia necessario, per sorprendere i fatti accennati, di studiare questo tessuto in determinati periodi della vita, o riprodurre quelle condizioni che valgono a richiamarne l'attività ematopoetica.

Quindi le mie conclusioni possono essere a questo modo formulate: il connettivo è un tessuto ematopoetico, il quale, al pari degli organi di tessuto connettivo con i quali ha a comune questa funzione, presenta dei periodi di attività e dei periodi di riposo; nuovi studî devono esser diretti a determinare se tutto questo tessuto o solo dei punti determinati di esso possano concorrere alla formazione del sangue, e a farci conoscer meglio tutte quelle condizioni fisiologiche e patologiche che valgono a richiamare la sua attività ematopoetica, a farlo passare cioè dallo stato di riposo allo stato di attività.

Vediamo adesso quali sono le basi sulle quali si appoggiano queste mie conclusioni, limitandomi ad accennare solo i punti principali delle mie ricerche, e rimandando per molti particolari a quello che è stato esposto nei miei precedenti lavori e in una Memoria sulla riproduzione parziale della milza, fatta in collaborazione col prof. Griffini, che trovasi già in corso di pubblicazione.

Abbiamo in primo luogo i fatti della riproduzione della milza che ho di sopra accennato, i quali provando che il tessuto connettivo, o almeno alcune parti di questo tessuto, possono servire di matrice per un organo ematopoetico, dimostrano la grandissima parentela anatomica e funzionale che lega insieme questo tessuto a quell' organo. Non ritorno qui sulle analogie di struttura che in un' analisi molto minuta si possono trovare fra il tessuto connettivo e la milza, specialmente a riguardo del modo di terminazione dei vasi e dei rapporti che passano fra il sistema vascolare e le maglie di questo tessuto, poichè tutte queste cose furono da me descritte e figurate in una precedente Memoria.

In secondo luogo abbiamo la presenza dei globuli rossi nucleati in seguito alla splenectomia, tanto nelle milze neoformate quanto nel connettivo dell'epiploon. I primi di questi elementi si formano in lòco ed hanno certamente lo stesso significato di quelli che si trovano nella milza embrionale; sono in generale tanto più abbondanti quanto meno avanzate sono le fasi di sviluppo delle nuove milze, e sono tanto più abbondanti quanto maggiore è la loro attività, come quando servono a compensare la funzione della intiera milza primaria, che venne completamente asportata. Riguardo ai globuli rossi nucleati del tessuto connettivo dell'epiploon, o almeno agli elementi da me interpretati come globuli rossi col nucleo in varie fasi di distruzione, questi non solamente si trovano entro i vasi sanguigni, ma si rinvengono anche, ed in maggior quantità, nelle maglie di questo tessuto, specialmente in vicinanza dei detti vasi. Più in basso sarà discussa la genesi di questi elementi.

In terzo luogo ho cercato di appoggiare le sopraespresse conclusioni con quelle stesse prove che servirono tanto bene per eccitare e render più manifesta la funzione ematopoetica della milza e del midollo delle ossa lunghe negli animali adulti, cioè coll'anemia sperimentale determinata per mezzo del salasso. Per questi esperimenti mi sono valso in ispecie del cane, come quello fra gli animali che si sogliono utilizzare nei laboratori di patologia, il quale meglio degli altri si presta per queste ricerche; ho fatto ancora qualche tentativo nel coniglio, ma questi non hanno valso che a convincermi della verità di quanto fu osservato da altri sulla poca bontà di questo animale come soggetto per tali studî. I risultati di questi esperimenti si furono, che dopo ripetuti salassi si trova nel connettivo dell'omento, e specialmente

al dintorno dei vasi, nelle parti prima occupate dal grasso, una quantità di piccoli elementi, poco superiori per le dimensioni ai globuli rossi dei vasi vicini, con protoplasma liscio, colorabile in rosso dorato dall'eosina, con nucleo diviso in due o tre piccole parti e discretamente colorato dall'ematossilina; e accanto a questi si trovano delle cellule aventi tutti i caratteri di quelle sopra descritte, ma col nucleo in gradi più avanzati di distruzione, talora disfatto intieramente in granuli, che divenivano sempre più radi e sempre più sbiaditi a misura che si avanzava il processo di distruzione (tav. I, fig. 4). Così in ultimo spariva ogni traccia di nucleo, e la parte residua della cellula compariva per dimensioni e per forma perfettamente eguale ai più grossi globuli rossi senza nucleo dei vasi vicini. Questi stessi elementi, che sono identici a quelli rinvenuti nelle grandi duplicature del peritoneo di animali smilzati, e che sono stati più sopra descritti, nelle condizioni normali non potei osservarli che nell'epiploon di animali giovanissimi, da uno a quattro giorni all'incirca, e nell'omento di un cane piuttosto giovane (6 mesi circa), magrissimo, profondamente deperito, quasi marantico. I pochi esperimenti poi che potei fare per questa ricerca furono tutti perfettamente concordi nei risultati, sia per la comparsa nell'epiploon di questi elementi con nucleo in fasi distruttive e di cellule globulifere, sia per la comparsa di globuli rossi nucleati nella milza e nel midollo delle ossa. Uno solo degli animali così operati dette resultati molto discordi da quelli di sopra accennati; e presentò fatti così strani che difficilmente possono esser compresi con le cognizioni che possiede oggi la nostra scienza sulla funzione ematopoetica. Trattavasi di un cane levriero piuttosto vecchio, che era stato passivo di 7 abbondanti salassi; alla sezione si trova giallo il midollo delle ossa lunghe, non molto ricco di globuli rossi nucleati il midollo delle coste, del tutto inattiva la milza, assolutamente mancanti nel grand' omento gli elementi sopra citati. Per converso si osservano nell' epiploon esaminato a fresco nel siero della cavità addominale, e nelle preparazioni conservate come sopra ho detto, un gran numero di piastrine di Bizzozero nell'interno dei vasi, piastrine che nelle preparazioni state trattate coll'eosina erano colorate in un colore rosso dorato del tutto simile nel tono, benchè un poco differente nell' intensità, a quello dei globuli rossi vicini. Questa osservazione però, almeno a mio credere, non vale a distruggere i risultati ai quali conducono la maggioranza di questi esperimenti; vale solo a dimostrare quanto c'è ancora d'ignoto in questo genere di ricerche, e a convalidare l'opinione che la funzione ematopoetica non è affidata ad un solo organo, ma a molte parti del nostro corpo, delle quali, a seconda di determinate condizioni che non ci sono ancora conosciute, ora entrano in funzione le une, ora le altre.

Riguardo alla genesi di questi globuli rossi nucleati dell'epiploon, sia di quelli trovati in queste parti dopo l'asportazione della milza, sia di quelli che si osservano in questa sierosa in animali molto giovani, in animali marantici, o dopo ripetuti salassi, non posso dire ancora niente di preciso; per ora debbo limitarmi a constatarne la presenza, a dimostrare che vi sono figure che rappresentano la scomparsa graduale del nucleo di queste cellule, e a stabilire che questi elementi si rinvengono nell'epiploon di animali nei quali si ha contemporaneamente la presenza di globuli rossi nucleati nella milza, sia nella milza primaria, come nel caso dell'anemia sperimentale provocata col salasso, sia nelle milze neoformate, come nel caso della splenectomia.

Quello che mi pare si debba escludere in modo assoluto si è che questi elementi siano stati versati dai vasi nelle maglie del tessuto connettivo, poichè, mentre sono abbondanti in questo tessuto, sono invece molto rari ad osservarsi nell' interno dei vasi sanguigni. Invece la stessa esclusione assoluta non può farsi per la derivazione di questi globuli rossi embrionali dai globuli bianchi del tessuto connettivo, poichè spessissimo si vedono di questi elementi che hanno una grandissima somiglianza con i globuli bianchi e se ne distinguono solo per un aspetto più liscio e per una colorazione giallognola del protoplasma, il quale assume un colore rosso-dorato quando venga trattato coll'eosina, nonchè per avere il nucleo diviso in due a quattro piccole masse. Anzi in questo periodo si resta molto perplessi se si tratti veramente di globuli rossi nucleati o semplicemente di globuli bianchi, e ciò fino a che non si vedano delle figure che rappresentano fasi più avanzate di distruzione nucleare, e fino a che le immagini ottenute con le preparazioni di pezzi d' epiploon distesi e colorati con ematossilina ed eosina, non siano state rafforzate da quelle che si ottengono con sezioni sottilissime di questa sierosa colorate con semplice ematossilina o con carminio borico di Grenacher, e nelle quali la tinta giallognola del protoplasma fa un bel contrasto col colore vivace rosso o violetto del nucleo. In quanto al modo di scomparsa del nucleo, mi pare debba ritenersi che questa ha luogo per una divisione del nucleo in due o più piccole masse e per disfacimento successivo di queste masse in piccoli granuli, i quali finiscono in ultimo per scomparire del tutto all' osservazione; queste fasi distruttive ci vengono indicate ancora dal farsi sempre più debole la colorazione dei nuclei in distruzione, a misura che questa è maggiormente avanzata. Una sola volta nel connettivo, in vicinanza di una piccola milza neoformata, mi accadde di osservare un nucleo che stava per abbandonare un globulo rosso, come nelle figure che Bizzozero e Rindfleisch hanno osservate nel midollo delle ossa, e sulle quali, l'ultimo di questi patologi fondò la spiritosa ipotesi che la trasformazione dei giovani globuli nucleati in globuli adulti abbia luogo per ciò che il nucleo abbandona la parte colorata. Questa ipotesi per quanto riguarda la trasformazione dei globuli rossi del connettivo non è certamente preferibile a quella della distruzione del nucleo nell'interno della cellula stessa per divisione e disfacimento granulare successivo, poichè, mentre resta facile di sorprendere molte di queste fasi distruttive del nucleo, invece non accade mai di trovare dei nuclei liberi, come dovrebbe avvenire se questi abbandonassero la parte colorata, o dei globuli con un nucleo che fa sporgenza sulla loro superficie, o che è aderente alla parte colorata soltanto per un sottile filamento, finamente granuloso, come accade di osservare assai frequentemente nel midollo delle ossa.

Questo modo di formazione dei globuli rossi e della loro trasformazione da globuli rossi embrionali in globuli rossi adulti, non contraddice, come parrebbe a prima vista, quanto è stato osservato nella produzione dei globuli rossi del sangue nella vita extrauterina per scissione indiretta [1]; scissione indiretta che io stesso ho avuto occasione di confermare per i casi nei quali era stata eccitata la funzione

[1] Bizzozero, *Sulla produzione dei globuli rossi del sangue nella vita extrauterina.* Giornale dell'Accademia di Medicina di Torino 1881.

ematopoetica del midollo delle ossa con ripetuti salassi o con l'asportazione totale della milza; c' indica solo un fatto nuovo che messo in raffronto con quello che si conosce sulla funzione ematopoetica, serve a far sospettare, se non a dimostrare assolutamente, che il modo di produzione dei globuli rossi sia diverso a seconda della parte nella quale questa produzione ha luogo. Una volta poi che questi globuli rossi nucleati si siano formati, qualunque sia il processo di loro formazione, è cosa naturale che il loro numero possa benissimo aumentare anche per scissione indiretta.

E nemmeno queste ricerche valgono ad impugnare o a menomare l'importanza della funzione ematopoetica del midollo delle ossa e della milza, ma valgono solo a togliere a queste parti quella specificità di funzione che si era loro fino ad oggi attribuita, e ad estendere questa funzione al tessuto connettivo in generale; questo perciò non potrà più esser considerato come un semplice tessuto di sostegno, destinato quasi a riempire i vuoti del nostro corpo e a lasciarsi traversare dai succhi nutritizi, ma dovrà altresì esser ritenuto, al pari di alcuni organi connettivi, come un tessuto che in determinate circostanze prende una parte molto attiva nella formazione del sangue. Ulteriori ricerche dovranno farci conoscere più esattamente le condizioni nelle quali questo tessuto connettivo entra in funzione come tessuto ematopoetico, come ci dovranno far conoscere qual grado occupi il tessuto connettivo nell'adempimento di questa sua funzione, di fronte al midollo delle ossa e alla milza in cui sembra sia concentrata in modo speciale questa attività ematopoetica.

CONCLUSIONI

1. La splenectomia, praticata in animali che prima dell'operazione presentano milze neoformate nel grand'omento e nell'epiploon gastro-splenico per malattia della milza primaria, produce anzitutto un aumento di numero e di volume delle neoformazioni di queste sierose.

2. Impedito il maggiore sviluppo della neoformazione di parenchima splenico nel grand'omento e nell'epiploon gastro-splenico per effetto di pregressa infiammazione, o arrivato al suo maximum il processo produttivo delle piccole milze nelle grandi duplicature del peritoneo sopra rammentate, questa neoformazione avviene in altre parti della sierosa peritoneale.

3. Le parti nelle quali si nota lo sviluppo delle nuove milze sono all'incirca quelle stesse nelle quali ha luogo la produzione di noduli per splenectomie praticate in animali con la milza sana: vale a dire che nella splenectomia la neoformazione della milza, oltre che al grande omento e all'epiploon gastro-splenico, si estende anche a tutte quelle parti del peritoneo che hanno il potere di formare di questi piccoli organi, e ciò tanto nei casi nei quali questa neoformazione può svilupparsi abbondante nel grand'omento e nell'epiploon gastro-splenico, quanto nei casi nei quali un processo infiammatorio delle grandi duplicature del peritoneo impedisce che avvenga in queste la neoproduzione dei sopradetti noduli, mentre nelle

malattie che conducono ad alterazioni della milza primaria non si hanno neoformazioni così estese, ma di solito limitate al grand'omento e all'epiploon gastro-splenico.

4. Le parti del peritoneo nelle quali può aver luogo la neoformazione della milza sono quelle stesse che il Maffucci ha dimostrato avere una struttura speciale ed essere le vie di assorbimento della sierosa peritoneale.

5. Oltre alla sierosa peritoneale, in alcuni casi il processo di neoformazione di parenchima splenico si diffonde ad alcune parti del tessuto adiposo (adipe del bacino, pacchetto adiposo sterno-addominale) e del tessuto connettivo sotto cutaneo (connettivo sotto-cutaneo della regione inguinale).

6. Per il lato istologico, la splenectomia, fatta nelle accennate condizioni, porta ad un perfezionamento nella struttura delle milze preesistenti, le quali in ogni loro parte vengono ad acquistare la struttura della milza normale del cane.

7. L'accrescimento dei vecchi noduli e la produzione dei nuovi segue le fasi dello sviluppo embrionale della milza, ed è identico perciò a quello da me descritto nella riproduzione di quest'organo in seguito alla splenectomia praticata in animali che hanno la milza sana.

8. Il fatto stesso della riproduzione della milza ci fa ritenere che il peritoneo e il tessuto connettivo in genere, sia in parte sia in totalità, hanno una grandissima parentela anatomica e funzionale con la milza, in modo da poter servire, in determinate circostanze, da matrice di quest'organo.

9. L'esistenza di una funzione ematopoetica del tessuto connettivo viene appoggiata ancora dal fatto, che in alcuni casi di splenectomia si trovano numerosi globuli rossi nucleati non solo nelle milze neoformate ma anche nelle maglie del tessuto connettivo dell'omento, e che questi elementi si rinvengono pure nelle maglie di quella sierosa di cani giovanissimi, di cani profondamente deperiti, o di cani resi anemici col salasso.

10. Le eccezioni che si possono avere in questi esperimenti non valgono a dimostrare altro, che la funzione ematopoetica è una funzione molto diffusa, e affidata a varie parti del corpo, delle quali, a seconda di alcune circostanze a noi per ora ignote, entrano in funzione ora le une ora le altre.

11. La formazione di questi globuli rossi embrionali del grand'omento, la quale ha luogo specialmente al dintorno della ricca rete vascolare di questa sierosa, avviene probabilmente per trasformazione di globuli bianchi: la scomparsa del nucleo dei globuli rossi neoformati si fa per divisione di questo nucleo in piccole masse e per ulteriore disfacimento granulare delle varie parti nelle quali il nucleo si è primitivamente diviso.

12. Fino ad ora non ci è noto il meccanismo col quale questi globuli rossi nucleati del grand'omento penetrano dalle maglie del tessuto connettivo nell'interno dei vasi.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola I.

Fig. 1. *Milza neoformata nel centro frenico; a*, centro frenico; *b*, fibre muscolari del diaframma; *c*, vene del diaframma turgide di sangue; *d*, milza neoformata. Disegnata dal pezzo fresco a grandezza naturale.

» 2. *Milze neoformate nel diaframma; a*, centro frenico; *b*, fibre muscolari del diaframma; *c*, fina iniezione vascolare del centro frenico; *d*, fascio di fibre muscolari isolate in mezzo al centro tendineo; *e*, milza neoformata al disopra di questo fascio muscolare; *f*, milza neoformata sul peritoneo che riveste i fasci muscolari normali del diaframma; *g*, inserzioni fibrose periferiche del diaframmà; *h*, grossa milza sviluppatasi in queste inserzioni fibrose; *i*, altra piccola milza neoformata; *k*, adipe sterno-addominale. Disegnata dal pezzo fresco a grandezza naturale.

» 3. *Infiltrazioni cellulari al dintorno della ricca rete vascolare dell'omento; a*, vasi venosi dilatati, dell'aspetto dei vasi cavernosi; *b*, infiltrazioni perivascolari di globuli bianchi e di globuli rossi con nucleo e senza nucleo. *Ingr.* 90.

» 4. Cellule con protoplasma liscio, colorato in rosso dorato dall'eosina, e con nucleo in varie fasi di distruzione, rinvenute nel connettivo dell'omento di animali resi anemici per ripetuti salassi. *Ingr.* 600.

» 5. *Grande omento di animali i quali presentano riproduzioni della milza ed ai quali è stata portata via la milza primaria da molto tempo; a*, piccolo vaso sanguigno; *b*, cellule fisse del tessuto connettivo; *c*, globuli bianchi; *d*, cellule con protoplasma liscio, colorato in rosso dorato dall'eosina e con nucleo in varie fasi di distruzione e di scomparsa; *e*, rigonfiamenti o bottoncini rossastri con i quali terminano alcuni prolungamenti delle cellule fisse del tessuto connettivo. *Ingr.* 340.

» 6. *Grossa milza sviluppatasi sulla superficie dello stomaco; a*, faccia inferiore dello stomaco; *b*, resti di epiploon gastro-splenico nell'interno dei quali si trovano i lacci che nuotano in un liquido siero-purulento; *c*, porzione del grande omento che ha preso aderenza allo stomaco, e che mostra una ricca rete vascolare e delle milze neoformate assai piccole e piuttosto rade; *d*, bandelletta del grand'omento che contiene le milze più grosse che si rinvengano in questa duplicatura del peritoneo e che va ad attaccarsi al fegato; *e*, fegato; *f*, neoformazione di fegato che partendo dal punto nel quale è stata praticata una lacerazione di quest'organo si prolunga sul grand'omento; *g*, grossa milza neoformata sulla superficie dello stomaco. Disegnata dal pezzo fresco a grandezza naturale.

Tavola II.

Fig. 7. *Neoformazione di milza nel grande omento in seguito all'asportazione della milza primaria; A*, rene; *B*, pancreas; *C*, omento rovesciato in avanti; *D*, vene del grand'omento fortemente dilatate; *E*, milze sviluppatesi in mezzo al grasso dell'omento; *F*, milze neoformate che non sono inviluppate da grasso e che fanno forte sporgenza sulla superficie della sierosa; *G*, milza neoformata più grossa trovata in questo esperimento; *H*, piccole milze neoformate sviluppatesi in un punto di aderenza fra il grand'omento e il rene. Disegnata dal pezzo fresco a grandezza naturale.

» 8. *Sviluppo delle milze neoformate; a*, corpuscolo di Malpighi non ancora circondato di polpa; *b*, leggiera infiltrazione cellulare del connettivo che circonda questo corpuscolo; *c*, vasi sanguigni molto dilatati; *d*, tessuto connettivo dell'omento. Colorata con carminio di Grenacher, sezione di mill. 0,01 di spessore. *Ingr.* 140.

» 9. *Sviluppo delle milze neoformate; a*, corpuscolo di Malpighi; *b*, infiltrazione cellulare e dilatazioni vascolari formatesi al dintorno di questo corpuscolo; in questo infiltrato si trovano già dei globuli rossi nucleati; *c*, connettivo del grande omento. Colorata con carminio di Grenacher, sezione di mill. 0,01 di spessore. *Ingr.* 140.

a
b
c
d
e
f
g
h
i
k
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

E
F
D
E
C
D
F
G
A
B
H
Fig. 7
Fig. 9
Fig. 8

Intorno a' suoni eccitati in una lamina o in una corda attraversate dalle frequenti scariche laceranti di una macchina elettrica.

Nota del prof. EUGENIO SEMMOLA

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 20 maggio 1883.

Considerando più volte che le azioni intermittenti della corrente elettrica, della calamitazione, del calore e perfino quella della luce sono capaci di eccitare moti sonori, mi è venuto il pensiero che lo stesso effetto si dovesse avere per l'azione delle scariche elettriche laceranti. Di fatti, tentata l'esperienza, il fenomeno si è presentato, se non erro, secondo io aveva imaginato. I suoni si possono avere da una lamina o da una corda, sia per scarica diretta, sia per scarica d'influsso: dirò come ho operato in un modo e nell'altro.

Suoni per scarica diretta. — Da uno de' conduttori a, fig. 1 (sia per esempio il positivo) di una macchina di Holtz parte un filo di rame lungo un cinque metri, il quale con l'altro estremo è fissato in una morsetta b saldata ad una lamina circolare c di ottone, spessa un mezzo millim., più o meno, ed isolata; un secondo reoforo fermo all'altra morsetta g fa comunicare la lamina stessa col conduttore negativo n della macchina, e così il circuito è chiuso; però a poca distanza dall'elettromotore vi ha una interruzione $e\,f$, dove scoppia la scintilla, quando la macchina è in azione. La lamina c è fissata alla bocca di un imbuto o collettore di *ebanite*, congiunto ad una canna sonora o portavoce, il quale termina con un cornetto acustico m. Messo in moto il disco della macchina, nell'interruzione $e\,f$ scoppiano frequenti e facili scintille, ed un suono continuo si sente da chi sta con l'orecchio in m. Naturalmente viene presto il sospetto che il suono avvertito sia quello della scintilla comunicato pel reoforo (e qui mi piace far notare che la stanza dove si stava ad ascoltare, seguiva quella dove si trovava la macchina, ed essendo chiusa la porta di mezzo, il rumore diretto della scintilla punto non vi giungeva). Per eliminare questo dubbio interposi dapprima nel circuito $f\,g$ un grosso filo di piombo, o pure un tubo di Geyssler, ed il suono fu sempre avvertito ugualmente. Pure per esser più sicuro pensai sopprimere il filo di ritorno, pel quale principalmente il suono poteva esser condotto: l'apparecchio così modificato si vede nella fig. 2. La morsetta g, e quindi la lamina c comunicano direttamente col suolo sottoposto, senza alcuna interruzione, e la scintilla lontana scoppia in $e\,f$ fra il conduttore negativo ed una catenina metallica collocata sul suolo per favorire la comunicazione con la terra. Anche disposte così le cose, il suono della lamina fu sempre sentito ugualmente. Quantunque questa esperienza sia abbastanza sicura ed escluda, mi

Fig. 1.

pare ogni dubbio, pure a rendere sempre più certa l'origine del suono, pensai far collocare sul suolo in f in vece della catena metallica una ruota dentata verticale, sulla cui circonferenza poggiava fortemente l'estremo e del reoforo: lasciata inoperosa la macchina elettrica, feci invece girare rapidamente la ruota: naturalmente strisciando i denti sull'estremo del reoforo, si ebbe un suono come nella ruota di Savart: un suono anche più forte dello scoppio della scintilla e che si produce nello stesso posto: ebbene in questo caso, lasciate tutte le comunicazioni come eran poste prima, nessun suono si avverte da chi ascolta in m. Dunque mi pare non vi sia alcun dubbio che i suoni ottenuti nelle precedenti esperienze, sieno la conseguenza di un certo peculiare movimento eccitato nelle molecole della lamina c dalle frequenti scariche elettriche, che l'attraversano. Se l'estremo b del filo invece di fissarlo alla morsetta come si è detto, si tenga a poca distanza dalla lamina c in guisa che le scintille scoppino fra esso e la lamina, il suono diventa più forte e l'orecchio distingue bene il rumore della scintilla dal suono proprio della lamina. Anche allontanando l'estremo del filo dalla lamina fino a non aversi più la scintilla, ma in vece quel particolare soffio elettrico luminoso che si osserva allorchè la scarica con forte tensione si compie con difficoltà per le piccole sporgenze o scabrosità del conduttore, il suono si avverte bene, comunque più debole. Si guadagna un po' nell' intensità del suono collocando il trepiedi che sostiene la lamina su di una cassa sonora. I suoni così eccitati rassomigliano un poco a quelli della Sirena, ovvero a quelli dell'interruttore del Froment, e diventano più acuti sol che si giri più rapido il disco della macchina; di guisa che se gli si dà una gran velocità e poi lo si lascia a se stesso finchè si arresti, in questo caso chi ascolta in m, sente suoni successivamente più bassi, come in una Sirena allo scemare la velocità della corrente d'aria. Il suono cambia anche di tono facendo variare la lunghezza delle scintille, e naturalmente diventa più acuto a misura che queste sono più brevi. Usando una lamina di legno invece della lastra metallica, si ha il suono di una peculiare qualità. Non mi è mai riuscito spargendo la lamina di polvere, anche usando quella di licopodio, aver segno di linee nodali.

Fig. 2.

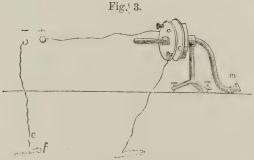



Fig. 3.

Suoni per scarica d' influsso. — Per ottenere i suoni per scarica d'influsso, il che mi pare debba meritare un maggiore interesse, l'apparecchio è stato disposto come nella fig. 3. Nel circuito primario della macchina è posta una lamina circolare di ottone o verticale, sostenuta da un piede coibente, eguale in grandezza, parallela e lontana pochi millimetri dalla consueta lamina c, fissata come al solito all' estremo del tubo sonoro: la lamina o comunica direttamente col suolo sottoposto. Messa in moto la macchina,

le scintille scoppiano in *ef*, ed il suono si fa sentir subito da chi ascolta in *m*, quantunque la lamina *c* non sia attraversata direttamente dalla scarica elettrica. Facendo comunicare la lamina indotta *c* col suolo, il suono diventa manifestamente più forte: cresce anche un poco d'intensità interponendo fra le due lamine una lastra di vetro, decresce rapidamente allontanandole, di guisa che alla distanza di cinque centimetri circa sparisce quasi interamente: cessa del pari facendo che l'estremo *e* del reoforo comunichi affatto col suolo e più non vi sia la scintilla nel circuito primario: il che mi pare, sia dovuto al restare in questo caso la lamina *c* sempre ugualmente attuata, e mancare così la discontinuità dell'azione induttiva. Infine questi suoni cambiano tono per le stesse ragioni dette già innanzi per quelli dovuti a scarica diretta. Volendosi ottenere i suoni dalle corde, basta sostituire alla lamina *c*, fig. 2, una corda d'acciaio tesa sulla cassa sonora di un sonometro, dalla quale naturalmente è isolata. Non appena, messa in moto la macchina, la corda è percorsa dalle scariche elettriche, dà un suono; però così debole che l'orecchio anche appressandovisi molto, non lo avverte: in vece si sente benissimo se si ascolta, come nelle precedenti esperienze, con un cornetto acustico che comunica con un collettore di ebanite, la cui bocca poggia sulla parete superiore della cassa sonora. I suoni che si hanno dalle corde sono più gradevoli e più musicali di quelli che danno le lamine. Del modo poi come varii la loro tonalità al variare le dimensioni delle corde e come si possa ottenere un aumento della loro intensità, usando un microtelefono, mi occuperò in altre ricerche.

Questi esperimenti furono eseguiti nel Gabinetto di Fisica dell'Università di Napoli.

Effemeridi e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell' Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1882.

Memoria del Socio ALESSANDRO BETOCCHI

letta nella seduta del 6 maggio 1883.

(Con una tavola)

Ho l'onore di presentare a questa r. Accademia l'effemeride e la relativa statistica idrometrica del Tevere pel decorso anno 1882. Con essa ha principio il settimo periodo decennale di tale pubblicazione.

Nella detta effemeride, giusta il sistema adottato negli anni precedenti, vengono registrate le altezze del pelo d'acqua del fiume Tevere osservate al mezzodì di ciascun giorno del detto anno tanto all'idrometro presso Orte, quanto a quello di Ripetta; ch'è quanto dire prima e dopo la confluenza dell'Aniene.

In pari tempo presento l'effemeride e la statistica idrometrica dello stesso Aniene relativa al medesimo anno 1882; ossia il registro dell'altezza del pelo d'acqua dell' Aniene osservata all' idrometro posto all' origine dei cunicoli del monte Catillo presso Tivoli.

A complemento poi di queste effemeridi o registri numerici aggiungo, giusta il consueto, le rispettive rappresentazioni grafiche o diagrammi.

Esaminando pertanto questi registri, e considerando il Tevere *in stato di magra* fino che l'altezza del pelo d'acqua non supera metri 6 misurato all' idrometro di Ripetta; *in stato ordinario* quando superando i 6 metri non eccede i metri 8; *in stato d'intumescenza* quando oscilla dagli 8 ai 12 metri; ed *in stato di vera e minacciosa piena* quando il pelo d'acqua del Tevere alla scala tibrometrica di Ripetta supera l'altezza di metri 12, si rileva agevolmente che il Tevere nell'anno 1882 fu *in stato di magra* per 100 giorni; si mantenne *in stato ordinario* durante 232 giorni; fu *intumescente* 33 giorni; ed in 7 soltanto di questi presentò una intumescenza piuttosto rilevante; e cioè nei giorni 29 settembre, 10 ottobre, 6, 7, 8, 9 ed 11 dicembre nei quali l'altezza superò i metri 10.

Contrariamente adunque a quanto, sventuratamente, ebbe luogo nei fiumi delle provincie Venete, i quali nell'anno 1882 presentarono le piene più alte e maggiormente prolungate di cui si abbia ricordo, il fiume Tevere nel 1882 presentò un corso oltremodo mite; talchè nei 61 anni dacchè si eseguiscono le regolari osservazioni quotidiane, l'anno in parola è il quattordicesimo in cui non si ebbe a registrare

verun giorno di *vera piena.* E le stesse *intumescenze* verificatesi nel 1882 furono poche e di poco conto. Persistente invece fu lo *stato ordinario* che perdurò per quasi $^2/_3$ dell'intero anno; mentre lo *stato di magra* si verificò per circa $^7/_{24}$.

Confrontando questi risultati con quelli della statistica generale del sessantennio dal 1 gennaro 1822 a tutto il 31 dicembre 1881, che ebbi l'onore di esporre nell'adunanza del 25 giugno dell'anno decorso, si rileva che classificati i detti anni secondo il numero crescente dei giorni nei quali il Tevere ha corso in stato di acque *magre*, *ordinarie* ed *intumescenti*, l'anno 1882 pel primo titolo occupa il posto 28mo; pel secondo titolo occupa il posto 38mo; e pel terzo titolo il posto 25mo. Mentre poi avuto riguardo all'altezza media del pelo d'acqua verificatasi durante l'intero anno occupa il 21mo posto.

Effemeride del Tevere,
ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo d'acqua del Fiume Tevere all'idrometro di Orte al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1882.

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	1,68	1,48	1,59	1,70	1,84	1,35	1,24	1,16	1,25	1,81	2,27	2,28
2	2,01	1,46	2,30	1,70	1,76	1,34	1,20	1,15	1,32	1,75	1,96	2,21
3	1,77	1,44	2,02	1,69	1,67	1,32	1,38	1,14	1,25	1,65	1,90	2,03
4	1,70	1,43	1,83	1,68	1,60	1,32	1,40	1,13	1,21	1,58	1,84	1,91
5	2,56	1,43	2,33	1,65	1,58	1,32	1,64	1,12	1,13	1,59	1,80	3,00
6	2,47	1,42	2,00	1,64	1,57	1,31	1,35	1,12	1,13	1,76	1,73	4,35
7	2,04	1,42	1,71	1,61	1,57	1,30	1,28	1,32	1,18	1,60	1,69	2,71
8	1,98	1,41	1,65	1,59	1,56	1,30	1,25	1,26	1,46	2,50	1,64	3,49
9	2,14	1,41	1,63	1,58	1,67	1,31	1,23	1,23	1,44	1,68	1,61	2,77
10	1,95	1,40	1,60	1,59	1,57	1,38	1,22	1,20	1,20	1,62	1,60	2,56
11	1,87	1,39	1,59	1,59	1,90	1,38	1,20	1,27	1,80	1,67	1,58	3,34
12	1,81	1,40	1,58	1,63	1,67	1,54	1,20	1,18	2,48	1,80	1,56	2,82
13	1,76	1,40	1,56	1,56	1,58	1,43	1,20	1,16	2,40	1,75	1,67	2,45
14	1,72	1,40	1,53	1,56	1,55	1,35	1,42	1,12	1,87	2,56	1,59	2,23
15	1,68	1,40	1,50	1,56	1,52	1,45	1,27	1,11	1,67	3,34	1,59	2,17
16	1,64	1,40	1,49	1,73	1,53	1,39	1,24	1,55	2,50	2,51	3,61	2,09
17	1,62	1,45	1,47	1,68	1,54	1,33	1,23	1,38	2,42	2,08	4,27	2,00
18	1,60	1,41	1,46	1,85	1,51	1,29	1,21	1,26	2,02	2,52	3,30	1,91
19	1,59	1,40	1,45	1,84	1,49	1,28	1,44	1,22	2,22	2,12	2,44	1,86
20	1,58	1,39	1,45	1,99	1,48	1,28	1,27	1,19	1,80	1,94	2,23	1,82
21	1,57	1,39	1,44	1,71	1,52	1,27	1,21	1,23	1,74	1,83	2,60	1,80
22	1,56	1,38	1,44	1,61	1,50	1,26	1,19	1,20	2,04	1,72	2,64	1,76
23	1,54	1,38	1,50	1,58	1,47	1,26	1,18	1,52	3,00	1,66	2,15	1,76
24	1,54	1,37	3,80	1,56	1,44	1,26	1,28	1,34	3,20	1,64	2,02	2,75
25	1,52	1,37	2,54	1,60	1,42	1,25	1,23	1,26	2,00	1,62	2,00	2,04
26	1,52	1,37	2,16	1,56	1,41	1,24	1,19	1,24	2,52	1,60	2,39	1,89
27	1,51	1,40	2,05	1,60	1,40	1,40	1,18	2,80	3,80	1,59	1,96	1,84
28	1,51	1,69	2,19	1,83	1,39	1,28	1,18	2,18	3,37	1,59	2,10	1,82
29	1,50		2,08	2,35	1,38	1,26	1,17	1,64	2,55	3,02	2,44	1,81
30	1,50		1,87	2,02	1,37	1,25	1,17	1,36	1,94	2,22	2,03	1,78
31	1,49		1,75		1,36		1,17	1,28		3,40		1,76
Sommata	53,93	39,69	56,56	50,84	47,82	39,70	39,02	41,32	59,91	61,72	64,21	71,01
Media	1,74	1,42	1,82	1,69	1,54	1,32	1,26	1,33	2,00	1,99	2,14	2,29
Massima	2,56	1,69	3,80	2,35	1,90	1,54	1,64	2,80	3,80	3,40	4,27	4,35
Minima	1,49	1,37	1,44	1,56	1,36	1,24	1,17	1,11	1,13	1,58	1,56	1,76
Differenza	1,07	0,32	2,36	0,81	0,54	0,30	0,47	1,69	2,67	1,82	2,71	2,59

Effemeride del Tevere,
ossia Registro giornaliero dell' altezza del pelo d' acqua del Fiume Tevere all'idrometro di Ripetta al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1882.

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	6,62	6,15	6,45	6,55	7,36	5,98	5,77	5,61	5,79	7,11	9,01	7,50
2	6,87	6,14	6,27	6,48	6,96	5,97	5,82	5,61	5,77	6,79	7,54	8,01
3	7,08	6,13	7,26	6,43	6,78	5,96	5,82	5,60	5,74	6,59	7,05	7,60
4	6,82	6,09	7,05	6,44	6,65	5,94	5,85	5,60	5,73	6,45	6,92	7,20
5	7,28	6,08	7,21	6,46	6,54	5,93	6,02	5,60	5,69	6,42	6,75	7,20
6	8,23	6,07	7,96	6,31	6,46	5,92	6,14	5,59	5,67	6,43	6,74	10,45
7	7,86	6,07	7,34	6,29	6,40	5,89	5,86	5,63	5,72	6,58	6,55	10,66
8	7,36	6,06	6,98	6,24	6,36	5,88	5,80	5,69	5,66	6,44	6,49	10,45
9	7,27	6,06	6,76	6,18	6,38	5,96	5,76	5,74	5,75	7,47	6,42	10,32
10	7,40	6,05	6,66	6,13	6,53	5,98	5,74	5,71	5,80	6,51	6,38	9,15
11	7,02	6,05	6,50	6,29	6,16	6,00	5,72	5,76	5,73	6,34	6,30	9,07
12	6,87	6,04	6,41	6,31	6,79	6,02	5,70	5,73	6,04	6,29	6,29	10,08
13	6,74	6,04	6,35	6,35	6,47	6,06	5,68	5,67	7,67	6,38	6,28	9,00
14	6,65	6,03	6,29	6,22	6,33	6,02	5,71	5,67	7,40	6,20	6,39	8,45
15	6,58	6,03	6,25	6,17	6,28	5,93	5,73	5,64	6,46	10,18	6,31	8,18
16	6,51	6,02	6,20	6,35	6,25	5,98	5,75	5,63	6,77	8,84	7,45	7,93
17	6,42	6,02	6,17	6,51	6,34	5,93	5,72	5,76	8,11	7,76	8,88	7,73
18	6,43	6,03	6,10	6,38	6,33	5,88	5,80	5,93	7,75	9,27	11,61	7,53
19	6,37	6,03	6,12	6,53	6,28	5,87	5,75	5,74	7,34	7,98	9,10	7,28
20	6,37	6,02	6,11	6,57	6,24	5,82	5,74	5,69	7,77	7,31	8,10	7,23
21	6,34	6,01	6,10	6,74	6,32	5,82	5,71	5,64	7,12	6,91	8,01	7,13
22	6,32	5,99	6,12	6,57	6,38	5,82	5,70	5,64	7,00	6,69	8,40	7,04
23	6,30	5,98	6,10	6,40	6,30	5,81	5,67	5,91	7,40	6,59	8,29	7,00
24	6,27	5,97	6,22	6,33	6,22	5,80	5,66	6,06	8,08	6,51	7,70	8,55
25	6,25	5,96	9,08	6,29	6,18	5,78	5,72	5,73	8,63	6,50	7,45	8,49
26	6,24	5,98	7,69	6,36	6,13	5,78	5,66	5,67	7,00	6,44	7,34	7,68
27	6,22	5,98	7,17	6,27	6,11	5,78	5,65	5,73	7,83	6,36	7,60	7,40
28	6,20	6,08	7,01	6,78	6,09	5,82	5,65	7,87	9,68	6,33	7,22	7,20
29	6,20		7,13	7,82	6,06	5,83	5,63	6,91	10,18	7,53	7,83	7,12
30	6,17		6,90	8,02	6,02	5,83	5,63	6,16	7,78	8,63	7,66	7,00
31	6,16		6,67		6,02		5,62	5,88		7,71		6,91
Sommata	207,42	169,16	208,63	200,77	197,72	176,99	178,18	180,80	209,06	219,54	224,06	252,54
Media	6,69	6,04	6,73	6,69	6,38	5,90	5,75	5,83	6,97	7,08	7,47	8,15
Massima	8,23	6,15	9,08	8,02	7,36	6,06	6,14	7,87	10,18	10,18	11,61	10,66
Minima	6,16	5,96	6,10	6,13	6,02	5,78	5,62	5,59	5,66	6,20	6,28	6,91
Differenza	2,07	0,19	2,98	1,89	1,34	0,28	0,52	1,28	4,52	3,98	3,33	3,75

Effemeride dell'Aniene, ossia Registro giornaliero dell' altezza del pelo d' acqua del Fiume Aniene all'idrometro esistente all' imbocco del cunicolo sinistro presso Tivoli, al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1882.

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	1,35	1,35	1,40	1,30	1,40	1,30	1,35	1,40	1,30	1,75	1,45	1,40
2	1,30	1,35	1,45	1,30	1,40	1,30	1,35	1,35	1,30	1,70	1,45	1,40
3	1,30	1,35	1,70	1,30	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,50	1,40	1,40
4	1,35	1,30	1,85	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,50	1,35	1,40
5	1,45	1,30	1,80	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,45	1,35	1,50
6	1,60	1,30	1,90	1,30	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,40	1,35	2,00
7	1,50	1,30	1,90	1,30	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	2,20
8	1,40	1,35	1,60	1,30	1,35	1,40	1,30	1,35	1,35	1,35	1,35	2,45
9	1,35	1,35	1,50	1,30	1,40	1,40	1,30	1,30	1,35	1,35	1,35	2,55
10	1,35	1,35	1,50	1,30	1,40	1,35	1,30	1,30	1,35	1,35	1,35	1,40
11	1,35	1,35	1,40	1,35	1,35	1,35	1,30	1,30	1,35	1,35	1,35	1,40
12	1,35	1,30	1,40	1,40	1,35	1,35	1,30	1,30	1,40	1,35	1,40	1,35
13	1,30	1,40	1,40	1,35	1,30	1,35	1,30	1,30	1,40	1,40	1,40	1,35
14	1,30	1,35	1,35	1,40	1,30	1,35	1,30	1,30	1,40	1,40	1,40	1,35
15	1,30	1,35	1,35	1,40	1,30	1,35	1,30	1,30	1,40	1,35	1,45	1,35
16	1,30	1,35	1,35	1,40	1,30	1,30	1,30	1,30	1,45	1,35	1,45	1,40
17	1,30	1,35	1,35	1,40	1 30	1,30	1,30	1,30	1,50	1,35	1,45	1,40
18	1,35	1,30	1,35	1,35	1,30	1,30	1,30	1,40	1,50	1,30	1,45	1,30
19	1,35	1,30	1,35	1,35	1,35	1,35	1,30	1,40	1,60	1,30	1,85	1,30
20	1,35	1,30	1,35	1,35	1,35	1,35	1,30	1,40	1,55	1,30	1,85	1,30
21	1,35	1,30	1,35	1,35	1,45	1,35	1,30	1,35	1,60	1,30	1,95	1,30
22	1,35	1,30	1,40	1,35	1,45	1,30	1,35	1,35	1,65	1,35	1,95	1,35
23	1,35	1,30	1,40	1,35	1,40	1,40	1,35	1,40	1,65	1,35	2,00	1,35
24	1,40	1,35	1,50	1,35	1,40	1,40	1,35	1,35	1,70	1,35	1,95	1,35
25	1,35	1.35	1,50	1,45	1,40	1,40	1,35	1,35	1,75	1,35	2,00	1,35
26	1,35	1.35	1,40	2,10	1,40	1,35	1,35	1,35	1,95	1,35	1,80	1,35
27	1,35	1,50	1,40	2,55	1,30	1,35	1,35	1,35	1,95	1,35	1,70	1,35
28	1,35	1,45	1,35	2,85	1,30	1,35	1,35	1,30	2,00	1,35	1,60	1,35
29	1,35		1,35	2,00	1,30	1,35	1,35	1,30	2,00	1,35	1,55	1,40
30	1,35		1,35	2,00	1,30	1,30	1,40	1,30	1,95	1,40	1,50	1,35
31	1,35		1,30		1,30		1,40	1,30		1,45		1,35
Sommata	42,10	37,55	45,25	45,20	41,90	40,40	41,25	41,45	46,15	43,10	46,80	46,05
Media	1,40	1,34	1,46	1,51	1,35	1,35	1,33	1,34	1,54	1,39	1,56	1,49
Massima	1,60	1,50	1,90	2,85	1,45	1,40	1,40	1,40	2,00	1,75	2,00	2,55
Minima	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,35	1,30
Differenza	0,30	0,20	0,60	1,55	0,15	0,10	0,10	0,10	0,70	0,45	0,65	1,25

Anno 1882.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI ORTE OSSIA INNANZI LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata Met. lin.	Media Met. lin.	Massima Met. lin.	Minima Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	53,93	1,74	2,56	1,49	1,07
Febbraio	39,69	1,42	1,69	1,37	0,32
Marzo	56,56	1,82	3,80	1,44	2,36
Aprile	50,84	1,69	2,35	1,56	0,81
Maggio	47,82	1,54	1,90	1,36	0,54
Giugno	39,70	1,32	1,54	1,24	0,30
Luglio	39,02	1,26	1,64	1,17	0,47
Agosto	41,32	1,33	2,80	1,11	1,69
Settembre	59,91	2,00	3,80	1,13	2,67
Ottobre	61,72	1,99	3,40	1,58	1,82
Novembre	64,21	2,14	4,27	1,56	2,71
Dicembre	71,01	2,29	4,35	1,76	2,59
	625,73				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{625,73}{365} = 1,7143$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 4,27 } differenza massima 3,16.
» minima » » 1,11 }

Anno 1882.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI RIPETTA OSSIA DOPO LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata Met. lin.	Media Met. lin.	Massima Met. lin.	Minima Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	207,42	6,69	8,23	6,16	2,07
Febbraio	169,16	6,04	6,15	5,96	0,19
Marzo	208,63	6,73	9,08	6,10	2,98
Aprile	200,77	6,69	8,02	6,13	1,89
Maggio	197,72	6,38	7,36	6,02	1,34
Giugno	176,99	5,90	6,06	5,78	0,28
Luglio	178,18	5,75	6,14	5,62	0,52
Agosto	180,80	5,83	7,87	5,59	1,28
Settembre	209,06	6,97	10,18	5,66	4,52
Ottobre	219,54	7,08	10,18	6,20	3,98
Novembre	224,06	7,47	11,61	6,28	5,33
Dicembre	252,54	8,15	10,66	6,91	3,75
	2424,87				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{2424,87}{365} = 6,6435$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 11,61 } differenza massima 6,02.
» minima » » 5,59 }

Anno 1882.

STATISTICA DEL FIUME ANIENE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO COLLOCATO ALL'IMBOCCO DEL CUNICOLO SINISTRO PRESSO TIVOLI.

MESI	ALTEZZA MENSILE Sommata Met. lin.	ALTEZZA MENSILE Media Met. lin.	ALTEZZA Massima Met. lin.	ALTEZZA Minima Met. lin.	DIFFERENZE Met. lin.
Gennaio	42,10	1,40	1,60	1,30	0,30
Febbraio	37,55	1,34	1,50	1,30	0,20
Marzo	45,25	1,46	1,90	1,30	0,60
Aprile	45,20	1,51	2,85	1,30	1,55
Maggio	41,90	1,35	1,45	1.30	0,15
Giugno	40,40	1,35	1,40	1,30	0,10
Luglio	41,25	1,33	1,40	1,30	0,10
Agosto	41,45	1,34	1,40	1,30	0,10
Settembre	46,15	1,54	2,00	1,30	0,70
Ottobre	43,10	1,39	1,75	1,30	0,45
Novembre	46,80	1,56	2,00	1,35	0,65
Dicembre	46,05	1,49	2,55	1,30	1,25
	517,20				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{517,20}{365} = 1,4170$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 2,85 } differenza massima 1,55.
» minima » » 1,30 }

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del Fiume Aniene all imbocco dei Cunicoli a Tivoli
durante l'anno 1882
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del Fiume Tevere all'idrometro di Orte
durante l'anno 1882
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del Fiume Tevere all'idrometro di Ripetta
durante l'anno 1882
GENNAJO
FEBBRAJO
MARZO
APRILE
MAGGIO
GIUGNO
LUGLIO
AGOSTO
SETTEMBRE
OTTOBRE
NOVEMBRE
DECEMBRE
Lit. Martelli Roma

Osservazioni stratigrafiche sui dintorni di Serravezza.

Memoria di CARLO DE STEFANI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 17 giugno 1883.

È noto come in quella parte della catena metallifera che comprende le Alpi Apuane, sotto ai calcari liassici ed infraliassici, e frapposti a due grandi serie di schisti cristallini stieno quegli strati di calcare che racchiudono i dovunque celebri marmi saccaroidi, statuarî ed ornamentali. Il prof. Paolo Savi maestro dei geologi toscani, aveva sempre considerato gli schisti di Ripa e dei monti vicini come appartenenti alla serie degli schisti superiori al calcare marmoreo, altri ed in particolare il Cocchi, hanno invece ritenuto l'anteriorità di essi di fronte al marmo. A schiarire le questione, anche per dar luogo a verificare quanto sarò per dire, converrà fare una breve descrizione delle località. A chi dalle stazioni ferroviarie di Pietrasanta o di Querceta muova verso Serravezza, si presenta un ampio anfiteatro di monti; a destra sono i colli di Solaio e di Capriglia, i quali racchiudono il canale o piccola valle di Piastra (poichè nelle Alpi Apuane le valli sono appellate canali), a sinistra sono i colli di Ripa, di Strettoia e di Palatina; nel fondo si apre uno stretto varco la valle di Serravezza o della Versilia. Da un lato l'ingresso della valle è limitato dalle scoscese rupi di Corvaia le quali unitamente ai colli di Ripa e di Strettoia si connettono, da prima col monte Folgorito, quindi colle masse marmoree del Carchio e dell'Altissimo, in modo che ne viene formata tutta la parte destra occidentale della valle della Serravezza e di quella della Serra che ne è il prolungamento; dal lato destro per chi va al paese di Serravezza, sinistro della valle, è il colle del Castello, formato di roccia schistosa che si stacca dal monte marmoreo di Ceragiola e della Costa, e sbarra il corso del torrente costringendolo a fare una brusca svoltata; poco più in su si avanza in basso un altro sperone di schisto detto della Saldatoia o dell'Uccelliera dietro del quale è situata Serravezza. Questo industrioso paese è costruito interamente sulla roccia schistosa e sta come in un vertice dal quale partono tre vallate, cioè quella del torrente Vezza o Versilia ad oriente, quella del torrente Serra o di Rimagno a settentrione e quella grande della Serravezza che riunite tutte le acque del bacino le conduce al mare verso mezzogiorno. Lasciando da parte la Vezza e risalendo la Serra lungo la strada carreggiabile, detta dell'Altissimo, poco sopra Serravezza vediamo alla sinistra del torrente dei massi calcarei i quali si fanno più

frequenti quanto più ci avviciniamo al paese di Rimagno, e sono caduti dall'alto, da Rio e da Giustagnana dove esistono alcune cave di bardiglio: poco sopra Rimagno, alla destra del torrente e per conseguenza dalla parte opposta a quella della strada è un gruppo di case e di edifizî detto il Malbacco; dipoi si trovano dei grandiosi massi e scassi di frammenti di marmo detti nel vernacolo *ravaneti*, i quali derivano, a sinistra dalle cave del bardiglio della Cappella che, come il bardiglio di Rio, apparisce a guisa di massa isolata fra gli schisti, e a destra dalle cave dei marmi bianchi e degli statuarî di Trambiserra che stanno come mandorla apparentemente limitata da ogni parte da schisti. Continuando la strada e oltrepassate alcune case nel luogo detto la Desiata, si giunge per ultimo di fronte alla colossale mole calcareo-marmorea del monte Altissimo donde ha suo principio la vallata.

Gli schisti del Canal di Piastra e di Capriglia dopo che il Savi ne determinò la stratigrafia sono stati considerati come superiori al calcare salino perchè infatti si frappongono tra il marmo di Solaio e monte Costa, e tutta la serie dei calcari superiori spesso cavernosi come il grigio cupo infraliassico, il rosso ed il grigio chiaro liassici: tratti dalle stesse apparenze, il Savi, e come lui il Puggaard, ritennero essere superiori al marmo anche gli schisti di Corvaia, di Ripa e di Strettoia sopra ai quali stanno i calcari cavernosi di Palatina, di Porta, e di M. Tignoso: Cocchi invece avendo esaminato presso Strettoia alcuni strati di calcare bianco saccaroide, ritenne che questo calcare fosse un vero e proprio rappresentante degli strati marmorei di Carrara, di Serravezza e delle altre note località e che la serie degli schisti sottoposti al medesimo, vale a dire gli schisti di una parte del paese di Strettoia e quelli di Ripa e Corvaia ecc., fossero realmente non superiori ma inferiori al piano geologico del marmo. Solo in apparenza essi schisti unitamente col marmo di Strettoia potevano secondo il citato geologo sembrare sovrapposti al marmo della Costa di Serravezza ma nel fatto non si trattava se non di una deposizione sedimentaria di ambedue le masse marmoree di Strettoia e della Costa avvenuta trasgressivamente sopra le testate degli schisti antichi i quali erano già stati prima sollevati e denudati dalle acque. Quanto ai marmi della Cappella e di Trambiserra, il Savi li suppose nella loro deposizione sedimentale originaria, regolarmente interposti fra le due masse degli schisti, gli inferiori cioè ed i superiori del M. Folgorito in continuazione a quelli di Ripa e di Corvaia; senonchè avendo osservato lungo tutta la pendice del monte della Cappella fino in basso dei massi marmorei colossali addossati gli uni sugli altri in modo che quasi apparivano uno strato non interrotto, per spiegare come mai la testata di questo strato calcareo andasse a battere nel letto del torrente, contro lo schisto inferiore al marmo della opposta Trambiserra, ammise una faglia seguente la direzione del torrente medesimo per la quale il marmo della Cappella era rimasto abbassato appetto a quello di Trambiserra. Puggaard indotto dall' osservazione di alcune breccie aveva appellato cavernoso il marmo della Cappella e di Rio e gli pareva che si fosse sollevato a guisa di diga fra strati di schisto superiore al medesimo. Cocchi per ultimo, osservando queste masse di Rio, della Cappella e di Trambiserra come quelle del vicino Carchio isolate in mezzo a schisti, credè trovarvi una riprova della sua opinione sulla perfetta discordanza fra gli schisti antichi ed il calcare marmoreo e vide quivi pure l'esempio di strati marmorei deposti nel fondo di depressioni

dell'antico mare il cui letto era formato dagli schisti antichi qua e là ancor sollevati sopra il piano orizzontale di esso.

Il Savi notò come nelle Alpi Apuane ed in tutta la catena metallifera le roccie siano state sollevate in diverse zone elissoidali, e questo fatto è posto in chiaro dall'esame oculare delle singole località: nella valle di Serravezza, che chiamerò col nome più corto di Versilia, si ha l'esempio appunto di un sollevamento a guisa di cupola, di maniera che gli strati sono disposti intorno ad un nucleo centrale comune, l'uno esteriormente all'altro in curve concentriche più o meno ellittiche sicchè dall'interno della cupola di sollevamento o elissoide andando verso l' esterno si passa successivamente dagli strati più antichi a quelli più recenti. Il centro dell'elissoide versiliese è nella Valle del Giardino che dal monte Altissimo scende verso Ruosina capoluogo del comune di Stazzema, e tutt'all'intorno si dipartono gli strati successivi a guisa di manto non interrotto: la loro direzione in quella parte che sono per esaminare e che è la occidentale dell'elissoide è prevalentemente NO a SE.

La parte inferiore degli strati schistosi antichi è costituita da una grande varietà di roccie non calcarifere a base di quarzo e di mica: segue una roccia assai interessante perchè essendo abbastanza caratteristica può servire di orizzonte in quelle sì oscure regioni geologiche; è questa un calcare ordinario quarzoso con falde di schisto nero, compatto, opaco, con faccie cristalline spatiche, di colore grigio azzurrognolo quasi bardiglio e con vene di dolomite spesso cristallizzata in magnifici romboedri primitivi (Canale delle Lame). Esso calcare schistoso in strati di circa 3 metri mi fu per la prima volta indicato dal dotto naturalista sig. Emilio Simi al Pian di Lago nel monte Corchia e sotto gli schisti delle miniere di mercurio presso Levigliani: successivamente tanto io come lui lo abbiamo ritrovato in diverse altre località, e per non citare se non quelle che direttamente m'interessano dirò che lo abbiamo seguitato nel lato occidentale dell'elissoide lungo tutta la valle di Rimagno o della Serra. Da prima apparisce lungo la strada costruita da Michelangiolo e da Giovan Bologna, nel canale di Triglia sotto il marmo della Polla e di Vincarella nel monte Altissimo; quivi la massa ha direzione da sud-sud-est a nord-nord-ovest con inclinazione di 45° sull'orizzonte e traversa il corso superiore della Serra alzandosi fin verso le criniere che chiudono la destra della valle: continuando la sua curva, attorno al centro dell'elissoide con una direzione quasi costante da sud-ovest a nord-est si immerge sotto il manto calcare che si estende fra monte Altissimo e monte Carchio, e sotto i marmi di quest'ultimo monte; scende fin verso Trambiserra, e presso la Desiata torna a traversare in basso la Serra ricomparendo alla sinistra del torrente nel canale delle Lame sotto i marmi della Cappella, e quindi nel canale tra Fabiana e Giustagnana e più oltre sotto i marmi di Rio, della Cappella e di Trambiserra. Sopra a questo calcare schistoso sta uno schisto più o meno compatto nero lucente nel quale sogliono presentarsi delle superfici di sgusciamento analoghe a quelle dell'antracite: esso tinge le dita e traccia dei segni sulla carta; per questi fatti i naturalisti l'hanno considerate come vera antracite o come *ampelite grafica*, sebbene alcune analisi ordinate dal sig. dott. D'Achiardi sopra tale schisto proveniente dalle miniere del Bottino conducessero per un certo tempo a credere non si trattasse d' altro se non di schisto straordinariamente compenetrato da ossido di ferro. Il fatto è che questa

formazione negli strati schistosi antichi occupa una plaga abbastanza determinata e la si ritrova sotto il monte Corchia come sotto il monte Altissimo nella valle di Rimagno. Superiormente sono schisti con aspetto di ardesie facilmente friabili, micaschisti, cloritoschisti, schisti a base d'oligisto, grauwake e più generalmente roccie con aspetto di *gnéiss*. I materiali metallici i quali in vene o come prodotti di metamorfismo predominano nelle roccie che abbiamo citate, sono solfuri di rame e di zinco, solfuri e solfoarseniuri di ferro, solfuri e solfoantimoniuri di piombo argentiferi (Bottino, Argentiera, pendici del monte Corchia), solfuro di mercurio e mercurio nativo (Levigliani), siderose, quarzo, clorite e albite (Bottino, Argentiera, Levigliani, pendici del monte Corchia), magnetite (Falcovaia, Castagnaia presso la Cappella), ottrelite (Levigliani) ecc. Sopra la serie degli schisti antichi stanno le masse calcaree dalle quali si estraggono i marmi sì preziosi, ma generalmente il passaggio dallo schisto cristallino al calcare ordinario detto *grezzone* e al calcare cristallino è, non brusco, ma insensibile e graduato. Le parti superiori degli schisti contengono degli strati con particelle calcaree e ben anco dei cipollini il cui calcare, come alla Vargine sotto il monte Corchia è vagamente colorato in roseo; gli strati inferiori del marmo alla loro volta sono spesso veri calcischisti intersecati da straterelli schistosi. Qualche volta per es. alle Frane sotto il monte Ornato e sotto il monte Corchia la roccia schistosa cristallina o gneissica perde ogni indizio di stratificazione, diviene compatta e durissima e si forma a modo di protuberanze o anche di filoni, come alle Frane, che fanno subire contorsioni e ripiegamenti agli strati inferiori del calcare, il quale a contatto con quella roccia nel monte Corchia è ripieno di bei cristalli di albite porfiricamente dispersi nella massa.

Fra gli strati degli schisti cristallini antichi e i sovrastanti marmi in tutto l'elissoide versiliese la concordanza esiste perfetta salvo dove sono intervenuti alcuni movimenti posteriori alla deposizione degli strati di ambedue le roccie. Oltre al fatto di questa concordanza che proverebbe come non fossero seguite alterazioni nel fondo delle acque le quali per la prima volta depositarono i calcari, potremmo soggiungere che il lento passaggio dagli strati schistosi ai calcari, e la loro alternanza starebbero ad attestare come non vi fosse epoca di lunga intermittenza e di stazionarietà durante la quale si mutarono le condizioni delle cose, per cui materiali diversi calcarei dovevano depositarsi in luogo di quelli che costituivano gli schisti; ma la deposizione degli strati fosse continua e la condizione delle cose si rinnovasse lentamente e a poco per volta. Anzi per tutta quella lunga epoca durante la quale si formò il calcare che fu o divenne marmoreo, la deposizione degli schisti non cessò mai totalmente poichè frequenti ne vediamo le alternanze di più o meno piccoli straterelli, nel calcare, come, per non citare se non fatti dell' elissoide versiliese, gli schisti inclusi fra due serie di calcare marmoreo presso le miniere di Stazzema; gli schisti metamorfosati con *Phillite* posti fra il grezzone e il marmo al Pioto del Lupo, in Val di Combra ed in altri luoghi del monte Corchia e del monte Altissimo, poi le madrimacchie dei marmi statuarî del Corchia e dell' Altissimo, le particelle schistose interposte ai bardigli di Solaio e di Vitoio che assumono quasi aspetto di lavagna, e finalmente la serie dei cipollini della valle del Cardoso e specialmente della Porta e delle rupi del Venaio che fanno passaggio agli schisti superiori. La

concordanza degli schisti antichi col calcare marmoreo l'ho affermata perchè gli strati di quelli e di questo hanno sull'orizzonte una direzione ed una inclinazione comune: si ritiene è vero che qualche volta la fissilità derivante dal metamorfismo riesca a mascherare anche totalmente e a falsare le vere linee di deposizione degli strati, ma non è il caso nel fatto presente; gli strati apparenti corrispondono veramente cogli strati reali, vale a dire il parallelismo dei materiali deposti e di natura diversa, che io considererò nei suoi estremi, cioè calcarei e argilloso-schistosi o arenacei si confonde anzi dà luogo al parallelismo delle linee di fissilità e di divisione: il materiale calcareo dei cipollini e il calcare bardigliaceo che ho già notato incluso negli schisti antichi seguono la direzione appariscente degli strati, e la direzione delle loro masse è sempre parallela e a distanza eguale dalle masse dei calcari marmorei sovrastanti. Con ciò viene ad essere chiarita la disposizione del calcare marmoreo come anello concentrico tutto intorno agli strati degli schisti antichi.

La cintura marmorea infatti si estende continua intorno all'elissoide, per il monte Altissimo, monte Vestito, e monte Lievora in Valle d'Arni, monte Corchia, monte Alto, la Madonna del Piastraio, le Mulina, le rupi del Venaio, la Porta sopra il canale di Castagnola, l'Argentiera, S. Barbera e fin sotto il monte Ornato. Fra il monte Ornato ed il monte Costa nell'alto dei canali di Solaio e di Vitoio appare rotta la continuità. Il fatto è che le roccie schistose le quali costituiscono il piano sinistro del canale delle Frane fino a monte Ornato e la parte superiore del canal di Piastra insieme col calcare marmoreo sottostante a Vitoio, posano i loro fianchi con inclinazione contraria sui fianchi degli schisti antichi e del calcare del monte Costa. Oltrepassata la interruzione di continuità prodotta da questo movimento negli strati calcarei si perviene alla massa marmorea del monte Costa che comprende le varie località designate col nome di Vitoio, Solaio, il Castello, Ceragiola, la Saldatoia, la Costa di Palazzo; e poi alle masse di Rio, della Cappella, di Trambiserra e per ultimo del monte Carchio il quale per una serie non alta di calcari ordinarî si ricollega col monte Altissimo. Tutte queste masse marmoree dal monte Costa al monte Carchio appaiono perfettamente isolate fra le roccie schistose, ma l'esame della loro condizione stratigrafica ci dimostra intanto come esse a somiglianza degli altri calcari della zona orientale dell'elissoide sieno state depositate in concordanza cogli schisti inferiori ed abbiano gli strati loro perfettamente paralleli e coincidenti con questi.

Non è facile farsi a prima vista un criterio esatto della stratificazione dei calcari marmorei; il Cocchi ha notato come nei marmi le falde e le linee di divisione si manifestino in più sensi oltre a quello della stratificazione e ha riferito il nome vernacolo di queste linee di frattura che si incrociano fra di loro: nondimeno la vera stratificazione si manifesta, all'ingrosso pella diversa corrosione prodotta dagli agenti atmosferici sugli elementi calcarei che costituiscono gli strati, e la si verifica poi con esattezza quando si ponga mente alla diversità dei materiali depositati e cioè alla direzione delle particelle schistose o micacee, alla colorazione diversa del calcare, alla direzione secondo la quale esso si sfalda con facilità senza fratturarsi ed in particolare ai bardigli che pell'alternanza di parti eterogenee chiaramente palesano la stratificazione loro.

Volendo esaminare ad una ad una le particolarità delle masse calcaree del monte

Costa, di Rio, della Cappella e di Trambiserra, comincierò dal calcare del monte Costa (V. fig. 1). È desso diretto da sud-est a nord-ovest; ha il suo spessore maggiore nella parte più alta e più meridionale e si va assottigliando verso settentrione alla Saldatoia dove sembra che finisca d' un tratto, limitato dal fianco sinistro del torrente Vezza. Il Cocchi (*Lezioni sulla geologia dell' Italia centrale*, pag. 52, tav. II, fig. 11; *Della vera posizione stratigrafica dei marmi saccaroidi delle Alpi Apuane.* Bollettino del r. Comitato geologico d'Italia n. 5 e 6, pag. 119, fig. 1) e Coquand (*Sur les terrains stratifiés de la Toscane.* Bulletin de la Société géologique de France, t. II, série II, pag. 155, pl. III, fig. 8) lo rappresentarono come se le sue testate si basassero discordanti sulle testate degli schisti antichi. A proposito del Coquand è opportuno osservare come da quanto risulta dalla sua Nota sui terreni stratificati della Toscana egli non faceva distinzione fra le serie degli schisti superiori e quella degli schisti inferiori al calcare marmoreo ma ambedue le confondeva in un solo piano continuo, al quale, coerentemente alle idee del prof. Savi dava il nome di Verrucano: d'altra parte osservando come il calcare marmoreo sta internato e racchiuso in quel piano non poteva se non supporre che il medesimo discordasse dal Verrucano e si fosse depositato in profonde cavità prodotte da erosioni e da sollevamenti preesistenti in quella formazione: si è perciò che delle masse marmoree del monte Costa, di Trambiserra e del monte Altissimo diede quella spiegazione che si vede nelle figure 4, 5, 6 della citata Nota. Quanto al monte Costa è un fatto che sotto alla mole calcarea alla Saldatoia non sono visibili le testate degli schisti inferiori, nè lungo il letto del fiume, nè lungo la strada presso il Palazzo Mediceo, ma in quel tratto che va da questo Palazzo fino di fronte al Ponte Angelini è esclusivamente il calcare che si sprofonda sotto l'orizzonte e se non vi sono aperte cave ma vi è un ammanto di vegetazione ciò deriva perchè esso calcare è frammentario o se compatto è marnoso, ordinario, quale fu già descritto dal Simi (*Saggio corografico della Versilia*) sotto il nome di *pietra della Saldatoia*: alcuni strati di questo calcare compatto e giallognolo si presentano con molta evidenza sotto la pescaia o serra che è di fianco al Palazzo e con angolo molto acuto tagliano la direzione del torrente, sul fianco destro del quale, che è quasi sempre vestito di folta selva e ricoperto di terra e di massi caduti, si trovano frammenti grandi e piccoli del calcare giallognolo dimostrando così che quivi continua. Nel letto del torrente, dal Ponte Angelini in giù fino alla sua congiunzione colla Serra, si presentano in due o tre punti degli affioramenti di strati schistosi ma questi sono superiori al marmo come dirò poi.

a. Alluvioni — *s.* Schisti superiori — *c.* Calcari marmorei — *s. c* Schisti inferiori

La fig. 1 è nella proporzione di 1 a 25 mila per le lunghezze e per le altezze.

Passando a parlare del calcare di Rio nel quale sono aperte alcune cave di bardiglio cupo conviene tener conto di alcuni studî che vi ha fatti il Puggaard (*Sur les calcaires des Alpes Apuennes et du M. Pisano.* Bul. de la Soc. géologique de France. An. 1859-60, pag. 199). La massa calcarea è limitata a mezzogiorno dal canale di Giustagnana e a settentrione da quello di Rio, e quantunque si arresti ad una certa altezza sulla pendice del monte pure dei massi rotolati di breccia formata di calcare bianco e di bardiglio scendono come ho già detto in principio fino a Rimagno sulla Serra: gli schisti inferiori apparentemente meno metamorfosati di quelli dell'Altissimo e del monte Corchia sono sottoposti a contorsioni ed a ripiegature locali, ma la direzione generale ne è da sud-est a nord-ovest d'accordo con la direzione di tutte le roccie in questa parte dell'elissoide. Salendo il canale di Giustagnana fino a questo paese si vedono tutti i fatti che ha esattamente notati il Puggaard: il letto del piccolo canale sembra solcare la criniera di un anticlinale, poichè gli strati schistosi a destra sono inclinati da nord-ovest verso sud-est e quelli a sinistra sui quali riposa il calcare lo sono da sud-est verso nord-ovest; al paese di Giustagnana e verso il canale di Rio, nella costa del monte sopra alle cave gli strati dello schisto sono inclinati da 45° fino a 80° sull'orizzonte immergendosi da ovest verso est e da ovest-nord-ovest verso est-sud-est apparendo assolutamente sovrapposti al calcare. Dall'osservazione di questi fatti Puggaard dedusse che quegli schisti appartenevano alla serie (*giurese* secondo lui) superiore al calcare marmoreo, e che questo era emerso sopra i medesimi a guisa di dica rovesciandosi sugli schisti del fianco destro del canale di Giustagnana, i quali potevano sembrare stratigraficamente inferiori ma erano pur essi superiori al calcare; in una parola ritenne il calcare di Rio come pure quello identico della Cappella un calcare cavernoso eruttivo, tanto più che all'aspetto presentava frammenti di marmo bianco o di bardiglio inclusi in una pasta cavernosa e vacuolare, ferruginosa. Ma veramente il calcare che tanto a Rio come alla Cappella ha un simile aspetto cavernoso e dal quale egli trasse simili conclusioni non è se non una vera e propria breccia di frammenti di varia grossezza dei calcari di quei luoghi avvolti da concrezioni spatiche ferruginose di formazione affatto recente come si vede avvenire nei ravaneti e altrove e come fanno fede le conchiglie (*helix*, *cyclostoma*) e le ossa di mammiferi che vi sono state rinvenute la qual cosa attesta anche il Simi nel citato *Saggio corografico.* Quegli schisti poi che appaiono sovrapposti al calcare sono semplicemente brani degli schisti inferiori nei quali è accaduta una compressione ed un rovesciamento; infatti chi li segua risalendo il monte sia a Rio sia a Giustagnana li vedrà a poco a poco raddrizzarsi, divenire verticali, quindi inclinarsi in direzione opposta ed assumere poi definitivamente la direzione e la inclinazione ordinaria est-nord-est, ovest-sud-ovest.

Schisti superiori al marmo non ve ne sono nè a Rio e Giustagnana nè alla Cappella (fig. 2) la quale località scenderò ad esaminare.

Quivi pure, al fianco destro del canale di Fabiana, gli schisti che reggono il calcare sono molto contorti e si alternano inclinazioni diverse da sud-est a nord-ovest e da nord-est a sud-ovest ecc. Il Savi, come altrove ho accennato, credette che gli strati del marmo discendessero regolarmente lungo il pendìo fino al letto del torrente, ma considerando bene non si tratta che di grossi *blocchi* isolati o più spesso

s. Schisti superiori — *c.* Calcari marmorei — *d.* Detriti superficiali di Bardiglio della Cappella — *s. c* Schisti inferiori e cipollino inclusovi

La fig. 2 è nella proporzione di 1 a 25 mila per le lunghezze e per le altezze.

ammassati gli uni sugli altri, formati di breccia cementata da spato calcare o, come dicono i cavatori, da *colaticcio* e che riposano sui fianchi del monte come terreno di trasporto. È da questa formazione brecciosa, quella dal Puggaard denominata calcare cavernoso, che si escava il bardiglio cupo particolare della Cappella e di Rio, il quale è sì prezioso ed il cui prezzo va sempre aumentando: i cavatori dicono che *nasce come i funghi*, cioè a dire lo si trova in blocchi grandi e piccoli, sparsi in una matrice di *colaticcio*. Della faglia lungo la direzione della Serra, che il Savi addusse per interpretare la posizione della massa di questo calcare, che egli riteneva formasse veri strati, inferiore a quella di Trambiserra, non si trovano traccie perchè dovunque vedonsi gli strati passare continui dall'una parte all'altra del torrente: piuttosto ritengo col Cocchi che il calcare della Cappella sia la diretta continuazione di quello di Trambiserra, e che soltanto le corrosioni delle acque l'abbiano separato come lo è attualmente dalla valle intermedia. Infatti chi risale alla Chiesa detta la Cappella vede che il bardiglio cupo sta ivi in veri strati continui la cui direzione ed inclinazione si può verificare concordante con quella degli schisti sottostanti: il bardiglio vi è perciò in grandi saldezze, ne è ravvolto nel colaticcio e se non vi sono state aperte delle cave in grande, ciò deriva non perchè ne manchi il desiderio ma perchè la proprietà dei terreni vi è troppo divisa e manca l'accordo dei padronati che sarebbe necessario per fare reciproche concessioni di vie e di *ravaneti*. La massa di questo calcare della chiesa della Cappella e quella del calcare di Trambiserra sono l'una di fronte all'altra e si corrispondono anche nella direzione degli strati che si immergono dalla Cappella verso Trambiserra, e nell' altezza dei medesimi sopra il livello del torrente. Scendendo dalla Cappella lungo il limite del calcare, particolarmente a settentrione pel canale delle Lame, giunti ad un certo punto che è alquanto superiore, come deve essere, al limite inferiore della corrispondente massa di Trambiserra si vede troncarsi la continuazione ed uniformità degli strati; dei lembi di questi si sono come accasciati frantumandosi e assumendo direzioni diverse quasi che d'un tratto fosse mancato un sostegno alla loro ordinaria e primiera posizione; così ha principio la formazione brecciosa che io non anderò a supporre per quali cause ed in quali maniere si sia originata, ma l'acqua vi deve avere avuto gran parte ed in epoca relativamente recente.

A Trambiserra (fig. 2, 3) località nota per i bei marmi bianchi, simili talvolta allo statuario, non esistono grandi masse di breccia analoghe a quelle di Rio e della Cappella: ivi sono chiaramente manifeste le linee di divisione e di frattura che intersecano in direzioni diverse il calcare e che danno ingannevoli apparenze di stratificazione. Le più appariscenti di queste linee o piani hanno quivi una direzione

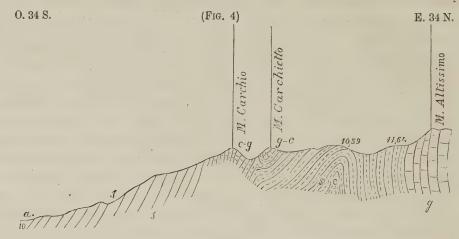
ovest-sud-ovest verso est-nord-est cioè perpendicolare a quella dei veri strati, mentre alla Cappella l'hanno da sud-sud-ovest a nord-nord-est. Invece di un vero e proprio bardiglio vi è un marmo bianco con venature grigio-cupe simili a quelle del bardiglio; la direzione degli strati si manifesta dalla direzione di quelle venature e dai piani di sfaldatura derivanti dalle particelle eterogenee schistose che in linee parallele dividono la roccia; la stratificazione apparisce più manifesta nella parte più esterna e superiore del calcare la quale mal può essere esaminata da chi non ardisca camminare sugli scoscesi e dirupati pendii che sono colà fuori dei battuti sentieri: ivi sono degli strati, benchè di non grande potenza, di calcare generalmente compatto e grigio-scuro o anche salino interpolato da straterelli di schisto rasato; e questa alternanza di elementi schistosi e calcarei palesemente manifesta la direzione degli strati, i quali non riposano già sulle testate degli schisti, nè formano angolo colla direzione di questi; ma bensì si continuano e s'immergono verso l'interno del monte inclinati da est-nord-est a ovest-sud-ovest. Qui come in tutta la Versilia il calcare marmoreo riposa in modo concordante e coincidente sugli strati dello schisto inferiore, e nel modo medesimo sorregge gli strati dello schisto che è superiore, non solo materialmente nella scala delle altezze salendo il monte, ma anche stratigraficamente. Rimane perciò provata la interposizione concordante del calcare di Trambiserra fra le due serie degli schisti, la inferiore e la superiore: ma sta sempre la questione del come sieno in relazione fra loro queste due serie di schisti in quei tratti dove il calcare non apparisce visibilmente fra loro interposto; e tale questione sorge del non avere fatte fin qui certe osservazioni delle quali ora farò cenno.

cc. Calcari cavernosi— *s.* Schisti superiori e marmo di Strettoia. — *c.* Calcari marmorei — *s. c* Schisti inferiori e cipollino inclusovi

La fig. 3 è nella proporzione di 1 a 50 mila.

Qualora si portino le indagini sul limite meridionale della massa di Trambiserra nella pendice sinistra del canale detto di Laura si vede oltre a questa pendice, continuare il calcare ordinario (fig. 4). Nel fianco destro del canale dianzi indicato sopra una rupe denominata il Pitone sta incassato fra gli schisti un calcare grossolano, ferruginoso, forse alquanto marnoso e talora grigio-cupo, compatto e con straterelli di schisto nel qual caso è dato conoscere la direzione predominante degli strati che si manifestano al solito concordanti con quelli dello schisto inferiore e del superiore: l'altezza di questa massa calcarea è di 30 o 40 metri circa, non certo eguale a quella del contiguo marmo di Trambiserra ma pure non piccola; le fessure predominanti inclinate circa da sud-sud-ovest a nord-nord-est e quasi parallele a quelle di Trambiserra le danno a prima vista un'apparenza di stratificazione discordante da quella degli schisti e quasi verticale ai medesimi. Diminuendo successivamente di spessore essa continua nelle rupi a mezzogiorno, ed al principio del canal di Rezza se ne può chiaramente studiare la serie stratigrafica; il calcare

proprio forma uno strato ben determinato ma poco alto; è molto ferruginoso, gialliccio e con granelli di quarzo: superiormente si interpongono degli straterelli in-

a Alluvioni — *s* Schisti superiori — *g-c* Grezzoni e calcare marmoreo — *s. c* Schisti inferiori e cipollino inclusovi — *g* Grezzoni.

La fig. 4 è nella proporzione di 1 a 50 mila.

terrotti di schisto rasato verde, cloritico, quindi per un tratto di 4 o 5 metri alternano strati di questo schisto con straterelli di calcare marnoso, tanto ferruginoso che assume un colore tabacco scuro: è la medesima successione e la medesima condizione di strati che trovasi in un punto diverso dell'elissoide sotto il monte Ornato nel canale delle Frane. Il canale di Rezza trascina in tutto il suo corso dei ciottoli più o meno voluminosi di calcare ferruginoso ma invece di scendere dalla sua origine in linea retta verso la Serrà piega un poco a mezzogiorno dimodochè forma quasi un arco il quale è sotteso dagli strati dello schisto e da quelli del calcare, che dopo avere traversato il canale nella parte superiore, come ho notato, lo raggiungono di nuovo nella sua parte inferiore e ne seguono il nudo letto presso l'imboccatura nella Serra, al Malbacco sopra Rimagno. Quivi i cipollini sono in piccoli straterelli ed il calcare non forma se non uno strato variabile da un metro a mezzo metro il quale benchè interposto al solito concordemente fra gli schisti non dà luogo ad una massa uniforme nè con piani di schistosità paralleli, ma ora si strozza, ora si allarga e si direbbe che abbia subìto qualche modificazione particolare la quale non sia il suo stato originale: lo raggiungono, traversando gli schisti sottostanti, dei filoni di quarzo con oligisto il quale nel contatto col calcare viene sostituito da grossa quantità di siderose. Dal Malbacco in poi la direzione degli strati coincide con quella del torrente Serra il cui alveo per essere ricoperto di sassi e di macerie non può essere esaminato, ma presso Rimagno essi passano alla sinistra ed ingrossandosi danno origine al calcare delle cave di Rio, donde ritornando ad un minimo spessore e traversando l'estremo lembo del colle di Pancola sotto alcune delle case più alte di Serravezza raggiungono di fianco al Palazzo Mediceo la massa del monte Costa. Dalla pendice settentrionale di Trambiserra in canal di Rota o di Corniglia si parte similmente un calcare con cipollino identico a quello dianzi descritto del canal di

Rezza, e traversa quei dirupi e canali a settentrione di Trambiserra che poi si riuniscono e sboccano nella Serra alla Desiata, rotolando qua e là alcuni massi calcari; esso calcare mantenendosi sempre in piccoli strati perviene al monte Carchio dove sono aperte alcune cave di marmo ordinario dalla parte di Montignoso: una serie di calcare impuro di diversa potenza, salvo lievi interruzioni prodotte da denudazioni, ricollega poi il monte Carchio col monte Altissimo e col resto dell'elissoide. Mi sembra per tal modo chiarito come nella Versilia sia una vera e finita elissoide, come intorno alla medesima si continui la zona calcarea senza interruzione naturale salvo quella dovuta a movimenti indipendenti nel canale di Vitoio e di Solaio ed a lievi denudazioni tra il Carchio e l'Altissimo, e come questa zona ben definisca e racchiuda nell'interno la roccia schistosa più antica. Dovunque poi stanno superiormente a quella zona medesima gli schisti superiori che formano la zona schistosa esterna dell'elissoide. Tutti questi schisti, anche quelli della Saldatoia che compaiono nel letto del torrente nell' interno del paese di Serravezza e così pure quelli del Castello e di Solaio sul fianco meridionale del monte Costa hanno stratificazione e direzione perfettamente concordanti con quelle del marmo cui sono sovrapposti: nè a chi percorre da un estremo all'altro tutta la zona schistosa esteriore si presentano indizî di faglie se non locali che fanno rigetto di pochi centimetri nei filoni quarzosi e negli strati che li includono, laonde non è punto avvenuto che una profonda differenza di livello fra testate di strati affetti da grosse faglie abbia portata alla luce e rinnovata la serie delle roccie più antiche. Di una faglia nella direzione dei torrenti Serra e Serravezza secondo che in parte supponeva anche il Savi, oltrechè essa non seguirebbe l'allineamento degli strati ma ne troncherebbe i fianchi e perciò non produrrebbe se non uno stacco nella continuazione laterale dei medesimi, non sono traccie verune; gli strati schistosi nel fianco sinistro della Serravezza alla punta della Saldatoia, e quelli alla punta del Castello, a Solaio ed a Capriglia, per direzione, inclinazione e caratteri litologici sono identici a quelli del fianco destro a Serravezza, a Corvaia ed a Ripa; e là dove nel letto del torrente ho potuto verificare la connessione degli strati ho veduto quelli dell'un fianco continuare e rispondere perfettamente a quelli dell'altro; questa rispondenza è anche nei filoni cinabriferi che abbondano alle miniere di Ripa nella destra della valle e che in analoga roccia ed in analoga posizione sono stati trovati anche a sinistra nel letto del canale di Solaio al Lozzio sotto il Ponte Nuovo. Da ciò conclusi che la roccia schistosa, di monte Folgorito, di Rimagno, di Serravezza, del Castello e di Ripa, di Corvaia, di Strettoia (fig. 1, 3, 4), esteriore ai calcari marmorei di monte Costa, di Rio, della Cappella, di Trambiserra e di Carchio, e sottoposta ai calcari cavernosi di Pietrasanta, di Porta e di Montignoso, appartiene alla serie degli schisti superiori al marmo e non ha che fare cogli schisti inferiori del Bottino, di Valle del Giardino, di monte Cavallo ecc. poichè di mezzo stanno interposti gli strati dei marmi delle località suaccennate che manifestamente s'immergono e si continuano sotto l'orizzonte.

I caratteri litologici degli schisti superiori si distinguono alquanto da quelli degli schisti inferiori al marmo, anche prescindendo dalla colorazione che è generalmente più chiara nei primi che nei secondi. Quelli nel canale delle Mulina a sud-ovest dell'elissoide si presentano sotto forma di schisti lavagna e di arenarie o

grauwake dette *pseudomacigno* perchè rassomigliano al macigno dei terreni terziarî; nella parte invece a ovest dell'elissoide, che viene considerata in questo studio, nel canale di Piastra, a Ripa, a Corvaia, a monte Folgorito, le porzioni più basse di questi schisti sono metamorfosate in quarziti nodulose ovvero in schisti rasati micacei lucenti con abbondante ottrelite, le porzioni più alte e più vicine ai calcari cavernosi si compongono di micaschisti, anageniti, cloroschisti e filladi lucenti. In tutte queste roccie predomina la mica che comunemente si crede appartenere alla varietà detta damourite; i minerali che si riscontrano più comunemente in venature o come parte integrante dei micaschisti di Ripa, di Strettoia e del canal di Piastra sono quarzo, siderose, pirite, oligisto, ripidolite e feldspato (canal di Piastra, Rotaiola ecc.), distene (Ripa, Strettoia, canal di Piastra e Metato presso la Colombetta nei colli di Pietrasanta), un minerale affine alla staurotide (Strettoia), aragonite (Borroni nel canal di Piastra), baritina (canal di Piastra), dolomite, magnetite, calcopirite (Strettoia), rame grigio (Solaio), cinabro (Ripa, Solaio).

Nella serie degli strati schistosi oltre ai cipollini immediatamente superiori al calcare marmoreo e nei quali è di solito sparso in piccole vene il rame grigio o tetraedrite (Fontana del Papa e Fontana del Guercino presso Solaio) si notano a più riprese molteplici alternanze di strati di cipollino e di calcare di varia apparenza e di spessore fino a 50 metri, e specialmente nei canali di Piastra e della Mulina di Stazzema, i quali poichè denudano traversalmente tutta la zona degli schisti superiori molto si prestano all'osservazione dell'ordine successivo degli strati. Fra questi calcari superiori e di pochi metri sottostanti ai calcari cavernosi sono: un calcare grigio-cupo non cristallino in fini straterelli intercalati da tracce di materia schistosa, nel canale della Mulina e altrove; un calcare biancastro o grigio pallido d'aspetto calcinato e cavernoso con frammenti diversi che sembra abbia subìto varie metamorfosi speciali al Poggione presso Capezzano; e finalmente il cipollino o calcare perfettamente cristallino di Strettoia (fig. 3) che il Cocchi crede, come ho già riferito, un vero rappresentante dei soliti calcari marmorei di Carrara, del monte Corchia, del monte Costa ecc. Questo calcare cristallino che tecnicamente è un vero marmo fu noto a Girolamo Guidoni, ed Emilio Simi lo descrisse nel *Saggio corografico della Versilia* sotto il nome di *Marmor Hymethium*; è un calcare marmoreo in fini straterelli separati da molecole micacee, candidissimo e pellucido, di grana molto cristallina simile veramente a quella del marmo pario e spesso contiene disseminati numerosi granelli di quarzo; nella sua parte superiore assume un colore intensamente ferruginoso. I suoi strati non oltrepassano in complesso i tre o quattro metri di altezza e si prolungano in direzione sempre parallela ai calcari cavernosi per non breve tratto dal Poggione presso Strettoia al Bozzone, a Pozzuoli, sotto Montignoso e più in là verso la Brugiana; e riposano sopra ardesie i cui piani di stratificazione sono molto manifesti, e sopra micaschisti e schisti rasati traversati da grossi filoni ferrei che circa al 1600 diedero luogo ad una escavazione poi abbandonata; questi schisti appaiono chiaramente concordanti col calcare suaccennato come li rappresentò il Cocchi nella figura 6, tav. I (*Lezioni sulla geologia dell'Italia centrale*); non converrei perciò nella rettificazione che di questo taglio ha creduto dare posteriormente l'egregio geologo nella figura 9 (*Della vera posizione dei marmi* ecc. Boll. del r.

C. geol. Anno 1871, n. 5 e 6) nella quale fa apparire gli schisti medesimi discordanti dal calcare in coerenza alle idee cha in questa ultima pubblicazione ha manifestate. Il calcare è diverso geologicamante dal marmo più antico, e superiore al medesimo insieme con tutti gli schisti che lo includono e che sono superiori ai marmi del monte Costa e di Trambiserra; nè ora accennerò come esso abbia corrispondenza in altri luoghi della catena metallifera poichè ciò mi trarrebbe fuori dell' argomento. Sopra di esso e sotto ai calcari cavernosi di Porta e di Montignoso stanno in serie pur sempre concordante strati di schisto di spessore non superiore ad 80 metri. L'ordine successivo dei medesimi può essere seguìto esattamente quando si scenda nel letto del Rio di Strettoia dirimpetto quasi all'Oratorio procedendo da sud a nord: lo espongo qui in linea discendente dai calcari cavernosi in giù. 1. Roccia di pasta calcarea ferruginosa con numerosi frammenti di schisto verdastro. 2. Schisto verdastro qua e là calcarifero in strati molto scontorti dello spessore di 23 metri. 3. Cipollino calcareo ferruginoso con frammenti di schisto, 2 metri. 4. Schisto color lavagna molto facilmente divisibile in frammenti, in strati benissimo distinti e traversati da qualche grosso filone di quarzo, 24 metri. 5. Schisto verdastro cloritico molto compatto, 42 metri. 6. Anagenite durissima con frammenti quarzosi e quasi identica alla anagenite della Verrucca nei monti Pisani, 12 metri. Poi vengono terre e detriti che nascondono la pendice del monte, ma se si esamina la frana del Poggione arrampicandosi fino quasi alla metà di essa, si trova il calcare cipollino marmoreo concordante colle roccie incassanti sottostare direttamente alla anagenite.

Sopra a questa serie di schisti a Porta, a Montignoso, come altrove stanno calcari i cui orizzonti geologici sono ben noti; così i calcari cavernosi di Porta che dal Cocchi furono appellati triassici, possono essere distinti come quelli di Pietrasanta in calcare grigio scuro infraliassico ed in calcare rosso ammonitifero e grigio chiaro, liassici. A questo proposito ricordo ciò che dissi altre volte circa al calcare cavernoso dei colli pietrasantini e ripeto che quella roccia come tale non segna un' epoca distinta a sè, poichè si trovano essere divenuti cavernosi dei calcari di più orizzonti geologici noti.

Le conclusioni di questo studio portano finalmente a stabilire nel seguente modo la stratigrafia delle valli della Serra o di Rimagno e della Serravezza. Il torrente Serra dalle sue sorgenti sotto l'Altissimo fino alle case ed edifizî del Malbacco sopra Rimagno corre fra gli schisti inferiori i quali occupano tutta quella metà superiore della vallata e sono limitati, ad occidente dalle masse calcaree fra il monte Altissimo ed il monte Carchio e poi a mezzogiorno, lungo una linea quasi retta, dai piccoli strati calcarei che ho detto esistere fra il monte Carchio e Trambiserra, quindi dalle masse calcaree di Trambiserra e della Cappella, e dalla serie di straterelli calcarei che è fra Trambiserra e il Malbacco in basso del canale di Rezza. Da qui fin presso Rimagno il torrente Serra segue col suo letto la direzione delle testate degli strati di calcare sicchè il fianco sinistro del canale appare colà formato dagli schisti inferiori ed il fianco destro dagli schisti superiori entro i quali perfettamente compie poi il suo corso da Rimagno a Serravezza: invero gli strati calcarei dopo aver formato un ingrossamento a Rio sopra Rimagno nella sinistra della valle, passando sotto Pancola fino alla Pescaia della Vezza di fianco al Palazzo Mediceo segnano il punto

di divisione fra gli schisti inferiori e quelli superiori. Da qui si deduce che il corso della Serra da Rimagno in poi, l'estremo sperone del colle fra la Vezza e la Serra, il fondo di valle dove è costruito il paese di Serravezza, l'estremo corso della Vezza dalla Pescaia sopra accennata in giù, ed il colle dell'Uccelliera sono conformati dagli schisti superiori al marmo i quali poi formano ambedue le sponde della Serravezza fino alla bocca della valle, e si sviluppano in tutte le pendici situate fra Palatina, Porta e Montignoso e fra il monte Costa, Trambiserra ed il monte Carchio, cioè a dire, al Castello, a Capriglia, a Corvaia, Ripa, Ceragiola, monte Folgorito, S. Niccola, Strettoia, ecc.

Noterò che gli schisti che ho appellati *superiori*, e cioè superiori al marmo, rispondono al periodo giura-liassico di Savi, al triassico, permiano e carbonifero di Cocchi, al trias superiore secondo me; il *calcare marmoreo antico* risponde al lias inferiore e trias di Savi, al devoniano di Cocchi, al trias superiore secondo me; e gli schisti *inferiori* corrispondono al paleozoico di Savi e di me, presiluriano o laurenziano di Cocchi.

Relazioni fra la polarizzazione elettrica dei coibenti e la polarizzazione dei magneti.

Nota del Socio GIO. CANTONI

presentata al Presidente

durante le ferie accademiche 1882-83.

(Con una tavola)

---

§ 1. In un precedente mio scritto ([1]) procurai di mettere in chiaro i seguenti fatti:

1. Strofinando fra loro due sottili lamine coibenti eterogenee, munite di armature metalliche isolate, si polarizzano entrambe e concordemente;

2. Codesto sistema però, nel suo insieme, appare ancora in *istato neutro*, come dianzi lo erano separatamente le sue parti, vale a dire un tal sistema, pur dopo lo strofinìo, non manifesta alcuna azione induttrice esterna, fin tanto che le facce sfregate de' due coibenti son lasciate congiunte tra loro;

3. Operando poi nel senso di voler separare questi due coibenti, si riscontra una sensibile resistenza al distacco, giacchè si spiega tra loro una speciale *aderenza* chiamata *elettrica*;

4. Vinta questa resistenza, ognuno dei coibenti insieme colla propria armatura manifesta una *azione* elettrica *induttrice a distanza* sui corpi esterni, la quale induzione però è di verso opposto per le due parti del sistema;

5. Quest'azione induttrice a distanza è anzitutto dovuta all'armatura, tanto che ove le due armature metalliche vengono ridotte a toccarsi tra loro in qualche punto, le due parti del sistema, tuttochè disgiunte, riappaiono in istato neutro;

6. Ricollocando però a mutuo combaciamento le facce strofinate dei coibenti, e fatto arco conduttivo isolato fra le loro armature, si possono ancora verificare successivamente i fenomeni suindicati ai numeri 2, 3, 4 e 5;

7. E così di seguito, in questo sistema mantenuto sempre isolato, si possono far apparire e scomparire, alternamente, le interne aderenze (5), oppure le esterne influenze induttrici (4), soltanto col disporne le parti in differenti maniere;

8. Ognuno poi dei coibenti si mostra *polarizzato*, in quanto che colle due sue facce spiega opposte azioni induttrici su due armature poste a contatto di esse;

9. Codesta polarizzazione elettrica dei coibenti strofinati tra loro, in un ambiente secco, si mantiene abbastanza a lungo, così da funzionare siccome *elettrofori*, coll'alterno distacco ed attacco delle armature.

§ 2. Codesti fenomeni elettrici trovano un singolare riscontro nei fenomeni ben noti dell'induzione magnetica.

([1]) *Su la polarizzazione dei coibenti elettrici.* Nota del Socio Gio. Cantoni. Atti dei Lincei, Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, ser. 3ª, vol. XIV. 1882.

Anzitutto è notorio, e già lo sperimentava accuratamente il nostro Galilei ([1]), che le armature in ferro dolce, applicate in modo convenevole ai magneti naturali, nel mentre rendono più efficaci le loro azioni sui corpi magnetici esterni, assumendo per induzione una polarizzazione concorde, valgono altresì a conservare a lungo la polarizzazione magnetica nelle calamite stesse.

D'altra parte un' *àncora*, opportunamente foggiata e posta a far arco fra le due armature, nel mentre spiega con queste una forte *aderenza magnetica*, opponendo quindi una notevole resistenza al distacco, svigorisce di molto le predette azioni induttrici esterne del medesimo magnete armato.

Più ancora importa notare che, avendosi un sistema di corpi magnetici polarizzati permanentemente (come sarebbero dei prismetti d'acciaio magnetizzati), col solo mutare la posizione rispettiva di questi si può produrre sia uno svigorimento sia un invigorimento notevolissimo nell'azione induttrice esterna del sistema medesimo.

Però ogni mutazione nella postura rispettiva delle parti di un tal sistema, all'atto stesso che produce una variazione nella intensità delle azioni induttrici esterne, produce insieme una variazione, ma in senso inverso, nella intensità delle reciproche azioni di coerenza magnetica delle parti stesse del sistema.

§ 3. Anzi i fenomeni magnetici predetti, offrono il vantaggio di poter essere messi in evidenza ed esaminati nelle loro particolarità, mediante un' artificio sperimentale molto semplice e già noto da tempo, quello dei così detti *spettri magnetici.*

Sul proposito parmi conveniente di rammentare qui, in forma compendiosa ed ordinata, alcune elementari osservazioni e talune deduzioni ben note, già in parte raccolte altrove ([2]), illustrandole con qualche disegno.

§ 4. Due calamite prismatiche d'acciajo temperato, a sezione rettangolare, tra loro eguali ed egualmente magnetizzate, disposte coi loro assi lungo una stessa retta, e coi rispettivi estremi affacciati, alcun po' discosti tra loro.

Si posi su di esse una sottile lastra di vetro, che le ricopra più oltre la loro lunghezza, e poi mercè un fitto cribro si sparga in modo uniforme su la superficie di essa della limatura finissima di ferro dolce. Indi si faccia vibrare dolcemente la lastra, col percuoterla leggermente in più punti del suo perimetro con una sottile verghetta di vetro.

Di tal guisa si otterrà un disegno, chiamato *spettro magnetico*, il quale somiglierà all'uno od all'altro dei due spettri, segnati 1 e 2 nell'annessa tavola litografica, secondo la disposizione che si darà ai due estremi affacciati dalle calamite.

Osser. I. Esaminando le varie linee, che appaiono disegnate in questi due spettri, e che denomineremo *linee d'azione magnetica*, chiaro si scorge che sono tracciate, benchè a tratti discontinui, da diverse serie di granellini di ferro, allineati e collegati tra loro da influenze mutue.

([1]) Gilbert, nella sua opera *De magnete, magneticisque corporibus*, ecc., uscita in Londra l'anno 1600, accenna che colle armature in ferro potè far reggere ad una calamita naturale il peso (di 12 once), tre volte maggiore di quello sorretto da essa sola (4 once). Galilei, ricordando con elogio l'opera anzidetta del Gilbert, nel 1626 con un pezzo di magnete, pesante sei once toscane e che da solo reggeva appena due once di peso, riescì mediante opportune armature a fargli sostenere un peso di 160 once, cioè 80 volte maggiore del primo, e quasi 27 volte maggiore del proprio peso.

([2]) *Su alcuni principî sperimentali del magnetismo*, (edita nell'*Elettricista.* Firenze, gennaio 1877).

Osser. II. La maggior parte di codeste linee sembrano irradiare dalle parti estreme di ciascun magnete e più spiccatamente da alcuni punti interni, poco discosti dagli estremi dell'asse di figura della verga.

Osser. III. Le linee magnetiche che irradiano da un medesimo estremo d'una calamita, si mantengono tra loro divergenti, anche a sensibile distanza dai rispettivi punti di partenza, come se fra loro s'esercitasse una *mutua repellenza* normalmente alla loro lunghezza (¹).

Osser. IV. All'opposto le linee irradianti da un estremo, rispetto a quelle che irradiano dall'altro estremo d'uno stesso magnete, manifestano una tendenza ad avvicinarsi sempre più le une alle altre, sino a costituire alcune curve, che collegano tra loro i vari punti radianti da tali estremi.

Le due ultime osservazioni (III e IV) bastano a porre in chiaro l'opposizione nelle influenze (*azioni induttrici*) esercitate sui corpi magnetici esterni, entro il *campo d'azione* di siffatti due *centri di opposte induzioni magnetiche*, i quali, per brevità, si denominano *poli eteronimi* (²).

Ed analogamente si chiamano *poli omonimi* gli estremi di due calamite, i quali, promovendo induzioni dello stesso senso sui corpi magnetici esterni, irradiano tali linee d'azione che tra loro esercitano una mutua repellenza nel senso trasversale, al pari di quelle (Osser. III) che irradiano da un medesimo estremo d'una calamita.

Tuttavia le azioni induttrici dei due estremi d'uno stesso magnete, benchè s'esercitino in opposto verso, si risolvono per entrambi in atti dello stesso ordine, quello cioè di promuovere o meglio di rendere manifesta *l'azione bipolare*, propria delle singole particelle d'ogni corpo magnetico, le quali entrando nel campo di tali due centri d'azione vengono sollecitati ad ordinarsi in modo da spiegare tra le loro parti successivamente affacciate una speciale *coerênza magnetica*.

Ed invero ogni granello di ferro che cade entro la sfera d'efficienza d'un polo magnetico si *polarizza*, cioè si dispone col proprio asse magnetico così che i suoi due poli rispettivamente prospettino il polo eteronimo dei due granelli laterali coi quali si collega. E così di seguito i granelli di una stessa linea d'azione si diranno *similmente* orientati, in quanto che i loro rispettivi poli eteronimi (gli eteronimi al centro d'azione da cui essa parte) saranno volti tutti da una medesima banda rispetto ai singoli loro centri di massa.

Analogamente diconsi avere un'*orientazione simile* le varie linee che partono da un dato estremo d'un magnete, cioè da uno stesso centro di induzione. E per converso, le linee che muovono dai due poli d'una stessa calamita, i quali producono induzioni di verso opposto, le si dicono orientate oppostamente rispetto ai loro punti di partenza.

(¹) Meritano ricordo due diversi modi descritti da Gilbert nella predetta sua opera (lib.III c. 8) per mostrare la reciproca repellenza di due fili di ferro, pendenti oppur sospesi in prossimità d'un polo magnetico.

(²) Codeste denominazioni di *centri* e di *poli* magnetici non sono, per verità, appropriate. Non trattasi di influenze od azioni che emanino da individuati punti del magnete, ma trattasi d'un sistema di due punti, ne' quali cadono le risultanti delle due azioni polari delle singole sezioni longitudinali e trasversali del magnete stesso, siccome meglio apparirà innanzi. Tuttavia usiamo qui tali vocaboli in un senso puramente convenzionale.

Osser. V. La succennata mutua repellenza delle linee irradianti dai poli omonimi di due calamite spicca manifesta nello spettro 2, seguendo l'andamento delle linee che muovono dai due estremi affacciati nel mezzo della figura, i quali sono appunto omonimi. Perciocchè queste linee, essendo tutte orientate ad un modo e movendo da opposti punti, non solo non si accordano le une con le altre, ma son costrette a ripiegarsi più e più, sino a ridursi parallele tra loro, cioè perpendicolari agli assi magnetici delle due calamite, ed anche a diradarsi, lasciando quasi privo di elementi magnetici il campo interposto ai due poli omonimi, fra i quali sussiste pure reciproca repulsione.

All'opposto, nello spettro 1, dove gli estremi affacciati delle due calamite sono tra loro eteronimi, le linee irradianti dall'uno di essi convergono verso quelle che irradiano dall'altro, e con queste si connettono per mezzo di curve di mutuo accordamento, analogamente a quanto risulta (Osser. IV) per le linee che muovono dai due poli d'uno stesso magnete.

§ 5. Lo stato di cose descritto nelle precedenti osservazioni si può riassumere nei seguenti corollari:

Cor. 1. Ogni linea magnetica è rappresentata da una serie di piccoli elementi magnetici, aventi una polarizzazione concorde;

Cor. 2. Gli elementi successivi d'una stessa linea magnetica aderiscono tra loro, ossia spiegano una reciproca coerenza nel senso longitudinale della linea medesima.

Cor. 3. Fra i singoli elementi di due linee magnetiche di concorde orientazione, ed in direzione trasversale ad esse, si esercita sempre una repulsione reciproca.

Cor. 4. Due linee, che muovono da due distinti poli eteronimi, con opposta orientazione, tendono ad accostarsi ed a congiungersi tra loro in una sola curva accordata, e longitudinalmente coerente coi suoi elementi (Cor. 2.)

§ 6. Innanzi di proseguire l'analisi di questi spettri magnetici, gioverà avvertire come due dei precedenti principî (Cor. 2 e 3) manifestano una opposizione, apparente almeno, con due delle leggi fondamentali di Ampère sulle mutue azioni delle correnti elettriche, qualora fossero queste considerate siccome linee di azione elettrica.

Ed invero fra gli elementi successivi d'una stessa linea magnetica e nel senso longitudinale di questa si spiega una reciproca tendenza ad accostarsi (Cor. 2); laddove, secondo Ampère, fra gli elementi successivi di una medesima corrente elettrica si spiega una mutua repulsione.

E d'altra parte fra gli elementi di due linee magnetiche parallele di concorde orientazione, e nel senso trasversale ad esse, si spiega una reciproca repulsione (Cor. 3); dovecchè fra gli elementi di due correnti elettriche parallele e similmente orientate (procedenti nel medesimo verso) si spiega una reciproca tendenza ad accostarsi nel senso ad esse trasversale.

Però mi riservo di dire più avanti se queste opposizioni fra le azioni delle linee magnetiche e delle correnti elettriche, ossia fra la orientazione magnetica e la orientazione elettrica, siano o meno soltanto apparenti.

§ 7. Ripigliamo ora l'esame degli spettri magnetici.

Poc'anzi (nella osser. V) s'è avvertito che nel campo interposto fra i poli

omonimi affacciati delle due calamite (nello spettro 2) i granellini di ferro vengono a diradarsi di tanto, da rendersene affatto sgombra l'area mediana del campo medesimo, e ciò per la scambievole azione repulsiva che si spiega fra siffatti elementi mobili, orientati omonimamente (Cor. 3). Ora, a piena conferma di siffatta interpretazione, concorrono quest'altre osservazioni.

Osser. VI. Al disopra delle parti estreme delle facce piane del magnete prismatico non si trattiene (quando la lastra di vetro vibri dolcemente) nessun minuzzolo di ferro: bensì questi granelli, raccogliendosi verso il perimetro di siffatte aree denudate, vi formano dei filamenti tra loro divergenti ed impiantati lungo gli spigoli diedri e su gli angoli solidi che limitano le facce medesime.

Il che manifesta non solo un'azione preponderante nei punti d'incontro delle varie facce piane che limitano il magnete, ma altresì un'azione repulsiva scambievole fra le basi delle linee d'induzione (le basi dei filetti di limatura), le quali basi possono agevolmente scorrere su la lastra orizzontale sino a ridursi ai limiti della faccia influenzante, cioè ai detti spigoli diedri e vertici triedri, in quanto che codesti filamenti, avendo una orientazione concorde nel verso (dovuta ad uno stesso polo), giusta il principio suesposto (Cor. 3), devono respingersi mutuamente.

Questo fatto si mostra ancor più distinto negli spettri ottenuti su le sezioni terminali (perpendicolari all'asse magnetico) delle calamite, siano poi a perimetro rettangolare oppur circolare, nei quali spettri tutta l'area interna rimane similmente spoglia di elementi magnetici mobili.

Osser. VII. Dagli spettri dati dalle sezioni longitudinali (parallele all'asse), come sono tutti quelli dell'annessa tavola litografica, si rileva ancora che siffatta azione di denudamento delle aree interne ai perimetri riesce soltanto efficace presso le estremità del magnete, cioè appena a qualche distanza da ognuno dei poli di esso. Laddove poi, procedendo verso il mezzo della lunghezza della faccia, rendendosi gradatamente sentita l'influenza anche dell'altro polo (eteronimo al primo), si forma e si mantiene per coerenza magnetica una serie di linee di accordamento (Cor. 4), cioè orientate in opposto verso per riguardo ai rispettivi punti di partenza, le quali si adagiano su la lastra in direzione pressochè parallela all'asse magnetico.

Osser. VIII. Queste linee coerenti di accordamento, parallele all'asse, sono distinte non solo su la parte mediana della faccia longitudinale di ciascuna calamita, ma ancora e più spicccatamente nel campo intermedio ai due poli eteronimi affacciati dello spettro 1, i quali appunto esercitano fra loro un'azione efficace per accostarsi l'un l'altro, oppure per costituire framezzo un campo magnetico di forte coerenza; siccome lo attesta il saldo legame degli interposti e fitti filamenti di limatura di ferro, i quali tendono a collegare od accordare in un solo i due magneti, aventi i rispettivi elementi oppostamente orientati (Cor. 2), rispetto alle parti affacciate.

Altrettanto deve dirsi delle linee di limatura, parallele all'asse, che si adagiano attraverso la così detta *linea neutra*, congiungendo tra loro i due poli eteronimi di un medesimo magnete (negli spettri 1 e 2); cioè queste linee parallele all'asse rivelano tali altre azioni che, tendendo a produrre una speciale coerenza magnetica fra le parti interne, le denominiamo *azioni interne.*

Osser. IX. È pur facile riconoscere che le sezioni di massima azione induttrice

esterna d'un magnete (quelle cioè che comprender devono que' punti, che si considerano quali centri d'azione induttrice) saranno contrassegnate nel rispettivo spettro longitudinale da linee d'azione perpendicolari alle facce del magnete stesso.

Ed infatti tanto negli spettri 1 e 2, quanto nei susseguenti si riconosce che le linee irradianti da un medesimo polo muovono, in direzione normale all'asse di ciascun magnete, da tali punti che sono alcun po' discosti dagli estremi della corrispondente faccia longitudinale, ad una distanza da questi d' incirca un dodicesimo della totale lunghezza dell'asse magnetico.

§ 8. Ora dall'insieme delle precedenti osservazioni (VI a IX) si possono dedurre le seguenti leggi empiriche:

Cor. 5. Negli spettri magnetici le aree nude, circoscritte da fitte linee di reciproca repulsione, segnano le parti dove le azioni esterne (cioè le influenze induttrici sui corpi magnetici) prevalgono di molto sopra le azioni interne di reciproca coerenza fra gli elementi costitutivi del magnete.

Cor. 6. Nelle sezioni trasversali (perpendicolari all'asse) d'un magnete retto si manifesta assai più efficace l'azione esterna lunghesso il loro perimetro.

Cor. 7. Nelle sezioni longitudinali (parallele all'asse) d'un magnete retto, solo per un tratto presso ciascun estremo (corrispondente ad un quarto circa della loro lunghezza) si manifesta vigorosa l' efficienza esterna lungo il perimetro. Nella restante parte mediana (estendentesi a circa la metà della lunghezza totale) sono invece prevalenti le azioni interne di coerenza fra gli elementi polarizzati del magnete stesso.

Cor. 8. Dove le linee d'azione partono dal perimetro d'una sezione tra loro divergenti e poco inclinate verso l'asse, ivi predomina l'efficienza esterna, la quale riesce *massima* dove queste linee muovono normalmente all'asse medesimo, indicando la sezione comprendente il così detto polo magnetico.

Cor. 9. Le azioni interne di coerenza fra gli elementi del magnete, predominano invece là dove le curve di accordamento corrono molto inclinate verso l'asse; ed hanno il *massimo* valore dove le linee stesse riescono parallele all' asse predetto, nell'atto che attraversano la così detta *linea neutra* del magnete.

Cor. 10. Le influenze esterne e la interna coerenza degli elementi d'un magnete sembrano fra loro così connesse da riescire complementari le une dell' altra, restando costante la loro somma nelle singole sezioni trasversali del magnete medesimo.

§ 9. Tutti i precedenti corollari si possono confermare ed ampliare mercè l'esame accurato degli altri spettri della unita tavola litografica.

Abbiansi ancora due calamite rette, conformi alle precedenti: ma le si dispongano a qualche distanza tra loro, cogli assi paralleli e coi rispettivi poli affacciati due a due. Lo spettro 3 risponde al caso in cui stiano a fronte i poli eteronimi delle due calamite, e lo spettro 4 al caso in cui si affacciano i loro poli omonimi.

Osser. X. Nello spettro 3 tutte le curve magnetiche si accordano fra loro, cioè tutte (così le laterali esterne, come le estreme e le intermedie) risultano dall'unione (accordamento) di linee oppostamente orientate, daccchè partono da due poli eteronimi. Sono dunque tutte curve di coerenza (Cor. 4) nel verso longitudinale, e massime devono esserlo le linee intermedie ai quattro campi di maggior efficacia esterna delle due calamite (quali sono, secondo il Cor. 5, i quattro spazi denudati di elementi magnetici).

Poichè queste linee, essendo quasi tutte normali agli assi delle due calamite, mettono in piena evidenza l' energica loro azione esterna (secondo il Cor. 8), azione che in questo caso , esercitandosi fra poli eteronimi, tende a produrre un reciproco accostamento fra i due assi, il quale verificherebbesi se le due calamite fossero liberamente pendenti, sorretta ciascuna da due coppie di fili flessibili.

Nello stesso spettro 3 è pur notevole che, nella parte mediana dello spazio intermedio alle due calamite, le linee accordate fra i due poli eteronimi di ognuna di esse , le quali dapprima, in prossimità del rispettivo asse, corrono quasi parallele a questo (accennando secondo il Cor. 9 un massimo di azioni interne), s'incurvano di poi, tendendo ad accostarsi tra loro in direzione normale all'asse, in quanto che offrono un' opposta orientazione (Cor. 4). Laddove poi, nella direzione diagonale, tendono a respingersi mutuamente le linee che, muovendo dai due poli omonimi delle due calamite, sono similmente orientate (Cor. 3) ; talchè, nel mezzo di siffatto intervallo mediano si costituisce uno spazio, povero di elementi magnetici, i cui limiti somigliano a quelli di due rombi, coi loro assi maggiori incrociati, la cui intersezione segna tal punto, pel quale guidando una retta normale agli assi magnetici, si ottiene la così detta *linea neutra*.

Osser. XI. Invece nello spettro 4, nel quale si prospettano lateralmente i poli rispettivamente omonimi delle due calamite, si rileva chiaramente che, all'infuori delle linee laterali esterne che danno curve di accordamento (Cor. 4), tutte le altre linee, cioè quelle che irradiano dagli estremi delle calamite e segnatamente le linee e le curve dello spazio interposto ai due magneti, sono altrettante linee di evidente reciproca repulsione (Cor. 3), essendo tutte similmente orientate.

Anzi, questa mutua repellenza delle linee similmente orientate appare ancor più manifesta framezzo alle parti di maggior azione esterna, in corrispondenza cioè ai campi denudati (Cor. 5), poichè anco le linee partite in direzione normale all' asse dalle sezioni di massima efficacia (Cor. 8) prossime ai poli, innanzi di incontrarsi, si ripiegano bruscamente e quasi ad angolo retto, con tendenza abbastanza sentita ad ingenerare framezzo ad esse uno spazietto nudo, attesa la generale repulsione delle parti. Però questo spazio sarebbe riescito più spiccato, ove fosse stata minore la distanza dei poli omonimi lateralmente prospicientisi, siccome si è visto pei poli mediani dello spettro 2, ed ancor meglio si vedrà nello spettro 6.

Intanto può dirsi che tutte codeste linee dello spazio interposto alle due calamite dello spettro 4 , così pel non accordarsi tra loro , come pel loro rapido inflettersi per modo da ridursi parallele agli assi magnetici rivelano un'energica azione repulsiva fra le due calamite stesse normalmente ai loro assi, la quale si renderebbe manifesta se questi magneti, così disposti come sono, pendessero sospesi ciascuno ad una coppia di fili flessibili.

§ 10. Ma ben più concludenti sono gli spettri 5 e 6, ottenuti colla consociazione di sei piccole calamite rette, disposte tutte coi loro assi paralleli ed alcun poco discoste le une dalle altre. Nello spettro 6 sono volti tutti da una stessa banda i poli omonimi delle singole calamite. Nello spettro 5 invece si succedono, in modo alterno, i poli eteronimi, cosicchè ciascun polo delle calamite intermedie trovasi fiancheggiato da due poli ad esso eteronimi.

Osser. XII. Nello spettro 5, pigliando in parziale esame le linee e le curve corrispondenti a due sole calamite contigue, si veggono riprodotte, anzi con maggior distinzione, tutte le particolarità notate sopra (Osser. X) per lo spettro 3, dato da due calamite soltanto aventi i rispettivi poli eteronimi affacciati.

Ed invero da questo spettro 5 emergono spiccati i seguenti fatti:

1. La reciproca repulsione delle linee irradianti da un medesimo polo (Cor. 3);

2. L'accordarsi delle linee irradianti da due poli eteronimi (Cor. 4);

3. I campi denudati presso gli estremi d'ogni calamita, circondati dagli spigoli di maggior efficacia (Cor. 5 e 7);

4. Le linee intermedie a due di siffatti campi eteronimi, accordandosi tra loro, costituiscono delle linee rette o leggermente curve, accennanti un'efficace attrazione fra i campi anzidetti;

5. Le linee normali all'asse, in corrispondenza alle sezioni trasversali di massima efficacia esterna (Cor. 8), le quali passano pei centri di azione induttrice;

6. Le linee accordate, parallele o pochissimo devianti dall'asse lungo la parte mediana d'ogni faccia longitudinale del magnete (là dove predominano le azioni interne degli elementi magnetici), le quali ottengono il loro massimo in corrispondenza alla linea neutra della calamita (Cor. 9); e questa linea, essendo diretta normalmente all'asse longitudinale, passa anche pel punto d'intersezione dei due rombi ad assi incrociati (Osser. IX) posti nel mezzo dello spazio intermedio a due calamite.

Il complesso di questi fatti tende già manifestamente a far concludere che:

Cor. 11. La consociazione di più calamite cogli assi paralleli e coi poli alternanti a riscontro, appunto perchè mira a costituire un sistema, in cui sieno meglio soddisfatte le mutue loro azioni interne di accostamento, rende meno efficaci le loro azioni induttrici sui corpi magnetici esterni (Cor. 10).

Osser. XIII. Anche nello spettro 6, nel quale per ciascun estremo delle sei calamite parallele si prospettano successivamente tutti i poli omonimi delle medesime, emergono assai più esplicite le singole particolarità notate (Osser. XI) nell'esaminare lo spettro 4, dato da due sole calamite coi loro poli omonimi a mutuo prospetto.

Ed invero nello spettro 6 si rilevano ben distinti i seguenti fatti:

1. All'estremo d'ogni calamita vi è ripulsione non solo fra le linee irradianti da un medesimo polo, ma pur con quelle che irradiano dai poli ad esso laterali, essendo tutte linee di concorde orientazione (Cor. 3);

2. Sonvi curve di accordamento (Cor. 4) soltanto ai lati esterni delle due calamite estreme della serie, in quanto che esse congiungono i poli eteronimi di queste;

3. I campi denudati, di massima azione esterna, in prossimità di ciascun polo, e limitati dagli spigoli terminali della corrispondente faccia del magnete (Cor. 5 e 7);

4. Altri campi denudati di elementi magnetici mobili nello spazio intermedio fra due poli omonimi prospicientisi, i quali campi si mostrano affatto simili a quello descritto sopra (Osser. V) fra i due poli omonimi affacciati, nel mezzo dello spettro 2, ed agli analoghi campi, appena segnati, nello spazio in cui s'intersecano le linee di concorde polarizzazione, irradianti da ciascuna coppia di poli omonimi affrontati dello spettro 4 (Osser. IX).

5. Le curve di accordamento fra i poli eteronimi d'una medesima calamita,

lunghesso la parte mediana della stessa, attraversandone la linea neutra, corrono pressocchè parallele al corrispondente asse magnetico (Cor. 9);

6. Queste medesime curve di accordamento, negli spazi intermedi a due successive calamite, manifestano una reciproca repulsione, grazie alla concorde loro orientazione (Cor. 3), per cui accennano al ridursi ancor là parallele agli assi magnetici. E di tal modo rivelano la repulsione reciproca delle calamite medesime in direzione normale agli assi stessi.

Dall' insieme di questi fatti già apparisce che:

Cor. 12. La consociazione di più calamite, cogli assi paralleli e concordemente orientati, è la disposizione più opportuna affinchè possano agire più efficacemente su altri corpi magnetici esterni; appunto perchè di tal modo esse spiegano tra loro nessuna interna aderenza, anzi spiegano una reazione energica all'accostamento reciproco.

§ 11. Le notevoli differenze sopra avvertite fra gli spettri 5 e 6, e quindi le precedenti due illazioni (Cor. 11 e 12) si rendono sempre meglio evidenti negli spettri magnetici quanto minori si riducono le rispettive distanze delle medesime sei calamite. Imperocchè con ciò le linee disegnantisi negli intervalli fra le successive calamite mirano più distintamente a ridursi tutte normali agli assi loro, quando le calamite stesse (come nello spettro 5) sono consociate coi poli alternanti; mentre che tendono a rendersi ognor più parallele agli assi, quando son consociate coi rispettivi poli omonimi a fronte (come nello spettro 6).

Il che val quanto dire che, raccogliendo più e più vicine le parti del sistema magnetico, s' accrescono in questo, nel primo caso, le azioni di reciproco accostamento delle parti stesse, con iscapito delle loro azioni induttrici sui corpi esterni; laddove, nel secondo caso, si invigoriscono le azioni esteriori del sistema, con detrimento delle rispettive azioni di aggregazione interna delle parti medesime.

§ 12. Questi due opposti contegni di un medesimo sistema magnetico col mutare in esso la disposizione delle sue parti si rendono poi evidentissimi quando le sei magneti son ridotte a mutuo contatto coi loro fianchi paralleli, lorchè dan luogo agli spettri 7 ed 8; il primo quando i poli affacciati son tutti omonimi, l'altro quando si guardano sufficientemente i poli alterni.

Osser. XIV. Infatti nello spettro 7 riesce evidente essersi raggiunta pel dato sistema magnetico la massima efficacia induttrice sui corpi magnetici esterni. E questa è rivelata: dalla notevole ampiezza degli spazî terminali denudati di granelli magnetici; dall'accumulo al perimetro di essi e insieme dalla molta lunghezza delle linee d' azione induttrice; dalla spiccata loro mutua repulsività anche a molta distanza; dalla pur notevole estensione del campo investito dalle curve di accordamento che irradiano lateralmente dai due opposti centri d'azione; ed infine dal quasi completo parallelismo agli assi di tutte le linee attraversanti la zona neutra, il che (giusta l'Osser. XIII, 6) rivela un' energica interna repulsione, in direzione normale agli assi, delle singole parti del sistema medesimo.

Osser. XV. All' opposto nello spettro 8, dato dallo stesso sistema magnetico, quando però i poli accostati si succedono alternamente, appaiono così poco sentite, da dirsi pressocchè nulle, le esterne manifestazioni del sistema sui corpi magnetici circostanti. Poichè i granellini di ferro rimangono sparsi senza un ordine designato,

avendosi appena incipienti alcune linee presso gli spigoli, le quali poi son dirette normalmente agli assi, così da accennare soltanto un' azione interna (di aderenza scambievole dei fianchi paralleli delle singole calamite). E questa renderebbesi manifesta con una sentita resistenza al distaccó della calamite medesima le une dalle altre in direzione normale ai loro assi; perciocchè esse, colla detta disposizione, costituiscono un sistema di parti tra le quali si spiega un massimo di coerenza magnetica.

§ 13. Collegando tra loro quest' ultime osservazioni (XIV e XV), si possono dedurne alcune generali proposizioni, le quali, oltre al riassumere i precedenti corollari 10, 11 e 12, tornano utili per formulare una teoria sperimentale dei fenomeni magnetici.

Convien però premettere alcune definizioni convenzionali.

Nelle azioni dei magneti distinguonsi due ordini di influenze, esterne cioè ed interne.

Diciamo *influenze esterne* quelle di induzione che un magnete esercita sui corpi magnetici da esso poco discosti, col polarizzarli in modo temporaneo o permanente, oppure coll' attirarli a sè o col respingerli.

Denominiamo poi *influenze interne* quelle che si esercitano fra le parti o piuttosto fra gli elementi costitutivi del magnete stesso.

Ma queste influenze interne vanno distinte in due sotto-ordini, cioè le azioni di accostamento reciproco o di coerenza fra gli elementi oppostamente orientati rispetto al punto di origine della azione induttrice, e le azioni di mutuo allontanamento per gli elementi egualmente orientati.

Però le dette forme di influenze interne manifestano un'intimo legame colle iufluenze esteriori, tanto da poterle dire complementari le une delle altre.

Cor. 13. In un aggregato di elementi magnetici, solo col mutare le loro disposizioni rispettive, ancorchè non si alteri nè il volume, nè la esterna figura dell'aggregato medesimo, si possono variare notevolmente le risultanze delle influenze esteriori ed interne degli elementi stessi.

Cor. 14. Le influenze interne di coerenza e le influenze esterne d' induzione, per un dato sistema magnetico, rappresentano una somma costante di azioni. E poichè esse operano in senso opposto le une dalle altre, l'azione risultante del sistema rispetto ai corpi esteriori può variare grandemente di valore.

Cor. 15. Tutte le variazioni nella postura rispettiva degli elementi d' un dato sistema, le quali producono un aumento nella coerenza magnetica, ossia una diminuzione nella ripulsività mutua degli elementi medesimi, inducono contemporaneamente un proporzionato decremento nelle sue influenze esteriori. E reciprocamente, le variazioni nella posizione rispettiva degli elementi, che recano un incremento nelle influenze esterne d' un sistema magnetico, adducono una equivalente diminuzione nelle mutue azioni interne di coerenza, ossia producono un aumento corrispondente nelle reciproche azioni ripulsive degli elementi stessi.

Cor. 16. Il massimo valore delle azioni esterne d' un sistema magnetico è correlativo al minimo valore della coerenza magnetica fra le sue parti.

Cor. 17. Quando un sistema magnetico non manifesta alcuna azione induttrice esteriore, talchè vien detto in *istato neutro*, allora si verifica per esso il massimo valore della coerenza magnetica fra i suoi elementi interni [1].

[1] Altrove rileverò l'alta importanza delle idee del Faraday (1852) su codesti fenomeni.

§ 14. I fatti che ora passiamo a ricordare sono così notorî che non occorre di illustrarli, nè con ispeciali spettri, nè con minute descrizioni di sperimenti.

Osser. XVI. Spezzando un lungo ago cilindrico di acciaio fortemente magnetizzato, là dove esso presenta la sua *linea neutra*, le due sezioni della rottura — le quali dianzi stavano a mutuo contatto, e non esercitavano nessuna azione induttrice esterna — manifesteranno una sensibile resistenza al loro distacco; vinta la quale, eserciteranno entrambe efficacissime azioni induttrici esteriori, ma di senso opposto tra loro, e non meno gagliarde di quelle esercitate dagli estremi delle due porzioni, in cui venne diviso l'ago. Talchè ognuna di queste porzioni opererà a modo di una calamita completa; e queste due calamite si mostrano polarizzate concordemente alla polarizzazione dell'ago primitivo.

Osser. XVII. Disponendo poi queste due porzioni dell'ago in modo analogo a quello che tenevano da prima, però coi loro estremi di rottura a poca distanza fra loro, questi spiegheranno una sensibile tendenza ad accostarsi sempre più fra loro, e giunti poi a contatto, manifesteranno di nuovo una notevole coerenza magnetica, ossia ancora una resistenza al mutuo distacco.

Osser. XVIII. Spezzando similmente una qualunque delle due porzioni d'ago ottenute come sopra, secondo la rispettiva sua linea neutra, si avranno ancora due altre minori calamite complete, cioè dotate entrambe di polarità concorde a quella dell' ago primitivo. E così, procedendo ad ulteriori suddivisioni, ciascuna parte si mostrerà dotata di polarità, e sempre concorde con quella della prima calamita. Talchè sempre, là dove era una linea neutra di un dato frammento, emergeranno colla rottura due poli eteronimi, dotati di una sentita azione induttrice esterna; epperò ciascun minuzzolo apparirà sempre *bipolare.*

Osser. XIX. Tutti questi minuzzoli poi in cui s'è diviso l'ago primitivo, ove siano disposti ancora secondo l'ordine che tenevano prima, spiegheranno coi loro estremi affacciati una reciproca azione attrattiva, soddisfacendo la quale col ridurli tutti e successivamente a buon contatto colle rispettive sezioni di rottura, produrranno un'azione induttrice risultante molto distinta agli estremi liberi, e pochissimo appariscente tra due consecutive sezioni.

Pertanto questi minuzzoli della sottile calamita spezzata, risultando tutti polarizzati concordemente e coerenti tra loro nel senso longitudinale, rispondono perfettamente a quanto si disse sopra (Cor. 2) pei granelli di limatura, che costituiscono una linea magnetica, irradiante da un medesimo polo.

§ 15. Le precedenti osservazioni (XVI a XIX) relative alla polarizzazione magnetica corrispondono in modo perfetto a quella serie di fatti relativi alla polarizzazione permanente dei coibenti elettrici quali furono esposti nella precedente Nota [1], e segnatamente descritti nelle sperienze III, IV e V.

Anche là il sistema dei due coibenti polarizzati dal mutuo strofinio, appariva *neutro* quand'erano disposti a mutuo contatto, ed allora manifestavano una sensibile aderenza fra di loro; vincendo la quale e discostandoli, riapparivano in entrambi

[1] *Su la polarizzazione elettrica delle lamine coibenti.* Nota di Gio. Cantoni. Atti dei Lincei, Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. XIV. 1882.

le esterne loro influenze induttrici, opposte però nel verso dall' uno all' altro; ed insieme riapparivano le tendenze al loro mutuo accostamento. Pertanto:

Cor. 18. Così nella polarizzazione elettrica, come nella magnetica, lo stato di maggior coerenza di un sistema, elettrico o magnetico che sia, corrisponde ad un minimo per le sue azioni induttrici rispetto ai corpi esterni.

§ 16. Le predette ultime osservazioni su la suddivisione d'una calamita offrono una base abbastanza sicura per formulare una teoria fisica su la costituzione dei corpi magnetici, quale, all'incirca, fu già proposta da alcuni fisici del passato secolo.

Da che tutti i minuzzoli di un magnete si mostrano dotati di polarità, ovvero sono tutti bipolari, si può logicamente ammettere che la bipolarità sia una proprietà inerente alle più minute particelle, che chiameremo *elementi* di un qualunque corpo magnetico.

Perciò un corpo magnetico potrà essere considerato quale un sistema, costituito da un aggregato di elementi magnetici, i quali, oltre alle comuni proprietà di reciproca gravitazione molecolare, e di vibrazione termica, correlativa alla temperatura ed alla caloricità degli elementi stessi, sarebbero anche dotati di due opposte azioni polari, probabilmente dovute ad un peculiar loro moto di rotazione attorno un proprio asse di figura. E per siffatta bipolarità gli elementi stessi si influenzerebbero mutuamente nel senso di accostare i rispettivi loro poli eteronimi, e di discostare gli omonimi: oltrechè si ammetterebbe che i singoli elementi siano suscettibili di ruotare gli uni rispetto agli altri, e che l'asse di polarità di ciascun elemento possa pur ruotare attorno al centro di massa dell' elemento stesso.

Secondo questa teoria un corpo magnetico, per sè solo, cioè supponendolo sottratto ad ogni influenza d' altri corpi magnetici esterni, costituirebbe un sistema di elementi bipolari, i quali, grazie alle mutue loro influenze ed ai possibili loro moti rotatorî, dovrebbero disporsi in tal modo che un dato polo di un qualunque elemento trovisi circondato, oltre che dal proprio polo eteronimo, da quelli, pure eteronimi, di altri cinque elementi ad esso contigui. Con questa disposizione verificherebbesi fra i sei elementi considerati un legame polare più saldo che con qualsiasi altra disposizione. E, verificandosi poi la stessa condizione per ciascun gruppo di sei elementi costitutivi del dato corpo magnetico, risulteranno in questo massime le azioni di coerenza fra poli eteronimi, e minime invece le azioni repulsive fra poli omonimi, e quindi ancora saranno minime le azioni induttrici risultanti nel sistema per rispetto ad altri corpi magnetici esteriori al medesimo.

Supponendo poi omogenei tra loro tutti gli elementi di un dato corpo magnetico, e quindi ritenendo eguale la intensità delle azioni bipolari per ciascuno di essi, l'anzidetto stato di cose si verificherà in un solido magnetico di figura prismatica retta a sezione rettangolare ed a struttura uniforme (qual' è il caso delle calamite suddescritte) quando si verifichino per esso le condizioni seguenti:

1. Che esso sia costituito da un numero grande di piccoli elementi magnetici, distribuiti questi in tanti strati, piani e paralleli ad una delle maggiori faccie longitudinali del prisma, e discosti gli uni dagli altri quant' è la distanza dei centri di massa di due contigui elementi;

2. Che ciascuno di codesti strati sia costituito da tante serie lineari e parallele

di elementi, in ognuna delle quali gli elementi stessi abbiano il loro asse di bipolarità diretto secondo una medesima retta, passante anche pel rispettivo loro centro di massa, e tutti coi rispettivi poli omonimi volti verso un medesimo estremo della serie stessa, e quindi coi poli eteronimi di due successivi elementi aderenti fra loro;

3. Che le orientazioni bipolari di codeste serie lineari e parallele d' un medesimo strato vadano invertendosi da una ad altra serie contigua, in modo da riescire alternate successivamente codeste orientazioni delle singole serie d'un dato strato.

4. Che infine risultino similmente alternate fra loro successivamente le orientazioni delle serie lineari costituenti uno strato piano di elementi perpendicolare agli strati dianzi considerati.

Posto tuttociò, accadrà che, per una qualunque delle interne serie lineari, gli elementi di essa saranno orientati in un verso opposto a quello delle quattro serie lineari, contigue alla medesima, cioè giacenti in due piani tra loro normali ed intersecantisi secondo l'asse della serie anzidetta. Ed in tal modo si troveranno soddisfatte le azioni interne di coerenza magnetica nel sistema.

§ 17. Oltre di che la predetta teoria ben si presta a spiegare la varia risultanza delle influenze esterne ed interne nelle singole parti di un sistema magnetico, costituito secondo che essa suppone per produrre un efficace azione induttrice all'esterno.

Basta all' uopo, considerare quanto accadrà in una serie di elementi bipolari, concordemente orientati, applicandovi il principio galileano della indipendente coesistenza di più movimenti in un medesimo punto materiale, nel modo da me già usato (¹) per comporre le singole e reciproche azioni induttrici di più elementi elettrici.

Supponiamo d'avere cinque elementi bipolari, omogenei ed equipollenti, indicati rispettivamente col simbolo $a.b$.

Qualora essi siano concordemente orientati, ma posti a tali distanze rispettive che risultino insensibili per ciascun d'essi le mutue loro azioni induttrici polari, li potremo rappresentare così

$$a.b \qquad a.b \qquad a.b \qquad a.b \qquad a.b$$

Quando invece gli elementi stessi si trovino tanto vicini coi rispettivi loro estremi polari da costituire una serie lineare, presa per unità l'azione induttrice d'un polo su altro ad esso omonimo e successivo, la consociazione delle rispettive induzioni omonime, procedendo da uno ad altro estremo della serie stessa, potrà rappresentarsi nel modo seguente, mercè i numeri di unità d'azione poste al disotto di ciascun polo;

	$a.b$:	$a.b$:	$a.b$:	$a.b$:	$a.b$
Azioni omonime complessive:	5 1	4 2	3 3	2 4	1 5
Azioni esterne parziali risultanti in ciascun elemento	$4a$	$2a$	0	$2b$	$4b$
Azioni interne soddisfatte in ciaschedun elemento	$1ab$	$2ab$	$3ab$	$2ab$	$1ab$

Da qui apparisce chiaro che:

(¹) *Su la teoria della pila volliana*, Nota 2ª, § 4. Atti dei Lincei, Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, ser. 3ª, vol. VII. 1880.

1° L'azione induttiva esercitata verso l'esterno riesce nulla nell'elemento mediano della serie, e va poi rapidamente aumentando negli elementi, col procedere verso le due estremità della serie (Cor. 7);

2° Il massimo valore delle azioni interne soddisfatte, per neutralizzazione di influenze eteronime equipollenti, si verifica nell'elemento mediano, e va poi gradatamente decrescendo negli elementi laterali, procedendo verso gli estremi della serie (Cor. 9).

Analoghe deduzioni, ed ancor più spiccate, si caverebbero considerando la consociazione — col medesimo principio — delle influenze scambievoli di tutti gli elementi di un fascio costituito da cinque serie lineari, concordemente orientate ed accostate parallelamente attorno alla serie mediana (§ 16).

§ 18. Secondo la predetta teoria il fenomeno dell' induzione magnetica temporanea del ferro dolce accennerebbe ad una notevole facilità con cui i predetti elementi possono ruotare col proprio asse bipolare intorno al rispettivo centro di massa. Talchè, quando codesti elementi si trovano in prossimità di un centro magnetico, vengono da questo orientati, almeno in parte, in modo concorde, vincendo in parte proporzionata la loro interna coerenza magnetica. Ed ove poi si aumenti grado a grado la distanza di codesto centro perturbante, sino ad allontanarlo di molto, dovrà andar scemando il numero degli elementi da esso orientati nel modo sovradetto, obbedendo questi ancora alle interne azioni di coerenza magnetica.

Però il vario grado di resistenza che i diversi corpi magnetici offrono a codesta rotazione intestina dei rispettivi elementi può denominarsi — analogamente a quanto si usa pei fenomeni elettrici — *coibenza magnetica relativa.*

Quei corpi in cui questa coibenza è minima, come nel ferro dolce, entrando in un campo magnetico, acquistano assai facilmente, per semplice induzione, la *temporanea polarizzazione*, e con altrettanta facoltà ripigliano poi, uscendo da quel campo, lo *stato neutro.*

All' incontro quei corpi ne' quali codesta coibenza magnetica è notevole, come nell' acciajo, e più ancora nell' acciajo temperato, difficilmente perdono la *polarizzazione permanente*, quando l' abbiamo acquistata mercè un processo di diretta magnetizzazione. Ma poi, con altrettanta difficoltà l'acquistano, ove siano in istato neutro; talchè, oltre all' influenza d' un campo magnetico efficace, richiedono un lavoro commisurato alla rispettiva loro resistenza interna, e prodotto, di solito, da azioni meccaniche o termiche, atte ad imprimere ai rispettivi loro elementi vibrazioni elastiche, abbastanza ampie e durature.

§ 19. Ma, d'altronde, per conservare a lungo in questi corpi coibenti tale stato di polarizzazione magnetica, conviene ovviare od attenuare possibilmente ogni influenza esterna che cospiri colle loro interne azioni di coerenza magnetica.

Perciò bisognerà sottrarre possibilmente il magnete dalle rapide ed alterne variazioni nella temperatura e dalle azioni meccaniche capaci di farne vibrare elasticamente gli elementi. Imperocchè tanto le vibrazioni termiche quanto le elastiche possono indurre tali spostamenti negli aspetti relativi degli elementi magnetici, da rendere efficaci, almeno parzialmente, le loro azioni di coerenza magnetica.

Osser. XX. Sono notissime le varie sperienze colle quali si prova che una verga

d'acciaio, avente il suo asse diretto lunghesso un meridiano magnetico terrestre, se non è punto magnetizzata, può acquistare lo stato magnetico permanente e sempre più spiccato, oppure può perderlo gradatamente, se già lo possiede — secondo che ha i suoi poli disposti come richiede il magnetismo terrestre, oppur contrariamente, — e ciò soltanto col percuoterla ripetutamente a martello, o meglio collo scaldarla di molto e raffreddarla di poi, in modo rapido e alterno.

Similmente accade che per le inevitabili variazioni di temperatura dell'ambiente, e pei fortuiti scuotimenti del sostegno e del mezzo, una verga d'acciaio perde gradatamente la magnetizzazione comunicatale, qualora la si abbandoni, sprovveduta d'ogni armatura in ferro, in una direzione prossima a quella del meridiano magnetico, ed orientata del pari del gran magnete terrestre, cioè coi poli omonimi a riscontro; giacchè in tal caso, il magnete terrestre tende a produrre per induzione, nel magnete artificiale una polarizzazione opposta a quella impressagli colla magnetizzazione.

§ 20. Anzi, da tutte le cose suesposte, e segnatamente dalle osservazioni XIV e XV, si trae una norma generale per la conservazione dello stato magnetico in una od in più calamite; la quale norma venne già applicata da lungo tempo nella costituzione dei così detti *magazzeni magnetici;* forse senza aver mente al principio su cui era fondata l'utilità di tale pratica. Codesta norma si riassume nel seguente:

Cor. 19. Per conservare a lungo la magnetizzazione di più calamite convien disporle per modo che formino un tale *sistema*, che diremo *conservativo*, nel quale risulti massima la coerenza interna, e quindi minima la efficienza esteriore.

Per ottenere cotesto intento giova sempre il costituire ciò che diremo un *circuito magnetico chiuso.*

Osser. XXI. Così è notorio che per conservare una calamita foggiata ad U, basta applicare di contro ai suoi estremi una verga di ferro dolce, comunemente chiamata *àncora.* Questa, assumendo per induzione la polarità opposta a quella della calamita, e spiegando coi poli di quest'ultima una forte aderenza, viene appunto con essa costituendo un sistema, in cui le azioni interne risultano tanto efficaci, da apparire svigorite e quasi annullate le azioni induttrici esterne del sistema medesimo. E con ciò riesce favorito il mantenimento della polarizzazione nel magnete.

Infatti queste, che denominammo *azioni di coerenza magnetica* rispondono ad una assidua e doppia influenza che le particelle del magnete esercitano su quelle del ferro per orientarle in verso opposto al proprio, e che alla lor volta le particelle così orientate del ferro spiegano, per induzione, su le particelle del magnete per orientarle in accordo coll'orientamento preesistente nelle stesse particelle del magnete.

Ond'è poi che le sovradette azioni perturbatrici, dovute alle variazioni termiche od alle vibrazioni elastiche, le quali riescono svantaggiose, come abbiam veduto, per un magnete disarmato ed inopportunamente orientato, possono invece giovare per orientare un maggior numero di particelle nel magnete armato.

Osser. XXII. Quando poi si abbiano due magneti prismatici, retti, di eguali dimensioni e magnetizzati press'a poco in egual grado, si otterrà un circuito magnetico chiuso coll'accostare lateralmente le due verghe prismatiche coi poli eteronimi a fronte, e coll'applicare agli estremi liberi di esse due verghette di ferro dolce, aventi sezioni

eguali a quelle dei magneti. Queste, a modo di due àncore, saranno fortemente orientate per induzione dai due poli ad esse contigui, talchè insieme colle due calamite tenderanno a costituire un sistema di quattro magneti, due temporarî e due permanenti, ne' quali essendo a riscontro per ogni parte ed a mutuo contatto due poli eteronimi, risulteranno molto vigorose le mutue azioni interne; poichè ognuna di esse tenderà a rinvigorire, colla scambievole sua azione induttrice, la orientazione degli elementi magnetici in ciascuna parte del sistema.

Un analogo effetto si otterrebbe anche con quattro calamite rette, di egual momento magnetico, disposte, a modo dei quattro lati d'un rettangolo, coi rispettivi poli eteronimi a mutuo contatto : s'avrebbe ancora un circuito magnetico chiuso. Se non che le armature in ferro dolce della precedente combinazione raggiungono meglio l'intento, appunto per la maggior facilità al ruotare dei loro elementi magnetici.

Queste disposizioni di cose risultano analoghe a quella indicata sopra nella osser. XV, dove sei calamite di egual figura e di eguale intensità magnetica, consociate successivamente coi poli alterni, diedero appunto uno spettro indicante un minimo di azioni esterne, epperò un massimo di azioni interne.

Emerge adunque che:

Cor. 20. Un *circuito magnetico chiuso* rappresenta un *sistema conservativo* dell'energia magnetica, sia propria delle sue parti, sia a queste comunicata per azioni esterne.

§ 21. La teoria fisica suesposta al § 16, risponde altresì e perfettamente ai fatti fondamentali, più addietro dichiarati, del magnetismo.

Così le linee d'azione magnetica rappresentate negli spettri, là dove esse, partendo da due poli eteronimi, tendono ad accostarsi e ad unirsi in modo da formare una curva di accordamento (*Corol.* 4), oltrechè ci rivelano lo stato di coerenza magnetica dei singoli successivi granellini di ferro, costituenti siffatte curve, ci porgono poi, colla loro tendenza al ridursi parallele all'asse del magnete, una esplicita rappresentazione fisica, all'esterno del magnete stesso, di quanto verificasi nello interno di esso, per rispetto alla disposizione generale ed alle reciproche influenze de' suoi elementi magnetici bipolari, quali si suppongono nell'anzidetta teoria fisica.

Infatti qui appar chiaro che le dette curve di accordamento mirano a costituire, tutt'all'intorno del magnete un complesso di influenze, atte a produrre, in un con esso, un circuito magnetico chiuso, ossia un *sistema conservativo* (*Cor.* 20) della energia magnetica interna, quale appunto può risultare da una convenevole consociazione di magneti e di corpi magnetici (Osser. XV, XXI e XXII).

§ 22. La stessa teoria, avvalorata dalle indicazioni degli spettri magnetici, porge altresì una facile dichiarazione dei fenomeni più generali del magnetismo terrestre.

Già il Gilbert, nell' opera succitata, aveva intraveduta la stretta relazione che corre tra le linee di limatura ravvolgenti un magnete e le linee di direzione degli aghi calamitati determinate dall' azione magnetica su questi esercitata dalla terra.

Ed invero si consideri lo spettro disegnato da un breve magnete artificiale prismatico sovra un piano orizzontale, simile a quello dato da una delle calamite dello spettro n. 2 dell'annessa tavola litografica, ove fosse da solo; e in pari tempo si immagini che il detto spettro compia una mezza rotazione attorno all'asse di figura del magnete stesso. Riflettendo su un tal supposto, emerge chiaro che:

1. Ognuna delle curve di accordamento fra due punti eteronimi (rispetto alle loro risultanti esterne § 17) di tale calamita descriverà attorno all' asse anzidetto una superficie ellissoidica. Ora, secondo ciascuna di siffatte superficie di rivoluzione, ed in relazione alla latitudine d'ogni suo punto (contata dal piano equatoriale, cioè passante per la linea neutra del magnete) ed alla rispettiva distanza dall'asse di rotazione, si disporrebbero, tangenzialmente ad essa, i corpuscoli magnetici dotati di bipolarità, qualora fosse in questi annullata l' azione della gravità. Oltre che essi, sulla superficie medesima, si disporrebbero orientati in tante serie lineari, corrispondenti ad altrettanti meridiani di essa, pur senza confondersi tra loro, attesa la mutua repulsività nel senso trasversale delle serie di elementi bipolari concordemente orientati (*Corol.* 3).

2. Un' analoga repulsione, e per la stessa legge, si eserciterà tra l' insieme delle curve meridiane appartenenti ad una data superficie di rivoluzione e quelle che appartengono sia all' analoga superficie da essa internamente involta, sia a quella dalla quale essa è esternamente avvolta.

3. Nel senso longitudinale dei singoli meridiani di ognuna di tali superficie si eserciterà invece un' azione di reciproca trazione tra uno ed altro elemento, commisurata alla loro coerenza magnetica (*Corol.* 2).

4. Considerando poi nello spettro anzidetto le linee d' azione che partono, tra loro divergenti, dai due estremi liberi d'un magnete, ben si comprende che, mercè la supposta rotazione attorno al di lui asse, ogni linea genererà una superficie conica, secondo la quale si disporrebbero quei corpuscoli magnetici, supposti privi di gravità, e che le generatrici di siffatte successive superficie coniche, per riguardo alla reciproca repulsività trasversale delle singole serie lineari di elementi, presenteranno un' inclinazione sempre minore rispetto all' asse, mano mano che da questo si discostano i rispettivi loro punti di partenza.

§ 23. Ora abbiasi un magnete naturale, lavorato a sfera per modo che la linea de' suoi poli (asse magnetico) corrisponda ad un diametro della sfera medesima; e lo si immagini segato da un piano passante pel detto asse. Un tal piano segherà altresì, all'infuori della sfera, secondo altrettanti meridiani magnetici tutte le superficie ellissoidiche generate dalla rotazione attorno all' asse medesimo dalle varie linee d' azione che accordano tra loro due punti eteronimi dell' asse stesso (§ 22, 1 e 2).

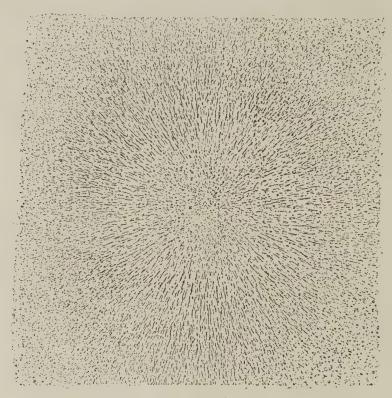
S' immagini ora un breve ago calamitato all' esterno della sfera, sospeso pel suo baricentro, intorno al quale potesse liberamente ruotare. La direzione e l' orientazione che esso assumerà dipenderà dalla posizione del raggio della sfera passante pel detto baricentro, rispetto all' equatore magnetico della stessa, ossia dipenderà dalla latitudine del predetto punto di rotazione dell' ago.

Se questo punto fosse compreso nel piano dell'equatore, l'ago si dirigerà parallelamente all'asse magnetico, orientato in opposizione all'orientazione dell'asse medesimo.

Col crescere della latitudine l'ago s' inclinerà più e più col suo polo eteronimo a quello della sfera cui si va accostando, così da riuscire tangente alla curva meridiana, giacente nella superficie ellissoidica che comprende quel punto (§ 22, 1).

Ed a latitudini assai elevate, cioè in prossimità d' uno dei poli magnetici si rivolgerà ad esso così da disporsi secondo una generatrice delle superficie coniche prodotte dalla rotazione attorno alle asse delle linee irradianti dal polo stesso (§ 23, 4).

Questo stato di cose è chiarito singolarmente dai seguenti due spettri, prodotti secondo due piani tra loro perpendicolari da un magnete naturale, lavorato a sfera nel modo anzidetto, e del diametro di oltre un decimetro [1].

Spettro P — *Proiezione polare.*

Osser. XXIII. Lo spettro P è prodotto su lo specchio orizzontale, sovrapposto a poca distanza dalla sfera, avente il proprio asse magnetico in direzione verticale.

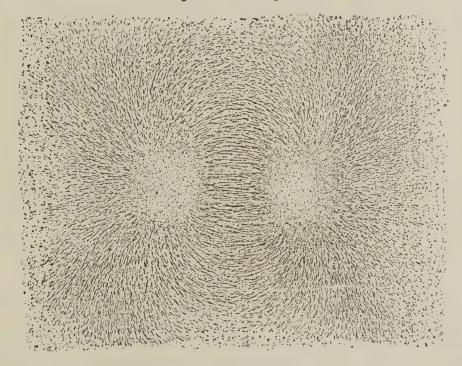
Nella parte centrale dello spettro, che riesce sovrastante ad un polo della sfera, si scorgono soltanto dei punti, tra loro diradati [2], che segnano le sezioni fatte dal

(1) I due spettri P ed E, qui riprodotti, corrispondono in modo esatto a quelli ottenuti sperimentalmente col far vibrare con dolcezza ed in più punti la lastra di vetro sottile ed omogenea, cosparsa di fina limatura di ferro dolce, e sovrapposta orizzontalmente alla calamita sferica; ma poi le linee e figure, così disegnate regolarmente dalla limatura, venivano staccate dalla lastra, applicandovi su un foglio flessibilissimo di fresco ingommato. Ora, per quanta diligenza si usi nell'adagiare sul vetro codesto foglio, qualche spostamento accade inevitabilmente nella disposizione dei granellini di ferro. Però, invece di farle modificare con ritocchi d'artista a genio dell'incisore, preferii lasciare le cose come risultarono, sebbene tal poco deformate.

(2) Per le cagioni accennate nella nota precedente, la parte centrale di questa proiezione polare, in luogo di presentare dei semplici punti, un po' discosti tra loro, come apparivano nello spettro reale, non perturbato dalla sovrapposizione della carta gommata, e come distintamente si veggono nei due campi polari della proiezione equatoriale E, offrono qui l'aspetto di brevi linee variamente curvate. Perciocchè i filetti di limatura, che in tal parte dello spettro sorgevano quasi normalmente sul piano della lastra, coll'applicazione del detto foglio, si schiacciano, assumendo disposizioni svariate.

piano dello specchio alle linee, tra loro divergenti, che irradiano dal polo stesso, e che colla loro rotazione attorno all'asse magnetico generano le superficie coniche sopra accennate (§ 22, 4). Perciò questi punti presso il centro dello spettro sono più rari che non a qualche distanza, attesa quella energica repellenza delle linee d'egual orientazione che ingenera gli spazi nudi o quasi, in prossimità dei poli nelle sezioni longitudinali dei magneti prismatici (*Cor.* 5), oppure framezzo a due poli omonimi affacciati (Osser. XIII, 4).

Più lungi dal centro e verso il contorno dello spettro si veggono tante lineette, convergenti al centro, le quali corrispondono ad altrettante tangenti ai meridiani tracciati su le superficie ellissoidiche (§ 22, 1) generate dalla rotazione delle curve di accordamento fra i due poli della sfera magnetica. Tutte codeste lineette rappresentano, per ciascun punto del piano dello specchio (piano segante il campo magnetico del polo più prossimo) la direzione d'un ago calamitato governato dal polo stesso, ed indicante la *declinazione* magnetica in tal punto.

SPETTRO *E* — *Proiezione equatoriale.*

Osser. XXIV. Lo spettro *E* fu prodotto sullo specchio orizzontale, portante finissima limatura di ferro, dalla sfera magnetica suaccennata, posta al disòtto ed a poca distanza da esso specchio, diretta però col proprio asse magnetico orizzontale, e quindi parallelo al piano dello spettro.

Perciò lo spettro *E* avrà la sua linea mediana nel piano dell'equatore magnetico della sfera, e darà una sezione fatta al campo d'azione della medesima in direzione normale all'altra sezione fatta precedentemente nel campo stesso e rappresentata dallo spettro *P*. Inoltre lo spettro *E* riesce assai più complesso dello spettro *P*,

poichè in esso appare la doppia influenza dei due poli, ovvero la interferenza dei loro due campi d'azione. Infatti:

Nella parte mediana dello spettro *E*, ed in corrispondenza all'asse magnetico della sfera, si osserva disegnato un fascio di linee, pressocchè parallele all'asse medesimo. Sono le sezioni fatte dal piano dello specchio ai piani meridiani delle varie superficie ellissoidiche, aventi il loro asse comune nella retta dei poli (§ 22, 1), e che per ciò attraversano il piano dell'equatore magnetico in direzione ad esso normale. Queste linee, col loro apparente parallelismo, ricordano le curve d'accordamento che attraversano la linea neutra, o meglio il piano neutro d'una faccia d'un magnete prismatico (*Cor.* 9).

Agli estremi di codesto fascio di lineė meridiane appaiono due campi semplicemente punteggiati ([1]), analoghi al campo centrale dello spettro *P*. Ivi hannosi le sezioni fatte dal piano dello specchio, in direzione però obliqua rispetto all'asse, alle superficie coniche corrispondenti alla rotazione delle linee divergenti che irradiano dagli estremi dell'asse magnetico. Queste sezioni risultano adunque dei semplici punti, secondo i quali il piano dello specchio segherebbe gli aghi calamitati, diretti verso l'un polo, ed indicanti l'*inclinazione magnetica* ne' punti medesimi.

All'esterno del fascio di curve meridiane e dei due campi punteggiati, si rilevano ancora abbastanza nettamente le sezioni fatte dal piano dello spettro alle curve, le quali, pur lungi dall'asse, segnano le linee di collegamento dei poli, manifestando l'estensione nello spazio circostante alla sfera dei campi d'azione dei due poli, i quali, mercè i corpi magnetici che entrano in quel campo tendono a costituire, attorno al magnete, un sistema conservativo (§ 21).

Dalle premesse osservazioni si può inferire che:

Cor. 21. I fenomeni di declinazione e d'inclinazione che presentano gli aghi calamitati all'esterno della superficie terrestre manifestano l'esistenza d'un campo magnetico, ossia d'un grande sistema di linee d'azione magnetica, in modo conforme a quanto può ottenersi all'esterno di una sfera magnetica.

E d'altra parte le variazioni periodiche negli elementi magnetici d'ogni punto terrestre tendono a provare che il nostro pianeta s'aggira nel campo magnetico del sole, della luna, e fors'anco d'altri pianeti di maggior mole del sistema solare, le cui particolari influenze vanno periodicamente variando colle rispettive loro distanze dalla terra, e pur'anco colle modificazioni continue che avvengono nello stato fisico della superficie solare.

§ 24. La medesima teoria fisica del § 16 su la costituzione dei corpi magnetici trova un valido appoggio in parecchi fatti importanti, riflettenti le interne modificazioni che tali corpi subiscono nell'atto su cui assumono o perdono la polarità magnetica, mercè l'azione delle correnti elettriche; poichè que' fatti ricevono facile dichiarazione mercè la detta teoria.

([1]) In questa proiezione equatoriale, attesa la maggior distanza dei due poli del magnete dal piano dello specchio, e quindi la minor vigoria orientatrice da esso spiegata su la limatura, riescono meglio distinte e diradate, che nol siano nella proiezione polare, le punteggiature suindicate, cioè le intersezioni del piano anzidetto colle generatrici delle superficie coniche, prodotte nel modo suesposto.

Osser. XXV. Un' asta in ferro dolce, disposta col proprio asse secondo l' asse d'un' elica formante parte d'un circuito voltiano, nell'atto stesso in cui acquista la polarità temporaria nel senso longitudinale, subisce un allungamento, proporzionale al quadrato dell'intensità della corrente circolante nell'elica magnetizzante. Quest'allungamento in gran parte, è transitorio, cioè scompare cessando l'influenza magnetizzante; essendo l'allungamento residuo proporzionato alla polarità permanente nell'asta, cioè al grado della coibenza magnetica relativa (§ 18) del ferro che la costituisce.

Un' asta di acciaio presenta fenomeni analoghi, ma molto meno distinti. Cioè l'allungamento totale, dovuto alla magnetizzazione è minore che nel ferro, a parità di condizioni nel resto; mentr' è poi, proporzionatamente, maggiore l'allungamento permanente rispetto al transitorio, e quindi molto minore riesce l'accorciamento conseguente alla cessazione della corrente. E se poi s'inverte nell'elica la direzione della corrente, si osserverà un momentaneo accorciamento; scomparendo per un istante il precedente allungamento, quando cessa la polarità permanente anteriore, per far luogo ad altro allungamento, conseguente alla polarità invertita (¹).

Ora, come s'è detto sopra, durante la magnetizzazione temporaria, il ferro dolce, i cui elementi magnetici stavano dianzi disposti per modo da soddisfare alle mutue loro influenze interne di coerenza magnetica (Cor. 17), sì da apparire in istato neutro, tenderanno ora, con opportune variazioni nelle direzioni dei loro assi, ad assumere tali altre disposizioni relative, così da spiegare un' azione polare longitudinale esterna (di induzione), commisurata a quella che su di essa spiega, in opposto verso, l'elica voltiana. Per tal guisa le azioni interne vengono svigorite in proporzione all'azione induttrice esterna da produrre, surrogandosi la repulsione magnetica interna alla coerenza magnetica (Cor. 14, 15, 16).

E reciprocamente, svigorendosi o cessando l'azione magnetizzante dell'elica — la quale nel suo interno rappresenta un efficace campo magnetico — gli elementi magnetici dell'asta di ferro si sposteranno nel senso di riprendere le rispettive loro disposizioni per le quali le interne azioni di coerenza magnetica riacquistino il sopravvento su le azioni induttrici esterne, con proporzionato decremento alla repulsività magnetica dianzi suscitata da essa.

Perciò il passaggio dallo stato neutro allo stato di polarità longitudinale fa aumentare la lunghezza della verga di ferro proporzionatamente al predetto aumento nella mutua repulsività degli elementi magnetici; e reciprocamente il ritorno verso lo stato neutro fa decrescere la lunghezza dell' asta medesima secondo l' eccedenza della repulsività temporanea su la residua repulsività permanente de' suoi elementi.

Fenomeni dello stesso ordine si verificheranno in un' asta di acciaio col prodursi della polarità longitudinale o collo scemare di questa: fuorchè risulteranno meno distinti che in un' asta di ferro. Cioè l'allungamento concomitante la magnetizzazione risulterà proporzionatamente minore, in relazione alla maggior coibenza magnetica

(¹) I particolari delle esperienze qui sommariamente accennate si trovano nella importante Memoria del prof. Righi: *Su le variazioni di lunghezza che accompagnano la magnetizzazione*, Bologna 1880, nella quale l'autore avendo tolte di mezzo parecchie fonti di errori o d'incertezze nella misura delle piccole variazioni di lunghezza con un suo ingegnoso e squisito artifizio, pote' ottenere risultati più espliciti e sicuri di quelli avuti da Joule, da Wertheim e da Wiedemann.

dell'acciaio (resistenza alla rotazione degli elementi magnetici), e l'accorciamento conseguente al cessare dell'azione magnetizzante riuscirà assai minore, atteso il notevole valore del magnetismo residuo o permanente nell'acciaio.

§ 25. Vuolsi però avvertire che le aste di ferro e di acciajo, in opera dell'azione magnetizzante delle correnti voltiane, possono assumere due ben diverse forme di polarità, cioè la longitudinale e la trasversale. Dicesi *polarità longitudinale* quella che comunemente si ottiene, come si disse sopra, col porre l'asta entro un'elica cilindrica che traduce la corrente, cogli assi loro coincidenti. Tale è lo stato di polarità, le cui linee d'induzione abbiam vedute disegnate negli spettri dell'unita tavola litografica.

Chiamasi invece *polarità trasversale* quella che si ottiene facendo passare direttamente la corrente voltiana lunghesso l'asta medesima. Qui, in luogo dei due campi di massima azione, tra loro opposti, si può dire che ogni sezione trasversale (normale all'asse) rappresenta un circuito magnetico chiuso (§ 20), poichè gli elementi magnetici periferici (qualora l'asta sia cilindrica) costituiscono una serie d' eguale orientazione, ripiegata a forma di anello.

Osser. XXVI. Un breve e sottile ago calamitato, sospeso pel suo baricentro, ed accostato a questo magnete, anzichè dirigersi parallelamente all'asse dell'asta, come farebbe in prossimità d'un' asta magnetizzata longitudinalmente, si dirigerà perpendicolarmente all'asse medesimo. Facendo poi ruotare l'asta predetta, per modo che i varî punti del perimetro d'una data sua sezione trasversale si presentino successivamente al disotto del detto baricentro, l'ago si disporrà sempre tangenzialmente ai singoli punti del perimetro stesso, serbando sempre la medesima orientazione, opposta a quella della serie anulare di elementi magnetici costitutivi quel perimetro. E questa azione direttrice si manifesterà del pari e con eguale intensità per qualsiasi altra sezione trasversale dell'asta stessa.

L'accennato stato di cose si manifesterà ancor più chiaro col ravvolgere la detta asta entro fina limatura di ferro, e coll'estrarnela di poi cautamente. L'asta ne escirà colla propria superficie cilindrica tutta ricoperta, equabilmente, di limatura; non però in modo continuo, giacchè la limatura la avvolgerà, formando tanti filamenti, paralleli e tal poco discosti tra loro, a modo di altrettanti anelli, conformi a quelli costituiti nella superficie dell'asta dagli elementi di essa, ma oppostamente orientati rispetto a questi.

Osser. XXVII. Or quando un' asta di ferro dolce acquista temporaneamente la *polarità trasversale*, ponendola a far parte diretta d'un circuito voltiano, offre un sensibile accorciamento. Questo però scompare, in molta parte, coll'aprire il circuito medesimo, producendosi in tale atto un allungamento dell' asta, un po' minore del precedente accorciamento, atteso un qualche residuo dell'anteriore polarità. — Se tosto dopo s'inverte la direzione della corrente, si nota un momentaneo allungamento, susseguito tosto dopo da un nuovo accorciamento, in dipendenza della nuova polarità trasversale, opposta nel verso alla precedente. — Qualora poi l'asta medesima sia stata dapprima polarizzata longitudinalmente (Osser. XXV), allora l' accorciamento prodotto dalla polarizzazione trasversale riesce più sentito che nel precedente caso. — Però codeste variazioni dovute alla polarità trasversale son molto minori di quelle prodotte dalla polarità longitudinale, a parità di condizioni nel resto.

Analoghi fenomeni, ma assai meno spiccati si ottengono quando si polarizza trasversalmente un' asta d' acciajo, e ciò a motivo della maggiore coibenza magnetica, per la quale la *polarità residua* nell'asta, all'azione del circuito, è ben maggiore di quella che si verifica nel ferro dolce ([1]).

Ora i fatti raccolti sotto questa osservazione rispondono pure a ciò: che l'asta magnetica, passando dallo stato neutro, cioè dallo stato di massima coerenza interna, a quello di polarità, cioè di sentita repulsività interna, in ciascuna sua sezione trasversale, si produrrà una distensione nel senso radiale d'ogni sezione trasversale, e quindi una contrazione nel senso longitudinale dell'asta medesima. E reciprocamente, col cessare di parte della polarità trasversale, all' apertura del circuito, e segnatamente nel ferro dolce, contraendosi le sezioni trasversali per la cessata repulsività magnetica, si aumenterà la dimensione longitudinale, senza però raggiungere la primitiva lunghezza, in relazione alla polarità residua.

Dall' insieme poi delle precedenti osservazioni (XXV a XXVII) si può argomentare:

Cor. 22. Le variazioni nello stato di polarità esterna dei corpi magnetici sono accompagnate da variazioni sensibili nelle dimensioni di massima azione magnetica esterna. La repulsività interna crescente colla polarizzazione fa aumentare la lunghezza d'un' asta magnetica nel caso della polarità longitudinale; laddove ne fa aumentare la sezione trasversale, epperò scemare la lunghezza, nel caso della polarità trasversale.

§ 26. Altri notevoli argomenti in appoggio della tesi qui propugnata si ponno desumere dalle sperienze interessanti ed accuratissime del Righi ([2]) su le variazioni nella polarità prodotta in una data verga da una determinata forza magnetizzante, dipendenti solo dal variare la celerità colla quale questa incomincia oppure cessa di operare su la verga medesima. Eccone qui raccolte talune, riguardanti però tutte la polarità longitudinale, temporaria o permanente, suscitata in una verga magnetica disposta secondo l'asse d'un'elica cilindrica, facente parte d'un circuito voltiano.

Osser. XXVIII. La polarità temporaria, in una verga di ferro dolce, aumenta colla rapidità di chiusura del circuito, massime quando a tal magnetizzazione abbia preceduto l'azione d'una corrente opposta nel verso. Nelle aste grosse essa si produce con qualche maggiore lentezza che nelle sottili.

Ora è facile comprendere che quanto più rapida sarà, al suo principiare, l'azione magnetizzante, maggiore sarà la velocità nello spostamento degli elementi magnetici che passano dalla posizione di massima coerenza interna verso quella di repulsività, e che perciò lo spostamento prodotto anche per inerzia riescirà maggiore.

Osser. XXIX. La polarità permanente in una verga d'acciajo riesce tanto più efficace quant'è più rapida la chiusura del circuito e più lenta l'apertura: e questa influenza risulta tanto più sentita quant'è minore la tempera dell'acciajo.

Ancor qui si scorge che quanto più rapidamente s' inizia la azione magnetizzante e quindi quant'è maggiore la velocità iniziale impressa agli elementi magnetici e minore la coibenza magnetica, più spiccata ne emerge la polarizzazione; e ciò

([1]) Anche i risultati esposti in questa osservazione furono tratti dalla succennata pregevole Memoria del Righi.

([2]) *Contribuzioni alla teoria della magnetizzazione dell'acciaio,* di A. Righi. Bologna 1880.

tanto meglio se l'azione stessa è fatta sospendere lentamente, con che si evita il moto inverso per inerzia negli elementi, il quale risulta efficace se invece l' azione magnetizzante è fatta cessare rapidamente.

Osser. XXX. La polarità permanente in una verga d'acciajo si estende a strati tanto più profondi ([1]) quant'è più lenta la chiusura del circuito e più lenta l'apertura. Poichè una rapida cessazione dell'influenza magnetizzante produce negli strati superficiali dell' asta una diminuzione nella polarità per essa già acquistata, e può persino provocarvi una polarità inversa a quella residua negli strati interni.

Ancor queste sperienze concorrono a provare che una notevole velocità impressa sino dal principiare dell'azione magnetizzante, agli elementi dell'asta, nel senso di sottrarli all'interna loro coerenza magnetica, favorisce la polarizzazione dei successivi strati del sistema. Laddove, restituendoli repentinamente a quest'influenza intestina, appunto per la notevole velocità che così acquistano gli elementi stessi in senso contrario al precedente, vien disfacendosi parte dell'acquistata orientazione, per prodursene un'altra di opposto verso, precipuamente negli strati superficiali.

Osser. XXXI. Spesso accade che le aste d'acciajo di breve lunghezza acquistano una polarità diversa dell'ordinario (cioè dovuta al particolare andamento della corrente nell'elica secondo l'interpretazione d'Ampère), e ciò segnatamente quando la corrente sia poco intensa e quando la chiusura sia stata lenta e l'apertura del circuito molto rapida.

Pur in questi casi appar chiaro che l' inversione nella polarità è dovuta alla notevole velocità di rotazione degli elementi nell'atto che fan ritorno alla posizione di coerenza magnetica interna, lorchè cessa repentinamente l' azione magnetizzante esterna, per modo che oltrepassano tal posizione, e s'arrestano poi dalla banda opposta di questa, grazie alla coibenza magnetica.

Dalle or esposte osservazioni (XXVIII a XXXI) emerge chiaramente che:

Cor. 23. Per produrre o togliere la polarità in un sistema magnetico occorrono effettivi spostamenti, con varie velocità e direzioni in tutte le parti minime (negli elementi bipolari) del medesimo. E le risultanze sono in ogni caso proporzionali alle azioni meccaniche risultanti dal conflitto tra le reciproche influenze di coerenza magnetica degli elementi stessi, le resistenti azioni aggregatrici delle molecole costituenti un tale sistema, e le influenze orientatrici esercitate dai sistemi magnetici ad esso circostanti (campo magnetico).

§ 27. Meritano pure ricordo alcune recenti sperienze dei prof. Ayrton e Perry ([2]) su la varia distribuzione ed efficacia della influenza magnetica in una calamita temporaria, dovuta al diverso modo di avvolgimento della spirale elettrodinamica, in quanto che esse prestano appoggio alla teoria meccanica del magnetismo qui sostenuta.

I predetti fisici istituirono parecchie serie di osservazioni su quattro verghe di ferro dolce, affatto eguali tra loro per natura e per dimensioni (lunghe cent. 39,

([1]) Per riconoscere lo stato di polarizzazione dei varî strati d'un magnete, il Righi faceva man mano sciogliere l'acciajo entro un miscuglio d'acido cloridrico ed azotico, diluito con acqua, sicchè l'azione chimica fosse moderata e regolare, e ad ogni tanto, cavatalo dal bagno lo ripesava, e ne determinava il momento magnetico.

([2]) *On winding Electromagnets* by prof. W. E. Ayrton and John Perry. Philos. Magazine, June 1883.

diametro cent. 1,0), ciascuna poi avvolta da una spirale di egual lunghezza, ma variamente foggiata, e percorsa però sempre da una stessa corrente.

Nella verga *A* il reoforo era avvolto su tutta la lunghezza con egual numero di giri; su la *B* era tutto raccolto ai due estremi, con un numero di giri decrescente da ciascuna estremità procedendo verso il mezzo della verga; su la *C* era avvolto equabilmente, ma soltanto su una metà della verga, l'altra metà restando nuda; e finalmente la *D* era anch'essa avvolta solo per metà dalla spirale, ma con un numero di giri decrescente man mano dall'estremo al mezzo della verga. E, per meglio rilevare la distribuzione dello stato magnetico nel campo d'azione della calamita, per mezzo della limatura di ferro sparsa su una carta tesa, ritrassero gli spettri da codeste quattro forme di calamite temporarie, sempre impiegando una corrente d'eguale intensità, ed ottennero i seguenti risultati:

Osser. XXXII. La calamita *A* produce uno spettro affatto simile a quello dato da una verga d'acciajo regolarmente magnetizzata.

La *B* offre le curve circostanti agli estremi, somiglianti a quelle della *A*, fuorchè appaiono di maggior intensità: invece il campo mediano riesce molto più debole.

Colle calamite *C* e *D* si scorge una peculiare distribuzione del magnetismo: si nota una grande concentrazione di linee all'estremo coperto dal reoforo, mentre l'estremo scoperto sembra formare col suo campo un lungo polo, ma debole, con un massimo di forza vicino all'estremità interna del gomitolo, ossia vicino al mezzo della verga. Però tra la *C* e la *D* v'è questa differenza, che nella *D* appare una maggior concentrazione di forza magnetica nel polo coperto in confronto della *C*, e che il polo nudo presenta nella *D* un campo d'azione più lungo, sì da investire, alcun po' la parte coperta dal gomitolo.

Da siffatti spettri appar chiaro che:

Cor. 24. L'accumulo del reoforo presso gli estremi della verga magnetizzata produce bensì un campo più efficace in prossimità degli estremi stessi, ma più rapidamente decrescente d'intensità procedendo verso il mezzo, tanto che nella calamita *C* la parte mediana non manifestava quasi alcuna azione direttrice su la limatura.

Cor. 25. La metà scoperta delle verghe *C* e *D* sembra operare, come un'armatura, per semplice induzione della metà coperta dal reoforo.

Queste deduzioni furono confortate anche da ciò che gli anzidetti fisici sperimentarono l'efficacia di trazione degli estremi coperti delle quattro calamite nel reggere pesi, sotto l'azione d'una stessa corrente. Poichè il polo coperto dal maggior gomitolo della *D* resse 77 oncie; quello della *A* (dove il reoforo era egualmente distribuito su tutta la lunghezza della verga) resse solo 45 oncie; e quelli della *B* e *C* ressero 57 oncie cadauno. D'altra parte riconobbero, per mezzo delle deviazioni prodotte in un ago calamitato, posto a differenti distanze dal polo magnetico esplorato, che l'intensità d'azione del campo si estendeva a distanze maggiori per il polo della *A*, che per quello della *D*, cioè dove, in prossimità, s'aveva un'azione relativamente meno efficace. Pertanto:

Cor. 26. Con una data verga di ferro, una data lunghezza di reoforo avvolto su di essa, e con una data corrente si possono ottenere campi d'azione più o meno intensi in prossimità, ma reciprocamente meno o più estesi a sensibili distanze.

Ora tutte queste osservazioni concorrono a provare che:

Cor. 27. Variando la distribuzione d'una data azione magnetizzante su un dato sistema magnetico, si provoca in questo una varia orientazione de' suoi elementi magnetici, epperò una varia relazione fra le azioni esterne ed interne degli elementi medesimi.

§ 28. Da ultimo noteremo che la suesposta teoria (§ 16), oltre all'essere direttamente appoggiata dal fatto sperimentale del frazionamento d'un ago magnetizzato (*Osser. XVI*) offre, di per sè, un grado di attendibilità scientifica di gran tratto superiore a quello che razionalmente può accordarsi all'altra ipotesi — comunemente ammessa, senza diretta dimostrazione — quella cioè che suppone nelle singole particelle dei corpi magnetici la coesistenza di due speciali ed antagonistici fluidi imponderabili, il fluido *magnetico australe* ed il *fluido boreale*.

Infatti quest'ultima ipotesi è anzitutto in aperta contraddizione col principio logico della moderna dottrina della reciproca convertibilità, per equipollenza, delle varie forme di energie fisiche. Imperocchè, se veramente l'energia cinetica, l'energia termica, l'energia chimica, l'energia elettrica, l'energia magnetica sono, a perfetta vicenda, convertibili l'una nell'altra, qualunque si voglia, convien dire che esse non siano, sostanzialmente, disformi l'una dall'altra, ma siano bensì tutte omogenee tra loro, senza alcuna possibile distinzione tra la natura intima della *causa* e quella dell' *effetto.*

Ed in vero, posto che la materia elettrica può convertirsi in materia magnetica, e viceversa questa può tramutarsi in quella, e che entrambe ponno convertirsi in materia calorica od in materia luminosa, non è più logicamente ammessibile che queste varie materie siano altrettante sostanze tra loro eterogenee. Bensì le si dovranno considerare come forme diverse d'una materia unica: forme che per noi sono distinguibili, solo perchè son percepite in opera di diversi sensi o di diversi artifizî [1].

[1] Mi trattenni un po' su codesta considerazione, soltanto perchè m'avveggo esservi tuttodì dei fisici, anche valentissimi, i quali ammettono ancora l'esistenza d'una speciale materia elettrica e d'una speciale materia magnetica, rifiutandosi ad ammettere che un'energia elettrica o magnetica possa veramente convertirsi in energia termica oppure cinetica.

Eppure la tesi del Grove, qual' è qui sopra enunciata, può essere dimostrata sperimentalmente in modo ineccepibile. Fino dal 1864 (Litografia Bertotti in Milano) io pubblicai codesta forma di dimostrazione, riprodotta poi nelle mie *Lezioni di fisica* (Milano, Vallardi, 1870), e ancora, con alcune varianti, nell'opuscolo *L'omogeneità delle energie fisiche* (ibid. 1879). È una catena, costituita da varî stromenti od apparecchi (un voltametro, una lampada elettrica, un magnete temporario, un motore elettrico, un rocchetto di Rumkorff, ecc.). Essa può essere animata in tutte le parti da un efficace elettromotore voltiano, oppure da una macchina dinamo-elettrica, promuovendo così, ad un tempo, fenomeni chimici, termici, magnetici, meccanici, elettrici: oppure può essere animata soltanto in alcune parti, escludendo dal circuito momentaneamente le altre parti, mercè un'arco conduttore opportunamente applicato.

Or bene l'argomento concludente che da ciò si trae non tanto sta nell'aversene, insiememente, fenomeni tra loro assai differenti coll'impiego d'un unico motore, quanto piuttosto nel vedervisi distintamente che, sospendendo il lavoro in uno qualunque dei detti apparecchi, gli altri che rimangono nel circuito si rinvigoriscono tutti nella loro speciale operosità, e proporzionatamente alla grandezza relativa del lavoro dianzi compiuto dall'apparecchio lasciato in riposo. Con ciò emerge all'evidenza che tutti quei lavori, compiuti in organi differenti, con manifestazioni sensibili assai diverse, devono essere, obbiettivamente considerati, di una sola e medesima natura, dappoichè sono convertibili, a nostro piacimento e senza alcuna alterazione nel sistema, gli uni negli altri a perfetta vicenda.

E fu appunto cotesto l'alto significato filosofico della più acuta rivelazione del nostro Galilei. Egli sapientemente pose la distinzione tra le *qualità sensibili* e le *qualità proprie o reali* dei corpi. Le prime le differenziamo soltanto soggettivamente, con riguardo cioè alla diversa costituzione dei varî organi sensorî, per mezzo dei quali noi le percepiamo. Invece le qualità reali, cioè obbiettivamente proprie e costitutive dei corpi stessi, son quelle soltanto, senza delle quali non è dato alla nostra mente di concepire la loro esistenza ed operosità. E quest'ultime, a suo credere, si risolverebbero tutte in moti di parti materiali, di varia forma e grandezza (1).

§ 29. Ma proseguiamo l'analisi della comune teoria dei due fluidi magnetici. Indichiamo con a e b, rispettivamente, gli atomi del fluido australe e del fluido boreale. Per interpretare poi i fenomeni magnetici essa deve presupporre l'esistenza di tutte queste differenti influenze o condizioni:

1ª Azione repulsiva scambievole fra a ed a;

2ª Azione repulsiva scambievole fra b e b;

3ª Azione attrattiva mutua ed equipollente fra a e b;

4ª Azione attrattiva mutua fra le molecole gravi del corpo magnetico (2);

5ª Azione attrattiva scambievole fra queste molecole ed a;

6ª Azione attrattiva scambievole fra le stesse molecole gravi e b;

7ª Eguaglianza di quest'ultime due attrazioni per molecole magnetiche di data natura;

8° Valore variabile delle dette due azioni 5ª e 6ª col mutare la natura delle molecole magnetiche.

Grazie alla supposta coesistenza di tutte queste azioni, ogni molecola grave dovrebbe formarsi attorno al proprio centro un'atmosfera del fluido a ed altra del fluido b, le quali poi, grazie all'azione 3ª, si unirebbero tra loro, così da neutralizzarsi scambievolmente e da soddisfare insieme anche alle azioni 5ª e 6ª.

Però, allorquando queste varie azioni mutue si trovino così soddisfatte in un corpo magnetico, riesce men facile il concepire come poi un'azione esterna valga a separare i due fluidi magnetici, senza che questi abbandonino il loro comun centro di attrazione, quello della molecola magnetica.

Per riparare a questa difficoltà alcuni fisici modificarono in parte le premesse supposizioni. Immaginarono cioè che ogni molecola magnetica fosse costituita da due parti, una delle quali attraesse soltanto il fluido a, e l'altra il fluido b; senza però dichiarare come tali due porzioni d'una medesima molecola grave potessero esercitare

(1) Questa tesi fu annunciata in più d'un luogo dal Galilei. Nel *Saggiatore* fu così esposta: « I « sapori, i colori, li odori, i suoni, il colore, ecc., non sono qualità intrinseche dei corpi, ma ten- « gono solamente lor residenza nel corpo sensitivo, sì che rimosso l'animale sono tutte annichilate; « mentre nei corpi esterni, ad eccitare in noi quelle diverse affezioni, altro non si richiede che gran- « dezze e movimenti di varie dimensioni e velocità ». Io penso che i più dotti fisici e filosofi moderni non possano dir meglio e più chiaramente di quanto affermò il vero fondatore della fisica teoretica e sperimentale! E sarebbe tempo che, almeno in Italia, si seguissero per bene le savie massime galileane, e si cessasse dall' introdurre nella descrizione dei fenomeni tanti fantasimi, che, come disse Galilei in altro luogo, *non sono altro che puri nomi!*

(2) Com'è noto alcuni fisici immaginarono che, entro certi limiti di distanze minime, potesse invece darsi una reciproca repellenza fra due molecole gravi.

così differenti azioni su codesti due fluidi, e come poi potesse ciascuno di questi stare addensato in un brevissimo spazio, in onta alla presupposta repulsione scambievole delle sue parti minime ([1]).

Pertanto appar chiaro che, malgrado tutte codeste supposizioni, la interpretazione dei fenomeni magnetici fondamentali riesce soltanto assai più complicata, senza vantaggio alcuno ([2]), rispetto al più semplice presupposto del § 16, quello cioè della bipolarità propria delle molecole magnetiche, chiamate *elementi magnetici.*

§ 30. Questa conclusione mi sembra pienamente conforme a quella della mia nota precedente ([3]), dove parmi d'avere mostrato che i fenomeni fondamentali della elettromozione per istrofinìo ricevono facile interpretazione col solo supposto della bipolarità elettrica delle molecole gravi.

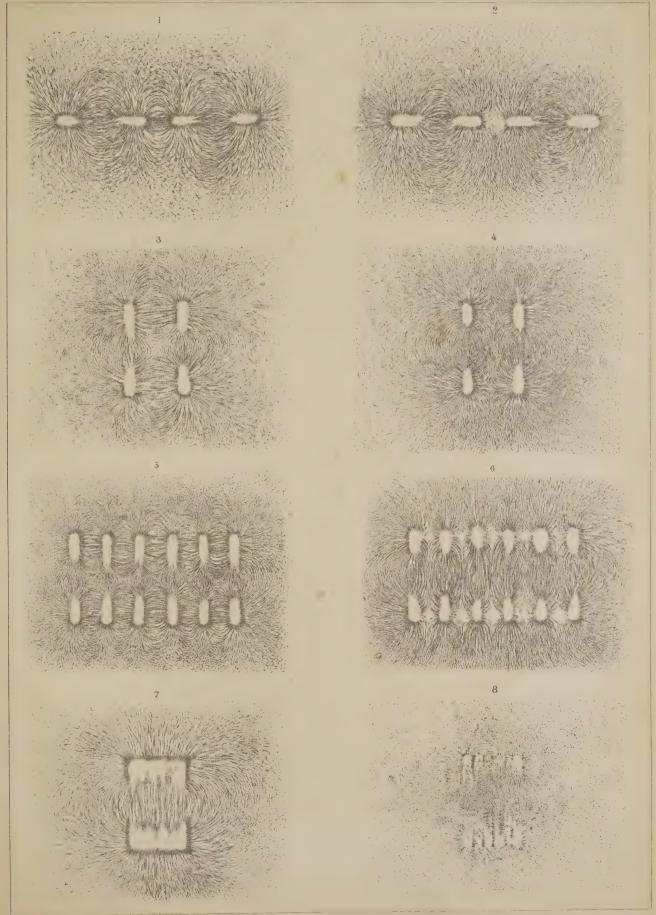
E questa conformità di conclusioni, giova, reciprocamente, se non m'illudo, ad avvalorare entrambo i due supposti.

In altro mio scritto spero poi di mostrare che la bipolarità magnetica e la bipolarità elettrica delle molecole gravi sono due qualità tra loro inscindibili, fuorchè i rispettivi assi di maggiore efficacia riescono perpendicolari l'uno all'altro.

([1]) Faccio qui della ipotesi di Ampère, dovendone dire con qualche estensione in altro lavoro.

([2]) Anche il Jamin nelle sue lezioni sui fenomeni magnetici, riconosce sconveniente questo modo di procedere della scienza, per cui si crede d'avere spiegati i fatti naturali col formulare altrettante ipotesi quanti sono i fatti generali, che man mano l'esperienza ci vien rivelando. Tuttavia ancor egli, nel suo trattato di fisica, trova più comodo di seguire la consuetudine dei fisici, che si appagano di così fatte fantasie, accogliendole siccome realità.

([3]) *Su la polarizzazione dei coibenti elettrici.* Atti dei Lincei, Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, ser. 3ª, vol. XIV. 1882.

Lit. Bruno e Salomone, Roma.

Studio sperimentale sulla riproduzione parziale della milza.

Memoria dei prof. L. GRIFFINI e G. TIZZONI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 17 giugno 1883.

(Con tre tavole).

Prima di entrare nella esposizione particolare dei fatti da noi osservati, desideriamo far conoscere un poco di storia di questo nostro lavoro, affinchè ciascuno di noi si abbia la parte che in questo gli spetta, e perchè si comprendano subito le ragioni per le quali ci siamo trovati a lavorare sullo stesso argomento ed il modo col quale abbiamo potuto svolgerlo rimanendo, per ragione di ufficio, l'uno così distante dall'altro. Durante l'anno scolastico 1879-1880, senza che l'uno sapesse dell'altro, intraprendemmo ambedue delle ricerche sperimentali sulla fisio-patologia della milza, al fine di studiare se fosse possibile una riproduzione di quest'organo, e se con l'esatta cognizione di tutti i particolari del processo di riproduzione, qualora effettivamente questa avesse luogo, si potesse giungere a rischiarare alcuni punti oscuri sulla struttura e sulla funzione di quest'organo, e contribuire indirettamente anche allo studio del suo sviluppo embrionale; poichè fin d'allora era nostra convinzione che il processo di riproduzione di un tessuto o di un organo corrisponda intieramente a quello del suo sviluppo embrionale.

Per arrivare alla soluzione di questi problemi uno di noi (Griffini) fece appello al processo sperimentale già universalmente accettato dai patologi per lo studio della rigenerazione dei tessuti, vale a dire alle asportazioni parziali, cuneiformi, della milza, per seguire istologicamente il modo col quale si compie la riparazione di queste soluzioni di continuo; l'altro invece (Tizzoni) credè conveniente di affrontar subito la questione intiera, asportando tutta la milza ed esaminando se fosse possibile una riproduzione totale di quest'organo e in qual parte del corpo e per qual processo istologico questa riproduzione avesse luogo.

Ambedue queste ricerche dettero fino dai primi esperimenti dei risultati bellissimi e quasi inaspettati. Se non che quello di noi che si occupava della riproduzione parziale della milza (Griffini) conosciuti i resultati che l'altro (Tizzoni) aveva ottenuti sulla riproduzione totale di quest'organo, i quali per la loro novità ed importanza vennero sollecitamente annunziati al pubblico con una comunicazione preventiva ([1]), stimò trovarsi in condizioni molto meno favorevoli per seguire quei fatti che egli pure si era proposto di studiare e credè utile perciò di sospendere per il momento le sue ricerche. Appena i risultati ottenuti sulla riproduzione totale della

([1]) Tizzoni e Fileti, *Studi patologici e chimici sulla funzione ematopoetica*, 2ª comunicazione prev. letta all' Acc. dei Lincei nella seduta del 6 giugno 1880. Trans. vol. IV, ser. 3ª.

milza furono resi di pubblica ragione per esteso ([1]), in mezzo al plauso generale col quale questi vennero accolti, qualche patologo ([2]) sollevò subito dei dubbî sul significato delle piccole neoproduzioni di milza trovate nelle grandi duplicature del peritoneo di animali smilzati, facendo conoscere che negli animali che hanno la milza normale e che non hanno subìta nessuna operazione, si possono trovare nel grande omento e nell'epiploon gastro-splenico dei noduli rosso-scuri che per il loro numero e per i loro caratteri macroscopici in niente si distinguono da quelli descritti come milze riprodotte. In questo modo la questione della riproduzione della milza sembrava demolita di un sol colpo, almeno apparentemente, fino dalle sue fondamenta. Nel fatto però se queste osservazioni valsero a calmare nella maggioranza l'entusiasmo per le cose da uno di noi pubblicate (Tizzoni), non valsero certamente a scuotere in questi quella profonda convinzione che viene dall'osservazione di fatti positivi, e gli servirono solo di stimolo per continuare nello stesso campo di ricerca, onde vedere qual significato si dovesse attribuire alle numerose neoformazioni di milza che si trovano nelle grandi duplicature del peritoneo di animali che non hanno subìta nessun' operazione e che hanno le apparenze di animali sani, nonchè per studiare il rapporto che passa fra queste milze neoformate e quelle che si rinvengono nei cani smilzati. Con questi nuovi studî uno di noi (Tizzoni) potè dimostrare in un primo lavoro ([3]), che sopra a 60 cani uccisi espressamente per questa ricerca, la ricca neoformazione di piccole milze dell'epiploon è costantemente accompagnata da lesioni della milza primaria (splenite indurante), sia che le alterazioni di quest'organo, derivate probabilmente dalla sua rottura spontanea, compariscano in tutta la loro integrità ed estensione, sia che vengano compensate da una rigenerazione locale; ciò che si osserva specialmente in quei casi nei quali il grand'omento penetrò nell'interno della soluzione di continuo. Successivamente dimostrò in un altro lavoro ([4]) che la splenotomia aumenta il numero e il volume delle neoformazioni del grande omento in quei casi nei quali queste neoformazioni preesistono alla praticata operazione, e che esaurito il processo di neoformazione di queste grandi duplicature del peritoneo o impedito lo sviluppo di tale processo a causa delle alterazioni subìte da queste sierose, la neoformazione di parenchima splenico avviene in punti del peritoneo più lontani da quello che risentì maggiormente l'influenza della operazione (diaframma, stomaco, vicinanze della vescica, epiploon gastro-epatico), o nel tessuto adiposo che forma dei grandi cuscinetti di grasso in vicinanza del peritoneo (pacchetto adiposo sterno-addominale, adipe del bacino).

Così le nuove ricerche, anzi che contraddire le precedenti, invece le confermavano pienamente, e conducevano a distinguere due forme di riproduzione totale della

([1]) Tizzoni e Fileti, *Studi patologici e chimici sulla funzione ematopoetica.* Atti della r. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, vol. X. — Tizzoni, *Sulla riproduzione della milza.* Atti della r. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, vol. X.

([2]) Foà, *Sulla cosidetta riproduzione della milza.* Lo Spallanzani, fasc. I-II, anno XI, ser. 2ª, 1882.

([3]) Tizzoni, *Sulle milze accessorie e sulla neoformazione della milza per processi patologici della milza primaria.* Atti della r. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, vol. XIII, seduta del 25 giugno 1882.

([4]) Tizzoni, *Nuove ricerche sulla riproduzione della milza.* Rend. dell'Acc. delle scienze dell'Istituto di Bologna, seduta 26 nov. 1882. — Atti della r. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, vol. XV, seduta del 17 giugno 1883.

milza, una sperimentale e una per processi patologici della milza primaria; forme che presentano qualche leggiera differenza nei caratteri macroscopici e microscopici della neoproduzione. Ora mentre uno di noi (Tizzoni) attendeva a queste ricerche sulla neoformazione totale patologica della milza, si rivolse all'altro (Griffini) perchè rendesse di pubblica ragione i risultati delle sue esperienze sulla riproduzione parziale di quest'organo, già da lui in passato ottenuti e confidenzialmente al primo comunicati, poichè questi valevano a convalidare pienamente quelli che si riferivano alla riproduzione totale, e quindi a dare l'ultimo tracollo alle obiezioni che a questa erano state mosse.

A quest'invito il prof. Griffini rispondeva molto cordialmente pubblicando le osservazioni fatte nel 1880 sulla riproduzione parziale della milza ([1]). Per un semplice equivoco non essendo riusciti in seguito ad intenderci intorno a quello di noi che doveva continuare e portare a termine lo studio della riproduzione parziale della milza, ci trovammo in capo a qualche mese ad aver fatto ambedue un numero considerevole di asportazioni cuneiformi di quest'organo. Conosciuto il malinteso, stabilimmo di comune accordo, per non veder ripetute le stesse cose in due pubblicazioni differenti, di riunire insieme le numerose nostre osservazioni, e di fare così una monografia completa sulla riproduzione parziale della milza.

Premesse queste poche cose passiamo subito all'argomento.

I.

È noto come qualche anno addietro si cercasse di studiare la questione della riproduzione parziale e totale della milza, e come per quest'ultima gli esperimenti rispondessero sempre negativamente, mentre per la prima alcune ricerche del Philipeaux, benchè non la dimostrassero assolutamente, ne facessero almeno sospettare la possibilità. Il Philipeaux ([2]) propostosi di controllare la pretesa riproduzione totale della milza che alcuni fisiologi male interpetrando un esperimento del Meyer avevano erroneamente attribuito a questo sperimentatore, trovò in tre topi bianchi, nei quali era stata asportata la milza da 17 mesi, che questa si era riprodotta in tutti e tre gli animali, con qualche differenza di forma e di dimensione, ma sempre con la stessa struttura della milza normale. Una di queste milze asportate, ad esempio, pesava 65 centig. ed aveva 40 mill. di lunghezza, 6 di larghezza e 4 di grossezza, mentre la milza riprodotta non pesava che 42 centig. ed aveva 15 mill. di lunghezza, 8 di larghezza e 5 di grossezza. È da notarsi ancora in questi esperimenti, come in tutti e tre i casi la milza riprodotta occupasse sempre il posto normale di questo viscere; fatto che per sè stesso vale oggi a dimostrare essersi trattato di una semplice riproduzione parziale per germi o resti di milza lasciati indietro nell'operazione, anzi che di una vera e propria riproduzione totale; la quale, come è stato dimostrato da uno di noi ([3]), avviene invece in

([1]) Griffini, *Sulla riproduzione parziale della milza.* Comunicazione preventiva, maggio 1882 Arch. per le scienze mediche, vol. VI, Giornale internazionale delle scienze mediche, anno IV.

([2]) Philipeaux, *Note accompagnant la présentation de plusieurs pièces relatives à la régénération de la rate.* Compt. rend. T. LII, pag. 547.

([3]) Tizzoni, Mem. cit.

forma di numerosi noduli rosso-scuri nelle grandi duplicature del peritoneo. Successivamente il prof. Peyrani [1] dimostrava nel Laboratorio di fisiologia della R. Università di Torino, con numerosi esperimenti praticati sopra a porcellini d'India, come fossero erronee le conclusioni del Philipeaux, e come questi nei suoi esperimenti avesse preso per milza riprodotta qualche neoformazione accidentale generata dalla praticata lesione. In risposta a questo lavoro del Peyrani, il Philipeaux [2] praticò nuove splenotomie sopra ai giovani topi (Mus decumanus) e sopra ai conigli, ed in tutti gli animali, uccisi 17 mesi dopo la praticata operazione, osservò, concordemente al Peyrani, nessuna traccia di riproduzione di milza. Pensando allora alla ragione degl'insuccessi ottenuti nella seconda serie di esperimenti ed alla differenza che passava nei risultati fra le prime e le seconde prove, credè trovare una spiegazione nell'ipotesi che nei primi esperimenti fosse rimasto indietro un piccolo pezzetto di milza, e che si trattasse quindi di una riproduzione parziale anzi che di una riproduzione totale, mentre ciò non fosse accaduto nei secondi. A provare questa sua idea istituì nuove splenotomie, eseguite pure su topi e su conigli giovani, nei quali lasciava in posto una piccola porzione di milza (3-5 mill.) e nei quali potè osservare costantemente una rigenerazione dell'organo asportato, il quale presentavasi per aspetto macroscopico e per struttura del tutto simile alla milza normale. Con questi ultimi esperimenti il Philipeaux venne a modificare grandemente il significato che aveva dato ai primi risultati ottenuti, e arrivò a formulare in modo generale le seguenti conclusioni; che nei mammiferi può aver luogo una riproduzione parziale della milza, ma che non avviene mai una riproduzione totale di quest'organo quando questo è stato completamente asportato. Con altro lavoro il Peyrani [3] mantenne ancora le sue prime asserzioni, e sostenne di nuovo non solo l'impossibilità di una riproduzione totale, ma anche l'impossibilità di una riproduzione parziale, in loco, da germi di milza lasciati in sito, come ammetteva il Philipeaux.

Molto più recentemente il Tillmanns [4] riprese a studiare la questione della riproduzione parziale della milza e si occupò di seguire in modo particolare il processo istologico per il quale si riparano nel coniglio le ferite e le asportazioni cuneiformi della milza, del fegato, dei reni e dei polmoni. Da questi esperimenti ne risultarono le conclusioni, che le ferite e le asportazioni cuneiformi degli organi citati non danno mai emorragia mortale, meno che non vengano direttamente interessati dei grossi tronchi vascolari in prossimità del loro ingresso in questi visceri, che gli elementi parenchimatosi e lo stroma di questi organi non prendono nessuna parte attiva al processo di cicatrizzazione delle ferite, e che la riunione di queste soluzioni di continuo si fa per semplice tessuto connettivo, sprovvisto della particolare disposizione del tessuto adenoide, e prodotto dai globuli bianchi migrati dai vasi. Giunse

[1] Peyrani, *Sur les expériences de M. Philipeaux sur la régénération de la rate.* Compt. rend. T. LIII, pag. 978. Gaz. med. ital. prov. sarde 2 decembr. 1861, n. 49, pag. 385-388.

[2] Philipeaux, *Note sur la régénération de la rate.* Compt. rend. de l'Acad. des sciences. Séance 11 décembr. 1865.

[3] Peyrani, *Sur la régénération de la rate.* Compt. rend. etc. Séance 8 janv. 1866.

[4] Tillmanns, *Experimentelle und anatomische Untersuchungen über Wunden der Leber und Niere.* Virchow's Arch. Bd. LXXVIII, pag. 437, 1879.

anzi ad identificare le cicatrici che si ottengono nella milza di animali viventi con quelle che si ottengono nei pezzi di quest'organo conservati per molti giorni nell'alcool e innestati dopo nel cavo peritoneale, e nei quali viene assolutamente escluso che gli elementi speciali e gli elementi connettivi dello stroma dell'organo innestato possano prendere una qualche parte attiva nella riunione delle ferite in quello praticate. Da queste poche notizie bibliografiche, che sole sono a nostra cognizione, non si può davvero asserire con certezza che sia possibile una riproduzione parziale della milza, e molto meno indicare da qual tessuto e per qual processo istologico si sviluppi la neoformazione. Se dagli studî del Philipeaux si può avere acquistata una pallida idea della riproduzione parziale della milza, per gli studi del Peyrani e del Tillmanns quest'idea viene del tutto allontanata; se le ricerche del Philipeaux fanno sospettare che questa riproduzione abbia luogo dal vecchio tessuto della milza e che la presenza di piccole porzioni di quest'organo siano quindi necessarie perchè si osservino questi fatti, benchè per questi studî non si venga poi a cognizione del processo istologico per il quale questa rigenerazione si compie, dagli esperimenti del Tillmanns si viene invece ad acquistare un' idea del tutto opposta, e a farsi il concetto che il tessuto speciale della milza non prenda nessuna parte nel processo di cicatrizzazione delle soluzioni di continuo di quest'organo, e che questo processo sia intieramente devoluto ai globuli bianchi migrati dai vasi.

In mezzo alle incertezze e alle contraddizioni che si trovano sopra una questione così importante, non abbiamo creduto perciò di fare opera infruttuosa di riprendere lo studio di questi problemi, allo scopo di determinare definitivamente se esista una riproduzione parziale della milza, di esaminare inoltre in qual grado e in quali condizioni questa si effettui, e di studiare finalmente da qual tessuto matrice, e per qual processo istologico abbia luogo la neoproduzione che serve a compensare la perdita di sostanza artificialmente praticata in quell'organo.

II.

Le asportazioni parziali della milza che noi abbiamo eseguite per risolvere le accennate questioni sono in numero di 97, delle quali 56 spettano ad uno di noi (Griffini), 41 all'altro (Tizzoni).

Gli animali in esperimento furono uccisi a varie epoche dalla praticata operazione al fine di sorprendere la neoformazione nelle varie sue fasi di sviluppo; la durata dell'osservazione oscillò in generale fra 40 ore e 87 giorni, come vedesi dal seguente prospetto.

DURATA DELL'ESPERIMENTO

Ore 40	Ore 48	g. 3	g. 4	g. 5	g. 6	g. 7	g. 8	g. 9	g. 10	g. 13	g. 16	g. 17	g. 18	g. 20	g. 21	g. 22	g. 23	g. 25	g. 26	g. 27	g. 28	g. 29	g. 30	g. 32	g. 33	g. 40	g. 42	g. 53	g. 58	g. 59	g. 68	g. 78	g. 87
NUMERO DEGLI ESPERIMENTI																																	
1	2	4	4	2	4	1	4	4	4	4	4	1	6	5	3	4	6	6	2	1	1	1	6	1	1	3	2	1	3	2	1	2	1

Come soggetto di sperimentazione scegliemmo il cane, giacchè i risultati delle nostre precedenti ricerche (Tizzoni per la riproduzione totale, Griffini per la riproduzione parziale) ci avevano persuasi che quest'animale, a differenza degli altri che si sogliono adoprare nei laboratorî di fisiologia e di patologia (coniglio), si presta molto bene per questo genere di esperimenti. Operammo poi senza distinzione cani giovani e vecchi, grossi e piccini, maschi e femmine, giacchè ci convincemmo subito che tutte queste condizioni non hanno nessuna marcata influenza sul processo di riparazione. Riguardo al metodo operativo, nei nostri esperimenti ci attenemmo sempre al più semplice, e a quello che portava più prontamente a guarigione senza grave reazione locale. Fissato l'animale sul tavolo da vivisezione e resolo insensibile mediante la cloroformizzazione, si apriva la cavità addominale, sia dalla linea alba, sia (ciò che facemmo il più di frequente) con un' incisione laterale che partendo due o tre dita trasverse dal bordo dell'arco costale camminava lungo il margine esterno del retto addominale sinistro per una lunghezza di 6 a 8 cent. Per questa apertura si andava alla ricerca della milza, ed una volta trovatala la si afferrava con due dita e la si tirava, sia in parte sia in totalità, fuori della cavità addominale; ciò che nei casi di milza normale poteva farsi sempre con la massima facilità. Accertatisi allora delle condizioni della milza ed esaminato attentamente il grand'omento, ora in sito ora estratto dalla cavità addominale, col mezzo del coltello o di forbici molto taglienti si facevano nei bordi o nelle estremità di quell'organo alcune volte delle semplici incisioni, il più di frequente delle asportazioni cuneiformi aventi la base al bordo libero e l'apice rivolto verso l'ilo della milza. Una sola volta fu praticata mediante un foratappi del diametro di 5 mill. una ferita canaliculare nello spessore dell'estremità anteriore della milza, diretta cioè dalla faccia anteriore convessa di questa alla posteriore. In uno stesso animale si facevano una sola o più asportazioni cuneiformi (2-6), e non di rado, passato un certo tempo dalla prima operazione, tornavamo ad aprire la cavità addominale e a fare nuove asportazioni di milza. Così ci trovammo ad avere eseguito 97 asportazioni cuneiformi operando solamente 37 animali; di questi alcuni ebbero aperta per 3 volte la cavità addominale ed ebbero asportati 8 pezzetti cuneiformi di milza. Questo modo di procedere, che ci venne consigliato dal difetto di animali e dalla necessità di utilizzare il più possibile quelli che mantenevamo in esperimento, ci servì benissimo per seguire e per sorvegliare da un lato il processo di riparazione delle soluzioni di continuo della milza, e dall'altro per esaminare a determinati intervalli le modificazioni che avvenivano nel grand'omento. I pezzetti di milza asportati erano di grandezza molto variabile; oscillavano in generale fra 4 e 15 mill. di larghezza, misurata in corrispondenza della loro base, e fra 5 e 20 mill. di lunghezza.

Dopo eseguite le asportazioni parziali della milza, questa veniva subito rimessa nella cavità addominale in quei casi nei quali la soluzione di continuo non dava molto sangue, mentre, quando l'emorragia era più abbondante, si faceva sulle labbra della ferita una leggiera compressione con la spugna prima di riporre la milza in cavità; in generale però l' emorragia in seguito a questa operazione non fu mai imponente, e tale da richiedere particolari provvedimenti. In ultimo si

praticava la sutura delle pareti addominali e la medicatura della ferita. Tanto nell'operazione quanto nelle medicature successive ci attenemmo, per quanto i nostri mezzi ce lo concessero, al metodo antisettico di Lister.

Gli animali così operati venivano tenuti per 24-48 ore a dieta di latte, quindi veniva concessa loro un' abbondante razione di pane e carne e per due o tre volte nel giorno veniva dato loro un poco di libertà.

In seguito a quest'operazione non vedemmo nascer mai inconvenienti gravi, nè mai avemmo a perdere degli animali: questi mostravano in generale una leggiera febbre traumatica che cadeva prontamente con l'effettuarsi della cicatrizzazione della ferita praticata nelle pareti addominali, la quale ordinariamente, almeno nelle parti profonde, andava a guarigione per prima intenzione.

Ucciso l'animale all'epoca determinata e notato il reperto della autopsia, le parti destinate ad essere conservate per l'esame istologico venivano trattate per alcuni giorni con liquido di Müller, quindi indurate nell'alcool a graduazione successivamente crescente fino ad ottenere il necessario induramento; soltanto in alcuni casi, per fissare meglio la forma degli elementi della milza, venne fatta per l'arteria splenica una iniezione con una soluzione debole di acido osmico, ovvero tutto il pezzetto della milza destinato per lo studio istologico venne immerso per poco tempo nella soluzione di acido osmico e quindi passato nell'alcool. Indurate a questo modo quelle parti della milza nelle quali era stata praticata la lesione, si fecero con queste delle serie di sezioni microscopiche, sia a mano libera, sia col microtomo a slitta di Thoma; sezioni che di preferenza colorammo successivamente coll'ematossilina, poichè questa sostanza colorante ha il vantaggio su tutte le soluzioni di carminio che si sogliono adoprare in istologia, di penetrare più facilmente in mezzo al sangue della polpa splenica, di fare spiccare meglio la differenza fra sangue e tessuto connettivo vicino, e di colorare i nuclei dei globuli rossi nucleati. Le sezioni microscopiche di mill. 0,015-0,020 di grossezza ottenute col microtomo di Thoma furono incollate in bell'ordine e in serie continua sul vetro portaoggetti, avvalendosi del metodo di Giesbrecht modificato [1]. Le sezioni microscopiche vennero fatte ora perpendicolarmente alla praticata lesione, ora longitudinalmente a questa e più o meno parallelamente ad una delle faccie della milza. Nello stesso modo vennero trattate e preparate le piccole milze sviluppatesi al di fuori della soluzione di continuo, e trovate in alcuni casi tanto nell'epiploon gastro-splenico quanto nel grande omento, e tanto nella porzione di questa sierosa fattasi aderente colla milza primaria quanto nella sua porzione libera.

Le grandi duplicature del peritoneo in alcuni casi furono trattate con liquido di Müller, indurate in alcool, colorate con carminio o con ematossilina e quindi distese in piccole porzioni sopra una goccia di glicerina; in altri casi vennero distese sul vetro portaoggetti col metodo della semidisseccazione dei bordi appena tolte dal liquido di Müller e lavate con acqua; quindi colorate con ematossilina ed eosina e chiuse in balsamo del Canadà, dopo aver tolto l'eccesso dell'eosina col mezzo del lavaggio coll'alcool. Descritto il metodo sperimentale ed il metodo istologico che ci

[1] Giesbrecht, Zoolog. Anzeiger 1881, n. 92, p. 484.

servirono per i nostri studî, passiamo adesso all'esame dei fatti. Trovandoci però nella impossibilità di riferire minutamente il reperto di ciascuno degli esperimenti da noi praticati, a causa del loro numero, e volendo nel miglior modo possibile corrispondere al duplice fine che ci siamo proposti nello scrivere questo lavoro, cioè, di evitare da un lato lungaggini o inutili ripetizioni e di non trascurare dall'altro nessuno dei fatti osservati, così crediamo conveniente di dividere i risultati ottenuti in due capitoli, nel primo dei quali sarà studiato in modo generale quello che avviene nelle soluzioni di continuo della milza e verrà seguìto passo a passo il processo di neoformazione che si svolge nella parte lesa di quell'organo, mentre nel secondo capitolo riporteremo qualcuno dei più importanti esperimenti da noi praticati i quali servono come esempio e come tipo del processo di neoformazione o come eccezione alla regola generale.

III.

Come abbiamo fatto già osservare nel descrivere il metodo sperimentale da noi messo in pratica, i fenomeni immediati e consecutivi delle ferite o delle asportazioni parziali, anche generose, della milza, non sono quasi mai molto gravi. Concordemente ai risultati ottenuti dal Tillmanns (¹) noi pure abbiamo osservato che l'emorragia la quale tien dietro alle ferite o alle asportazioni cuneiformi della milza non è mai molto imponente, meno che non vengano direttamente interessati dei grossi vasi in prossimità del loro ingresso in quest'organo; il più spesso si può benissimo rimettere la milza nella cavità addominale dopo che ne sono stati asportati uno o più pezzetti senza che l'animale dia segno di grave emorragia interna, e senza che si trovi alla sezione, praticata poco tempo dopo eseguito quest'atto operatorio, una ragguardevole quantità di sangue nella cavità peritoneale. Ed anche quel poco di sangue che dalle soluzioni di continuo si versa nella cavità addominale, sembra che sia prontamente riassorbito dalle numerose vie d'assorbimento del peritoneo e riversato nel circolo come nel caso della trasfusione peritoneale con sangue defibrinato. Anche quando l'esame istologico dimostrò che il tagliente aprì qualche grosso vaso sanguigno della milza, l'emorragia consecutiva a quest'operazione non fu mai inquietante.

Per il modo col quale si arresta l'emorragia nelle parti operate, già l'esame macroscopico ci dimostra che il sangue coagula fra le labbra della ferita della milza, come in qualunque altra soluzione di continuo dei tessuti vascolarizzati, e che questo coagulo rimane chiuso nell'interno della ferita dal grande omento che a questa si è fatto prontamente aderente. A seconda poi dell'abbondanza di quest'emorragia, il coagulo è più o meno grande, più o meno appariscente; nei casi nei quali si è versato poco sangue dalla superficie cruenta, il coagulo è piccolo e limitato al fondo della ferita mentre l'omento entra per buon tratto nel suo interno; nei casi invece nei quali l'emorragia fu più abbondante, il coagulo riempie quasi intieramente la soluzione di continuo e sporge sur una o su ambedue le facce della milza, nonchè sul grande omento fattosi aderente alla ferita, sotto forma di un

(¹) Tillmanns, lav. cit.

piccolo rilievo rosso scuro, il quale ha tutte le apparenze di un ordinario infarto emorragico recente.

Tolto di mezzo il pericolo dell'emorragia, si comprende facilmente come le asportazioni parziali della milza praticate col tagliente (forbici, coltelli) siano il mezzo migliore per lo studio della rigenerazione parziale di quest'organo, e come sia assolutamente da mettersi da parte l'impiego della dierèsi galvanica o di altri mezzi emostatici per timore di una emorragia che non è poi giustificata dai fatti. Che anzi quest'ultimi espedienti riescono non solo inutili, ma anche dannosi nello studio di questa questione, giacchè il processo reattivo che si ridesta al dintorno dell'escara, non è al certo molto favorevole allo sviluppo della neoformazione parziale della milza, come non sarebbe favorevole allo sviluppo della rigenerazione dei tessuti, del tessuto nervoso ad esempio, di praticare l'escisione di un pezzo di nervo con il termocauterio e di cauterizzare così i due capi recisi. La mancanza di effetti immediati gravi, specialmente emorragici, delle ferite e delle asportazioni parziali della milza, come lo dimostrano le ricerche del Tillmanns e le nostre, dovrà trovare in seguito larghissime applicazioni pratiche tanto nella diagnostica quanto nella chirurgia operatoria di quest'organo. Non è nostro còmpito di accennare il come e il dove questi principî possano trovare una razionale applicazione clinica, solo ci contentiamo di accennare come in seguito a questi la punzione esploratrice della milza possa e debba esser messa in pratica con mano sicura ogni qual volta il clinico si trovi di fronte a casi di malattia di quest'organo di diagnosi molto difficile, al fine di render chiara questa diagnosi coll'esame dei piccoli frammenti di milza che rimangono nella cannula del trequarti, e per decidere se il malato possa ancora sperare dall'azione dei farmaci o debba ricorrere a qualche atto operatorio che lo liberi definitivamente dal suo male. La punzione capillare della milza eseguita già da Marchiafava, Sciamanna e Cuboni, per esaminare il sangue della milza durante l'accesso della febbre palustre, e più recentemente da Maragliano per lo studio di questo sangue nella febbre tifoide, servono già a dimostrare la verità delle nostre asserzioni e a tracciare le prime linee delle applicazioni che questi principî possono trovare nella pratica e specialmente nella diagnostica clinica.

I caratteri macroscopici della parte operata, all'infuori della grossezza del coagulo, presentano delle marcatissime differenze, le quali stanno in relazione in primo luogo col grado della cicatrizzazione, grado della cicatrizzazione che dipende non solo dal tempo che decorse dalla praticata operazione, ma anche da condizioni individuali e da condizioni particolari delle singole ferite. Così in uno stesso individuo, ad esempio, sul quale erano stati portati via ad un tempo due pezzettini di milza, delle stesse dimensioni a un dipresso, si trovava, 42 giorni dopo la praticata operazione, che una delle soluzioni di continuo (tav. I, fig. 9) era quasi completamente riparata, era ridotta cioè ad una sottilissima striscia bianchiccia, leggermente depressa sulle due faccie e sul bordo libero della milza, e ricoperta in ambedue le faccie da una sottile pellicola che partiva da un'aderenza di una piccola piega dell'epiploon gastro-splenico, che si elevava dall'ilo della milza, sulla faccia posteriore di quest'organo; mentre l'altra di queste soluzioni di continuo (tav. I, fig. 16) aveva progredito pochissimo nella cicatrizzazione , era non molto sensibilmente ristretta e

raccorciata, ed era riempita da epiploon adiposo. Anche in molti altri casi si è potuto osservare questa differenza nel tempo della cicatrizzazione delle varie ferite della milza. Osservammo egualmente qualche differenza nell'attività della neoformazione, quando in uno stesso soggetto praticammo a più riprese di queste asportazioni cuneiformi della milza; in questi casi la riparazione del pezzetto asportato si andava facendo nelle successive operazioni sempre più lentamente e più incompletamente, come se il tessuto matrice di questa neoproduzione si stancasse nella sua attività formativa. Di tutte queste differenze non è possibile rendersi una ragione esatta attenendoci semplicemente ai caratteri macroscopici; il fatto però che lesioni della stessa natura e della stessa epoca si comportano così diversamente nello stesso individuo, fa quasi escludere a priori che la ragione di queste differenze stia nei bordi della ferita, e fa subito correre col pensiero ad una differenza nei rapporti che contraggono le soluzioni di continuo con quelle parti che contribuiscono così grandemente alla loro cicatrizzazione. Sembra infatti a questo proposito, che i rapporti del grand'omento con la ferita della milza, nonchè lo stato nel quale si trova questa sierosa, influiscano grandemente sul processo di riparazione di quelle soluzioni di continuo; così si osserva di solito che quando l'omento entra direttamente nella ferita e quando è molto adiposo, la neoformazione della milza decorre assai lentamente, e che questo processo è invece molto più rapido quando l'omento è povero di adipe e quando aderisce prima ad una faccia della milza in un punto più o meno distante dalla soluzione di continuo, e solo secondariamente si spinge nell'interno di quella sotto forma di un sottile prolungamento o di una pellicola di tessuto connettivo. Come si comprende facilmente, anche la seconda di queste condizioni che si riferisce ai rapporti del grand'omento con la ferita, rientra in sostanza nella prima, giacchè quando il grand'omento o l'epiploon gastro-splenico aderiscono primitivamente ad una faccia della milza, non penetrano mai nell'interno della soluzione di continuo allo stato adiposo, ma come membranella connettiva di recente formazione, di connettivo embrionale in altre parole.

Tutto quanto abbiamo osservato sulle condizioni che influiscono sull'attività del processo di cicatrizzazione delle ferite della milza, intendiamo sia detto solo in tesi generale, perchè nel caso particolare si trovano numerosissime eccezioni. Accade così alcune volte di osservare una pronta riparazione delle soluzioni di continuo della milza nei casi nei quali è penetrato nella ferita una porzione di omento ricchissimo di adipe, e ciò in forza di un rapidissimo riassorbimento di questo grasso e di un sollecito ritorno di quella sierosa allo stato embrionale.

Riguardo al ritardo della neoformazione che si osserva nei casi nei quali queste asportazioni parziali furono ripetute più volte nello stesso individuo, rimane molto facile di trovare una plausibile spiegazione: i ripetuti processi inflammatori più o meno circoscritti che tengono dietro a ciascuna apertura della cavità addominale, devono portare delle modificazioni nella sierosa peritoneale e nelle grandi duplicature del peritoneo, le quali, come vedremo in seguito, prendono tanta parte nella cicatrizzazione delle soluzioni di continuo della milza. Non bisogna mai dimenticare infatti, che i processi di rigenerazione avvengono tanto più facilmente quanto meno alterato fu il tessuto matrice. Questo è quello che possiamo dire sulle differenze che

presenta la rigenerazione parziale della milza nei singoli individui e nelle singole lesioni stando semplicemente ai caratteri macroscopici; gli studî istologici ci mostreranno in seguito altre condizioni che favoriscono o difficultano questa rigenerazione. Ci piace fin d'ora anticipare però, che, nonostante queste ultime ricerche, si trovano condizioni individuali e condizioni locali che ritardano o affrettano la neoformazione della milza e che sono del tutto inesplicabili. Anche il modo di comportarsi dello epiploon di fronte alle ferite della milza influisce non poco sullo aspetto che assumono queste lesioni esaminate macroscopicamente a varî periodi della loro riparazione. Alcune volte l'omento molto adiposo contrae estese adesioni con le due faccie della milza, e la soluzione di continuo rimane come nascosta in mezzo al grasso; alcune volte una piega del grande omento e dello epiploon gastro-splenico si attacca sopra una delle faccie della milza in un punto più o meno distante dalla soluzione di continuo, altre volte finalmente la detta piega peritoneale penetra direttamente nella perdita di sostanza, sia dalla sua base o dalla parte che corrisponde al bordo libero della milza, sia dai margini della ferita che corrispondono alle due faccie di quest'organo: ed in quest'ultimo caso la piega del grand'omento, penetrata nell'interno della soluzione di continuo da una delle faccie della milza, riveste più o meno completamente l'interno della ferita e termina in corrispondenza dell' altra faccia della milza a guisa di cul di sacco, oppure dopo traversata la ferita intiera si va ad attaccare alla faccia della milza opposta a quella dalla quale è penetrata, per una estensione più o meno grande. Osservati attentamente i casi nei quali il grand'omento o l'epiploon gastro-splenico hanno aderito ad una faccia della milza in un punto un poco distante dalla soluzione di continuo di quest'organo, si vede con facilità che sollevando leggermente la piega peritoneale fattasi aderente alla milza, rimane nei limiti dell'aderenza un orlo rilevato, come se la capsula fosse inspessita, o come se del tessuto connettivo di neoformazione legasse insieme la piega dell'epiploon alla superficie libera della capsula splenica, e che da quest'aderenza parte un tessuto trasparente a guisa di membranella, alcune volte facilmente sollevabile colle pinzette, il quale tappezza per una certa estensione la superficie della milza, fino a che, raggiunta la soluzione di continuo, si ripiega sopra ad uno o sopra ambedue i suoi bordi e penetra nell' interno di quella. Vedremo in seguito quale significato abbia questa membranella, o pellicola che dir si voglia, la quale parte costantemente dalle aderenze avvenute fra le grandi duplicature del peritoneo e la superficie della milza, nella neoformazione del parenchima splenico e nella cicatrizzazione delle ferite di quest' organo. Si osserva ancora all' esame macroscopico, sempre a riguardo di questa pellicola, che essa si forma tanto per aderenze del grande omento con la milza, quanto per quelle dello epiploon gastro-splenico, e che in quest' ultimo caso alcune volte è solo una piccolissima piega dell' epiploon gastro-splenico che si eleva dalle vicinanze dell'ilo della milza e aderisce ad una delle sue faccie in tutta vicinanza dell' ilo, onde queste aderenze possono andare facilmente inosservate o non essere prese sufficientemente in considerazione nello studiare il modo col quale si riparano le soluzioni di continuo della milza.

Ora si comprende facilmente dalla particolareggiata descrizione che abbiamo data, come debba cambiare l'aspetto delle soluzioni di continuo della milza a seconda

dei rapporti diretti o indiretti che il grande omento ha contratto con queste, e come all'osservazione macroscopica del pezzo intiero la neoformazione che si sviluppa nell'interno della ferita debba riuscire ora più, ora meno appariscente. Sempre all'osservazione macroscopica delle parti della milza nelle quali furono praticate delle asportazioni cuneiformi, si nota che molto spesso i bordi della ferita non si mantengono eguali per la grossezza e per la elevazione, che anzi ordinariamente uno di questi bordi presentasi più elevato (1-2 mill.) e più grosso dell'altro. Perciò quando si praticano delle sezioni trasverse nelle soluzioni di continuo della milza, procedendo dal bordo libero verso l'ilo di quest'organo, accade generalmente di non poter comprendere nei primi tagli che uno dei bordi, e che sulle parti profonde quello dei bordi che mostravasi più elevato è anche assai evidentemente più grosso dell'altro. Ed ordinariamente il bordo più grosso e più elevato corrisponde a quella parte della soluzione di continuo della milza dalla quale è penetrato il grande omento, quando questo aderì prima per una certa estensione ad una delle faccie di quell'organo e ripiegandosi poi sopra uno dei bordi della ferita penetrò nello interno della perdita di sostanza. Oltre questa differenza di grossezza e di elevazione, all'esame macroscopico alcune volte si apprezzano ancora delle differenze di posizione di questi bordi; così mentre d'ordinario essi si trovano nello stesso piano e opposti regolarmente l'uno all'altro, in casi eccezionali si trova uno dei bordi della soluzione di continuo che fa sporgenza sopra una delle faccie della milza, oppure si osserva che i due margini di questa soluzione hanno subìta una tale dislocazione che son venuti a formare fra loro un angolo più o meno acuto. In un caso osservammo perfino che la milza si era ripiegata in corrispondenza di una grossa asportazione cuneiforme, in modo che dei punti piuttosto distanti della stessa faccia della milza venuti fra loro a contatto si erano saldati insieme, per cui i due margini della ferita invece di trovarsi l'uno di contro all'altro erano divenuti quasi fra loro paralleli. Anche in queste eccezioni però si trova di solito che il grande omento lega insieme i bordi dislocati, o fa aderenza alla superficie cruenta di uno o di ambedue i bordi.

Riguardo all'aspetto macroscopico della neoformazione, questo varia grandemente a seconda del periodo nel quale si sorprende, e a seconda della grossezza del coagulo. In generale però essa neoformazione dapprima comparisce rosso-bruna come se fosse una bozza sanguigna o un infarto emorragico, e dopo si scolora poco a poco fino a che assume il tono di colore della polpa splenica. Nella neoformazione molto avanzata si osserva finalmente, che la parte di essa che è lontana dai bordi ha un colore più bruno di quella che rimane a questi più vicina, e ciò perchè, come vedremo in seguito, la prima trovasi in fasi meno avanzate di sviluppo e si accosta maggiormente alla costituzione di una semplice infiltrazione sanguigna, mentre la seconda ha già una struttura più perfetta, che l'avvicina maggiormente alla polpa splenica dell'animale adulto. Questa neoformazione di parenchima splenico, che deve riempire la soluzione cuneiforme della milza, tiene in generale la seguente direzione, che nella maggioranza dei casi si apprezza benissimo anche al semplice esame macroscopico, specialmente se si esamina lo spaccato longitudinale della parte lesa: dal fondo della perdita di sostanza si avanza verso il bordo libero della milza, dai margini

della ferita, per una serie di linee curve a convessità sporgente nella soluzione di continuo, verso la linea mediana della stessa. Per la combinazione di questi due modi di sviluppo e di accrescimento del parenchima splenico che va neoformandosi, e per la forma a cuneo della soluzione, si trova naturalmente che in ogni periodo del processo di riproduzione è maggiore l'accorciamento che non il ristringimento. Ed a periodo avanzato, considerando la grossezza del parenchima che riempie la soluzione di continuo (praticando cioè un taglio perpendicolare alle due faccie della milza), si trova più avanzata la neoformazione nelle parti centrali che non nelle parti periferiche, e più verso la faccia dalla quale il più spesso penetra il grand'omento (faccia anteriore), che verso l'altra. E procedendo successivamente con queste sezioni trasversali dal bordo libero della milza verso l'ilo di quest'organo, si trova che la neoformazione delle parti centrali si fa sempre più accosta a misura che si cammina verso il fondo della soluzione di continuo; ciò a causa della forma della ferita, come sopra abbiamo detto, più che per una differenza nell' attività della neoformazione delle parti profonde di fronte alle parti superficiali della ferita stessa. Perciò studiando il parenchima neoformato sui due bordi della soluzione di continuo mediante sezioni trasverse, questo ha la forma di due triangoli curvilinei con la base rivolta al parenchima preesistente di ciascun bordo della primitiva ferita, cogli apici arrotondati che si guardano, e col lato rivolto alla faccia anteriore della milza più corto e meno divergente di quello corrispondente alla faccia posteriore di quest'organo. Considerando invece i bordi della ferita nel senso della loro lunghezza, vale a dire in sezioni longitudinali, si trova che i loro limiti non sono segnati da una linea retta, come tosto dopo praticata la ferita, ma da una serie di linee curve con le convessità sporgenti nella soluzione di continuo. Ora mettendo insieme le figure che risultano dall'aspetto della neoformazione esaminata in sezione longitudinale e trasversale, se ne deduce facilmente che questa neoformazione ha origine dal fondo e dai bordi della soluzione di continuo e che si spinge da queste parti verso l'asse della ferita sotto forma di piccoli segmenti di sfera.

A cicatrizzazione quasi completa si osserva in sezioni longitudinali al posto della soluzione di continuo una striscia rossastra a decorso serpentino; questa dapprima non raggiunge completamente il bordo libero della milza, onde rimane in questa parte un piccolo solco che va gradatamente a scomparire. Solo eccezionalmente la soluzione di continuo della milza si ristringe, ma non si riunisce completamente, e al suo posto rimane una semplice incisione lineare: vedremo in seguito la ragione di questa riunione incompleta. La neoformazione della milza che abbiamo sopra descritta per quanto riguarda i suoi caratteri macroscopici, non si compie in tutte le soluzioni di continuo con la stessa attività; generalmente questa neoformazione si fa in modo lento, specialmente se la soluzione di continuo è molto larga e se concorrono quelle condizioni che abbiamo precedentemente accennate, alcune volte invece avviene in modo assai rapido. In quest'ultimo caso la neoformazione non si limita di solito alla località o alla parte lesa della milza, ma si spinge anche fuori della soluzione di continuo lungo i vasi dell'omento fattosi aderente alla ferita stessa. Questa neoformazione che si fa all'esterno della soluzione di continuo assume nei varî casi un aspetto molto differente. In questa si possono in generale distinguere

tre tipi. In un primo tipo, la neoformazione dall' interno della ferita si continua all' esterno lungo i vasi dell' omento a quella fattosi aderente, sotto forma di cordoni rosso-scuri ramosi che hanno tutti i caratteri della polpa splenica e che somigliano a quelli che uno di noi ha riportati nella tav. I, fig. 3 *b*, di una sua precedente Memoria ([1]). In un secondo tipo, la neoformazione che sta all'esterno della soluzione di continuo è pure limitata alle vicinanze di essa, ma separata da quella dell'interno ed in forma di piccoli nodettini scuri, i quali hanno tutti i caratteri assegnati da uno di noi alle milze riprodotte; questi nodettini sono situati in vicinanza della lesione della milza, sia sulla superficie della milza stessa, sia sul grand'omento che si è fatto aderente ad una delle faccie di quest'organo, sia finalmente nella porzione di omento libero che segue immediatamente quello che ha contratto aderenza con i margini della ferita. In una terza forma finalmente, si osserva che i noduli neoprodotti non si limitano solamente alle vicinanze della soluzione di continuo, ma sono disseminati su tutta la superficie del grande omento e dell'epiploon gastro-splenico, disposti ordinariamente lungo il corso dei vasi; come le milze riprodotte per alterazioni della milza primaria la maggior parte sono formati da una sostanza rosso-bruna simile alla polpa splenica; solo in pochi si vede sulla superficie di sezione un corpo biancastro che possa paragonarsi ad un corpuscolo di Malpighi. Fra questi noduli scuri qua e là si notano sul grande omento dei corpiccioli bianco-grigiastri simili a tubercoli migliari. I tre tipi di neoformazione di parenchima splenico che si trovano al difuori della soluzione di continuo della milza non sono sempre distinti, che anzi nel maggior numero dei casi si vedono combinate insieme in uno stesso individuo alcune di queste forme. Sulla significazione di questa neoformazione avremo a parlare molto diffusamente in altra parte; per ora ci contentiamo di fare rilevare come nei casi da noi studiati queste neoformazioni si fossero sviluppate successivamente alle lesioni praticate nella milza, essendoci accertati durante l'operazione che il grand'omento non presentava nessuno di questi noduli scuri.

Descritti i caratteri macroscopici che si rilevano nella milza e fuori della milza in seguito ad asportazioni cuneiformi di quest'organo, passiamo adesso a studiare per qual processo avviene la neoformazione che va a compensare la perdita di sostanza, sintetizzando in questa parte il reperto istologico dei numerosi esperimenti da noi praticati. In questa descrizione seguiremo lo sviluppo naturale della neoformazione, esaminando la parte che prendono in questo processo il tessuto preesistente della milza e il grand' omento penetrato nell' interno della soluzione di continuo, avvalendoci per questa descrizione ora delle sezioni longitudinali, ora delle sezioni trasversali alla soluzione stessa, a seconda che le une o le altre serviranno meglio a fare rilevare alcuni fenomeni o alcune fasi dello sviluppo della neoformazione.

I fatti istologici che si osservano in primo tempo nella soluzione di continuo della milza, si riferiscono al coagulo, al grande omento penetrato nell'interno della ferita, sia per i suoi rapporti col coagulo e coi bordi della ferita stessa, sia per le modificazioni di struttura che in questo si osservano, e finalmente ai cambiamenti che avvengono nei bordi della soluzione di continuo.

([1]) Tizzoni, Mem. cit. Atti della r. Accad. dei Lincei ser. 3ª, vol. XIII. 1882.

Il coagulo, in quantità più o meno grande a seconda dell'abbondanza della emorragia, lo si ritrova nello interno della perdita di sostanza poco tempo dopo praticata la lesione della milza fino a 6-8 giorni e anche più dacchè questa lesione ebbe luogo (tav. 1, fig. 2 *b*, fig. 4 *e*, fig. 14 *b*, *c*); ora è solo limitato ad una piccola porzione del fondo della ferita, ora la riempie intieramente e fa sporgenza anche sulle faccie della milza; mostrasi poi tanto più ridotto in volume e tanto più trasformato quanto più lo si esamina in stadî avanzati della cicatrizzazione della ferita della milza.

Anche quando dei grossi vasi aperti nell'operazione mettono direttamente nella perdita di sostanza, dal lato anatomico non manca mai la formazione del coagulo, come dal lato clinico non si hanno mai i segni di una grande emorragia interna. Questo coagulo è formato da globuli rossi principalmente, e da un reticolo di fibrina; i primi in alcuni punti sono talmente compressi fra di loro che difficilmente si riesce a vederne i contorni, la seconda forma qua e là dei grossi fasci splendenti, giallognoli, i quali alcune volte si colorano molto diffusamente coll'emotissilina (tav. I, fig. 2 *b*, fig. 14 *b*; tav. III, fig. 34 *f*, fig. 36 *b*, fig. 37 *d*). I globuli rossi del coagulo sono separati in primo tempo dai bordi della soluzione di continuo da grossi fasci di fibrina coagulata (tav. I, fig. 2 g), ad eccezione della parte nella quale è stato aperto qualche grosso vaso sanguigno e nella quale i fasci di fibrina generalmente sono spostati verso l'asse della soluzione di continuo e comprendono fra loro e il vaso stesso una grossa lacuna intieramente ripiena di globuli rossi (tav. I, fig. 14 *c*). Dal lato della ferita che guarda il bordo libero della milza; il coagulo trovasi in contatto fino dai primi momenti della praticata lesione (40 ore) con il grand'omento (tav. I, figura 2 *f*, fig. 4 *c*; tav. III, fig. 39 *a*), il quale fin da principio non è limitato dal sangue coagulato per un bordo regolare, ma per una linea sinuosa, sfrangiata, provvista cioè di numerosi prolungamenti e di numerosi incavi. I rapporti fra il grande omento penetrato nella soluzione di continuo, il coagulo e i bordi di quella soluzione, variano grandemente a seconda di molte circostanze. Così, nei casi specialmente nei quali l'emorragia fu quasi insignificante, abbiamo in primo luogo che il grande omento provvisto del suo adipe penetra fino al fondo della soluzione di continuo (tav. I, fig. 1, fig. 3, fig. 8, fig. 12, fig. 15, fig. 16, fig. 17) e riveste quasi immediatamente i bordi della perdita di sostanza, dai quali rimane separato per un piccolo coagulo che presto si riassorbe e scomparisce. E riguardo alla disposizione che assume il grande omento nell'interno della ferita, troviamo che alcune volte questa sierosa si distende regolarmente sui margini della soluzione di continuo formando sopra di questi uno strato piuttosto sottile, che ristringe, ma che non riempie completamente, la perdita di sostanza (tav. I, fig. 1 *c*); mentre altre volte le due lamine del grande omento unite fra di loro (tav. I, fig. 3 *c*), o separate appena da un sottile interstizio (tav. I, fig. 8 *c*), riempiono intieramente la ferita. In altri casi abbiamo, in secondo luogo, che il grande omento non penetra che per piccolo tratto nella soluzione di continuo (tav. I, fig. 4 *c*), e rimane separato dal fondo di questa per una grande massa di sangue coagulato (tav. I, fig. 4 *e*) cui esso limita verso il bordo libero della milza; ed in questi casi la piega dell'omento cambia continuamente di rapporto con la ferita stessa a causa del riassorbimento graduale del coagulo del quale la detta sierosa va a prendere

il posto fino a mettersi con numerose propaggini in contatto diretto col vecchio parenchima della milza. In casi assai eccezionali si trova in terzo luogo, a qualunque periodo di riparazione si esamini la perdita di sostanza, che il grande omento ha contratto aderenza solo con una parte della soluzione di continuo (tav. I, fig. 2 *f*, fig. 10 *c*, fig. 11 *b*), aderenza che ora è limitata al fondo o ad una porzione dei margini della ferita, ora a tutto un bordo, ora al segmento anteriore o posteriore di questo. In quarto luogo finalmente in alcuni casi il grande omento non entra direttamente nell'interno della soluzione di continuo, ma aderisce ad una delle faccie della milza, e da quest' aderenza parte una sottilissima membranella connettiva che si fonde cogli strati esterni della capsula splenica che ingrossa (tav. I, fig. 9 *e*; tav. III, fig. 40 *b*, *c*) e raggiunge in ultimo la ferita della milza, nella quale s' introduce e cammina fra il coagulo e il vecchio parenchima splenico. Questa membranella, che nei primi giorni che tengon dietro all'operazione è rappresentata da un sottile strato connettivo situato fra il coagulo e i bordi della ferita, ai quali prende ben presto saldissima aderenza, finisce in ultimo per occupare il posto del coagulo, a misura che questo si riassorbe, e a riempire di tessuto connettivo l'intiera perdita di sostanza.

È di grandissimo interesse di studiare i rapporti che può assumere il grande omento o l'epiploon gastro-splenico con la perdita di sostanza che ha luogo per l'asportazione di un piccolo pezzetto di milza, perchè da questi si può spiegare non solo la maggiore o minore rapidità con la quale si sviluppa la neoformazione della parte operata, ma si può ancora arrivare a conoscere il tessuto matrice di questa neoformazione e si possono giustamente interpetrare quei casi in cui quasi sembra a prima vista che la riparazione della soluzione di continuo si effettui senza l' intromissione entro di questa soluzione del grande omento.

Studiate le prime modificazioni della soluzione di continuo della milza che ci fa rilevare un esame a debole ingrandimento, e che si riferiscono al coagulo, ai rapporti del grande omento con questo coagulo e coi margini della ferita, passiamo adesso ad esaminare con più forte ingrandimento le prime modificazioni istologiche che si osservano in queste tre parti, vale a dire nel coagulo, nella piega del grand'omento che è penetrata fra i margini della soluzione di continuo, e in fine nei bordi di questa soluzione.

Per parte del coagulo abbiamo delle modificazioni istologiche che conducono al suo riassorbimento, come sopra abbiamo veduto; queste modificazioni consistono in un disfacimento granulare della fibrina e dei globuli rossi, i quali il più di frequente soggiacciono ad una distruzione diretta, mentre solo in piccola proporzione questi globuli sono mangiati e distrutti nello interno dei globuli bianchi.

Per parte dei margini della soluzione di continuo abbiamo anzitutto che questi si modificano alquanto nella loro forma poco dopo praticata la lesione; perdono cioè quella regolarità che si suole osservare nelle ferite da taglio, e presentano alternativamente un buon numero d' infossamenti e di piccole elevazioni che fanno sporgenza nella soluzione di continuo, come si vede facilmente nelle sezioni longitudinali di queste soluzioni. Queste modificazioni di forma che si rilevano poco tempo dopo praticata la lesione della milza devono essere studiate molto attentamente per non confonderle con altri cambiamenti di forma di questi bordi che in modo molto

più accentuato si rilevano negli ulteriori periodi di riparazione di queste ferite e che hanno un significato e una importanza molto diversa. Infatti mentre questi ultimi sono incontestabilmente determinati da neoformazione di corpuscoli di Malpighi e di polpa, come vedremo in seguito, le prime modificazioni dei bordi della soluzione di continuo sono invece determinate dalla differenza di retrazione nelle varie parti della polpa interessate dal tagliente.

Così, per l'elasticità maggiore del tessuto che forma le trabecole di fronte a quello che forma il sistema lacunare della polpa, le parti che corrispondono alla sezione di queste trabecole si retraggono di più delle rimanenti parti della polpa, le quali vengono così a fare sporgenza nella soluzione di continuo (tav. III, fig. 35 *a*, *b*.) — Oltre di questa modificazione di forma, il parenchima dei bordi e del fondo della ferita presenta, poco tempo dopo praticata la lesione (40 ore), i seni venosi fortemente dilatati e ripieni di sangue per iperemia collaterale, iperemia che nei varî casi ha una intensità ed un'estensione molto variabile, e che, in generale, è più estesa nel fondo che nei bordi della soluzione di continuo.

Assai di rado a questa iperemia si aggiunge un vero infiltrato emorragico, il quale, quando viene in scena, dilata e lacera le maglie del reticolo della polpa; di solito però il sangue che scola dalla superficie cruenta si riversa nella soluzione di continuo ed ivi forma un coagulo senza infiltrare il parenchima dei bordi di questa soluzione. Così nelle nostre numerosissime osservazioni abbiamo trovato un solo caso nel quale si era formata una di queste infiltrazioni di sangue che si estendeva quasi per un centimetro sopra uno solo dei bordi di una semplice incisione della milza.

Un' altra modificazione importante che si osserva assai prontamente nei bordi della ferita consiste nella comparsa di globuli rossi nucleati nella polpa del vecchio parenchima della milza, e tanto nelle sue vene cavernose, quanto nelle maglie del reticolo; globuli rossi che potemmo dimostrare, tanto nelle preparazioni a fresco, quanto nelle preparazioni trattate con liquido di Müller, indurate in alcool e colorate con ematossilina ed eosina. Questi globuli rossi li abbiamo trovati in discreto numero fino dal 6° giorno della praticata lesione, come abbiamo potuto dimostrarli in soluzioni di continuo di data piuttosto antica (oltre 40 giorni), benchè in numero assai minore che nelle soluzioni recenti, nelle quali, come ci occorse di osservare in una lesione di giorni 16, talora riempiono quasi intieramente il lume di alcuni vasi. Acquistammo poi la certezza che questi globuli rossi nucleati non preesistevano alla fatta operazione, con l'esame attento del pezzetto di milza asportato, eseguito tanto a fresco quanto su pezzi indurati.

Non abbiamo potuto stabilire con eguale certezza se, contemporaneamente alla comparsa dei globuli rossi nucleati nel vecchio parenchima della milza dei bordi della ferita, aumentano ancora le cellule con nucleo in gemmazione; ci è sembrato però, da quello che abbiamo potuto osservare a questo proposito, che le cellule che si trovano sui bordi della soluzione di continuo, a qualunque periodo questa si osservi, non siano in numero molto superiore a quelle che si osservano nel pezzettino asportato. Invece vedremo in seguito come un certo numero di questi elementi si trovino nel grande omento che è penetrato nello interno della ferita, e anche nelle porzioni libere di questa sierosa. Quale significato abbia la comparsa

di questi globuli rossi nucleati nel vecchio parenchima dei bordi della soluzione di continuo, globuli che si troveranno anche nell' epiploon che è penetrato nell' interno di questa soluzione e nel quale ha luogo la neoformazione del parenchima splenico, non possiamo dirlo con precisione.

Quindi, piuttosto che sollevare delle ipotesi, ci limiteremo per ora a constatare, come gli effetti delle azioni meccaniche sulla milza, per il lato della comparsa dei globuli rossi nucleati, siano identici a quelli che si hanno su quest'organo per l'anemia sperimentale, e come questo ci conduca a ravvicinare il modo d'azione della anemia sperimentale, od anche naturale, a quello delle azioni meccaniche. Così, mentre quest' anemia sarebbe causa di processi regressivi in molti organi, nella milza servirebbe come di stimolo, e al pari delle stimolazioni dirette e di natura molto diversa (stimoli meccanici), determinerebbe in questo viscere, per un meccanismo non per anco conosciuto, la comparsa di globuli rossi nucleati.

Insieme a queste modificazioni del coagulo e dei bordi della soluzione di continuo avvengono delle importantissime modificazioni nel grande omento.

Queste modificazioni consistono, per dirlo in modo generale, nel riassorbimento del grasso e nell'invasione del grande omento in quelle parti che prima erano occupate dal coagulo, a misura che questo va man mano riassorbendosi. Vediamo adesso di studiare accuratamente i due fatti accennati, poichè questi hanno grandissima parte nella rigenerazione parziale della milza, e servono anzi a preparare il terreno nel quale deve aver luogo questa neoformazione.

Studiando anzitutto a debole ingrandimento il modo col quale procede il riassorbimento del grasso, si trova che questo ha punto di partenza da quelle parti della sierosa che sono più vicine al fondo e ai bordi della soluzione di continuo della milza, e che da queste parti cammina, più o meno regolarmente, verso la linea mediana e verso le parti libere della stessa (tav. I, fig. 2 *e f*, fig. 3 *c*, *d*, fig. 8 *c*, *e*, fig. 12 *d*, *c*, fig. 16 *b*, *c*, fig. 17 *b*, *c*), avanzandosi maggiormente in quei punti della sierosa che sono provvisti di setti connettivi; questo tanto quando la detta piega del grande omento riveste semplicemente la superficie dei bordi della soluzione di continuo e vi forma sopra come un sottile strato (tav. I, fig. 1), quanto nei casi nei quali riempie intieramente la perdita di sostanza (tav. I, fig. 3, 8, 16). Oltre di ciò, si osserva che questo riassorbimento del grasso del grand'omento alcune volte si limita ad una zona più o meno estesa del grand' omento che si trova in contatto con i margini della soluzione di continuo (tav. I, fig. 3, fig. 8, fig. 16, fig. 17), altre volte si estende invece a tutta quella porzione della detta piega che è penetrata nell' interno della ferita della milza (tav. I, fig. 5, fig. 7; tav. II, fig. 24, fig. 30), e si prolunga per un poco anche al difuori di questa; altre volte finalmente avviene a chiazze irregolari (tav. I, fig. 15 *d*, *f*.) che per un certo tempo sono divise, e comprendono fra di loro delle zone di tessuto adiposo. Per la rapidità con la quale avviene la scomparsa del grasso nella piega dell'epiploon penetrata nell'interno della ferita, possiamo distinguere i casi di riassorbimento rapido e lento, di riassorbimento completo e incompleto. Nei casi di riassorbimento rapido del grasso, come già abbiamo accennato in altra parte, la rigenerazione della milza si fa assai prontamente, mentre nei casi di riassorbimento lento questa rigenerazione procede pure

con maggiore lentezza; nei casi finalmente nei quali questo riassorbimento è incompleto e irregolare, allora per un certo tempo rimangono delle cellule adipose in mezzo alla neoformazione della polpa splenica, e in ultimo alcune volte rimane una certa quantità di questo tessuto adiposo chiuso nel fondo della soluzione di continuo già quasi intieramente riparata (tav. I, fig. 9 *d*).

Tutto questo accade allorquando l'emorragia della ferita fu insignificante e l'omento, poco dopo praticata l'operazione, è penetrato fino al fondo della soluzione di continuo, ciò che certamente non è il caso più frequente. Nei casi invece nei quali la piega del grand'omento è separata dalla ferita da una massa più o meno grande di sangue coagulato, allora il riassorbimento del grasso ha principio da quella parte della piega che è in contatto con il coagulo (tav. I, fig. 4 *c*), sia che questo riassorbimento si faccia molto lentamente, sia che si estenda rapidamente a grandi tratti di quella sierosa.

Quanto al processo istologico per il quale avviene questo riassorbimento del grasso e alle modificazioni morfologiche che avvengono su quei punti del grand'omento nei quali questo riassorbimento si effettua, ecco quanto abbiamo potuto osservare. I primi fenomeni che si apprezzano in queste trasformazioni sono una dilatazione dei vasi sanguigni e un' infiltrazione di globuli bianchi fra le cellule adipose, onde queste rimangono fra loro separate da vasi turgidi di sangue e da ammassi di globuli bianchi (tav. I, fig. 1 *c*; tav. II, fig. 26 *g*; tav. III, fig. 35 *f*). Questi poi vanno aumentando a misura che procede la trasformazione delle cellule adipose e il loro ritorno a cellule connettive semplici, trasformazione che si fa in modo identico a quello descritto dal Flemming. A stadî molto avanzati di questo processo, non rimane infine che un connettivo ricco di globuli bianchi, nel quale qua e là si rinviene ancora qualche cellula adiposa come vestigio del tessuto adiposo che precedentemente si trovava in quella parte. In mezzo ai globuli bianchi che dividono le cellule adipose in via di riassorbimento, si osserva poi un buon numero di globuli rossi fuori dei vasi sanguigni, che in alcuni punti si raccolgono sotto forma di piccole emorragie; di questi globuli rossi alcuni sono provvisti di nucleo in via più o meno avanzata di distruzione (tav. III, fig. 42 *c*). Il riassorbimento del tessuto adiposo dell'epiploon, perciò, è determinato dal turgore dei vasi sanguigni, dalla comparsa e successivo accumulo nel connettivo perivascolare e nel connettivo che divide le cellule adipose di globuli bianchi e di globuli rossi, dei quali alcuni forniti di nucleo; questo riassorbimento sembra che abbia luogo per primo nel connettivo che segue i vasi sanguigni di un certo calibro, poichè lo si suole osservare dapprima lungo i setti connettivi del tessuto adiposo dove corrono questi vasi. Se intanto si considerano i fatti rilevati nel grand'omento per rapporto al riassorbimento del grasso, in modo più generale, e si confrontano con quanto avviene nel riassorbimento del grasso delle ossa lunghe e nel ritorno del midollo adiposo allo stato di midollo ematopoetico, non possiamo a meno di riconoscere una grande analogia, una grande somiglianza nei fatti istologici che si svolgono e accompagnano in queste due parti la scomparsa del grasso. Anche nel midollo delle ossa abbiamo infatti che il riassorbimento del tessuto adiposo è preceduto e accompagnato da forte dilatazione vascolare e dalla comparsa fra le cellule cariche di

grasso di cellule midollari e di globuli rossi, alcuni dei quali provvisti di nucleo. Questa identità nella forma e nelle trasformazioni non può a meno di richiamare il pensiero ad una identità di funzione fra midollo adiposo e tessuto adiposo delle varie parti del corpo e di fare sospettare che ambedue queste parti possano in egual maniera, benchè in proporzione differente, provvedere in certe circostanze ai bisogni della crasi del sangue.

Riassorbito il grasso, ne risulta un connettivo embrionale, lo abbiamo già detto, il quale si trova in contatto con i bordi e con il fondo della soluzione di continuo in que' casi nei quali il grande omento aveva aderito già in primo tempo a queste parti (tav. I, fig. 1, 8, 12, 15, 16, 17), mentre è da queste separato per un coagulo più o meno grosso nei casi nei quali si ebbe emorragia piuttosto abbondante (tav. I, fig. 2 , fig. 4 , fig. 14). Ne viene da ciò, che arrivati a questo periodo, il modo di procedere della cicatrizzazione delle ferite della milza è un poco diverso a seconda che si verifica l'una o l'altra condizione. Mentre nel primo caso, infatti, il tessuto connettivo, che si forma in modo lento o rapido dal riassorbimento del grasso, si trova già in contatto con i bordi della perdita di sostanza, ed in tale condizioni che in quello possono avvenire direttamente i fatti di neoformazione che descriveremo più in basso, invece nei casi nei quali esiste un coagulo fra piega dell'omento e bordi della ferita, abbiamo a questo punto da prendere in considerazione quello che avviene per la scomparsa o per il riassorbimento del coagulo. Se a questo periodo si osserva allora il bordo dell'omento che è in contatto del coagulo e nel quale è già stato riassorbito il grasso, si trova che da questo partono numerosi prolungamenti connettivi, semplici o ramosi, i quali invadono il coagulo stesso in tutte le direzioni a misura che questo si trasforma e si riassorbe (tav. I, fig. 4 c; tav. III, fig. 39 *a* , *b*). Lo stesso fatto avviene pure, anzi ciò accade sempre molto presto, in vicinanza dei bordi della soluzione di continuo, nel punto cioè nel quale il vecchio parenchima della milza, il coagulo e la piega del grand'omento si trovano fra loro a contatto, e così ha luogo la formazione di un prolungamento connettivo che a guisa di sottile membranella s'insinua fra i margini della soluzione di continuo e il coagulo, e sulla genesi della quale può sempre rimanere qualche dubbio se non si esaminano dei tagli microscopici sottilissimi, completi, e disposti in serie, come quelli che si ottengono col microtomo di Thoma (tav. I, fig. 4 *b* ; tav. III, fig. 34 *d*, e fig. 37 b). Una volta formatasi questa membranella connettiva fra i bordi della soluzione di continuo e il coagulo, questa va poco a poco facendosi più grossa , e da essa partono numerosissimi prolungamenti di connettivo embrionale che invadono il coagulo in direzione opposta a quelli che partono dalla zona periferica della piega dell'omento penetrata nella perdita di sostanza. In questo modo, dalla membranella connettiva che riveste il fondo e i bordi della ferita, nonchè dalla periferia della piega dell'epiploon in questa insinuato, partono dei fasci di connettivo (tav. III, fig. 36 *a*, fig. 37 *c*), che s'intersecano fra di loro e dividono il coagulo in tante piccole porzioni, che vanno successivamente aumentando di numero e diminuendo di grandezza fino a che l'intero coagulo non sia del tutto riassorbito e la perdita di sostanza, che risulta dalle asportazioni cuneiformi della milza, non venga ad essere intieramente ripiena di un

tessuto connettivo embrionale, in mezzo al quale alcune volte rimangono dei resti del coagulo o una pigmentazione giallo-bruna che ne indica la sua precedente esistenza. Da tutto quello che abbiamo descritto, si comprende facilmente come la presenza del coagulo, quando questo è molto abbondante, sia causa di ritardo nella riparazione delle soluzioni di continuo della milza.

I fatti che abbiamo descritti per i casi nei quali la piega dell'omento entra direttamente nella ferita ed è in primo tempo separata dal fondo di questa per l'interposizione del coagulo, valgono ancora a spiegare la genesi e lo sviluppo della sottile membranella connettiva che apparisce fra i bordi della ferita e il coagulo nei casi nei quali l'epiploon ha contratto aderenze in punti piuttosto lontani dalla praticata lesione. Abbiamo infatti in questi ultimi casi, che dal punto dell'aderenza fra l'epiploon e la superficie della milza parte una sottile pellicola connettiva, la quale, come già abbiamo visto, camminando sulle faccie della milza arriva a penetrare nell'interno della soluzione di continuo, dove dapprima s'interpone in forma di una zona sottile fra il coagulo e i bordi della ferita, ma che in ultimo per gettate connettive le quali invadono il coagulo in tutte le direzioni, finisce per sostituirsi a questo. Ora si comprende facilmente come in questi casi, di fronte alla mancanza di una diretta penetrazione del grande omento nell'interno della ferita, resta molto difficile di determinare, ad un primo esame, la genesi dello strato connettivo che si vede comparire molto presto fra i bordi della soluzione di continuo e il coagulo, nonchè la provenienza della pellicola, o strato sottile di connettivo embrionale, che si trova sopra una faccia della milza in vicinanza della praticata lesione, e che in alcuni punti si mostra fusa intieramente cogli strati esterni della capsula (tav. III, fig. 40 *a*, *b*). Ma esaminando invece diversi casi, e studiando con molta attenzione i preparati, si trova che gli strati esterni della capsula non prendono parte alla formazione di questa pellicola, la quale in alcuni punti è dalla capsula stessa divisa per un sottile spazio regolarmente rivestito dall'endotelio (tav. I, fig. 9 *e*), che essa proviene invece dai punti nei quali l'epiploon si è fatto aderente alla milza, e che, ripiegandosi sopra i bordi della soluzione di continuo, penetra in ultimo nell'interno di questa e prende posto fra il coagulo e i margini della ferita. Determinati questi fatti, abbiamo esaminato di nuovo i due casi sui quali uno di noi aveva sollevato qualche dubbio relativamente al modo di riunirsi della soluzione di continuo, e alla possibilità che questa riunione avesse luogo senza l'influenza dell'epiploon, e ci siamo convinti che anche in questi due casi il connettivo dell'interno della ferita era in continuazione con una sottile pellicola della superficie della milza, già fusa per buona parte coll'endotelio e con gli strati esterni della capsula splenica: in questi due casi perciò, come in molti altri, si aveva a che fare con aderenze dell'epiploon con punti della superficie della milza assai lontani dalla praticata lesione e non facilmente rilevabili in queste prime prove.

Concludiamo quindi a questo proposito, che il tessuto connettivo il quale va a contatto con i bordi della soluzione di continuo, e che successivamente la riempie per intiero quando il coagulo è stato riassorbito, nei numerosi nostri esperimenti ha sempre avuto origine dalle grandi duplicature del peritoneo, sia che l'epiploon penetrasse direttamente nello interno della ferita e là avesse luogo la sua trasformazione

e il riassorbimento del grasso che contiene, sia che aderisse a punti della superficie della milza lontani dalla lesione, e da queste parti raggiungesse la soluzione di continuo mediante una sottile neoproduzione connettiva, o pellicola, come sopra abbiamo descritto. Con questo non vogliamo negare assolutamente che anche il peritoneo viscerale che ricuopre la superficie della milza non possa contribuire in alcuni casi alla formazione di un tessuto connettivo il quale dovrà servire di matrice alla nuova produzione di corpuscoli e di polpa. Che se non possediamo, nelle numerose asportazioni cuneiformi da noi operate sulla milza, delle prove dirette che valgano ad appoggiare queste conclusioni per quanto si riferisce alla neoformazione della perdita di sostanza praticata in quest'organo, abbiamo però il fatto che da un lato uno di noi (Tizzoni) dimostrò già per altri visceri (stomaco) la possibilità di una neoproduzione di parenchima splenico dal peritoneo viscerale [1], e dall'altro una nostra osservazione, che sarà riportata nel prossimo capitolo, e che si riferisce ad una riproduzione di corpuscoli e di polpa sviluppatasi dalla sierosa di rivestimento della milza e per la massima parte separata dal vecchio parenchima per la capsula splenica. Studiato quello che avviene in primo tempo nel coagulo, nell'epiploon e nel vecchio parenchima della milza in corrispondenza delle asportazioni cuneiformi di quest'organo, e che quasi costituisce un momento preparatorio per la neoformazione di corpuscoli e di polpa che dovrà aver luogo, esaminiamo adesso come avviene questa neoformazione e da qual tessuto matrice ha origine. Per comprendere bene il modo col quale si sviluppa questa neoformazione, dobbiamo cominciare col descrivere minutamente la struttura del tessuto connettivo embrionale che deriva da trasformazione diretta e da proliferazione del grand'omento e che in ultimo riempie più o meno completamente la soluzione di continuo. Questo connettivo, esaminato a debole ingrandimento, ci si presenta come un connettivo embrionale ricco di elementi cellulari e di vasi, dei quali alcuni in via di formazione. A più forte ingrandimento, si vede che degli elementi cellulari di questo tessuto pochi sono tondeggianti, la massima parte ovali, appiattiti o a rari prolungamenti e di forme diverse, e che ricordano quelli che Flemming ha raffigurati come cellule del tessuto adiposo embrionale; si vede inoltre che hanno un nucleo ovale, un protoplasma finamente granuloso, e che sono posti in una sostanza fondamentale quasi omogenea che si colora leggermente e diffusamente coll' ematossilina.

Molte di queste cellule del tessuto connettivo che riempie la soluzione di continuo assumono presto una forma fusata, si uniscono con le cellule vicine e formano delle serie o cordoni assai regolari di cellule, disposti molto vicini gli uni agli altri e in rapporto con i vasi preesistenti (tav. III, fig. 43). Sono questi cordoni cellulari, formati dapprima da un solo rango di cellule, che si spingono nel coagulo a misura che questo si riassorbe, e che alcune volte si vedono come distaccati in mezzo al sangue coagulato, quando il coltello ruppe in qualche punto la continuazione di questa serie di elementi con il preesistente connettivo dell' omento o con la pellicola che da questo deriva; accade anzi talora di vedere una sola cellula fusata isolata in mezzo al coagulo, ciò che può mettere assai nell'imbarazzo per spiegare come

[1] Tizzoni, lav. cit., Rend. dell'Acc. delle scienze dell'Istit. di Bologna, 1882. Att. della r. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, vol. XV.

mai questa possa trovarsi in quella parte se non prima sia conosciuto il processo nella sua interezza. A questo periodo si nota ancora la comparsa di globuli rossi liberi nelle maglie della sostanza fondamentale (tav. III, fig. 43). A stadî più avanzati aumentano le comunicazioni delle cellule connettive, onde si forma una bellissima rete protoplasmatica (tav. III, fig. 46 a) la quale è in rapporto con i vasi sanguigni, ed in parte forma essa stessa dei vasi sanguigni, dei quali nelle varie sezioni si possono trovare i diversi stadî di sviluppo; a questo punto è discretamente aumentato il numero dei globuli rossi che si trovano nelle maglie dello stroma di questo tessuto, e qua e là è compreso qualche globulo rosso nucleato, e delle cellule con nucleo in gemmazione (tav. III, fig. 41 o, fig. 46 *a*).

In questo stadio ha luogo nel connettivo embrionale, derivato dalla trasformazione e dalla proliferazione dell'epiploon, la vera neoformazione di corpuscoli e di polpa splenica. Questa neoproduzione avviene in due modi, o con lo sviluppo primitivo di corpuscoli, o con quello della polpa; cioè in quelle due stesse maniere con le quali avviene la riproduzione totale, la quale, come uno di noi ha dimostrato (Tizzoni), ha origine per la massima parte con la formazione della polpa nel caso di riproduzione per malattia della milza grande, con formazione primitiva di corpuscoli di Malpighi nel caso della splenectomia. Cominciamo dalla descrizione della prima forma, sia perchè questa è più frequente, sia perchè il modo di formazione della polpa è sempre lo stesso, tanto che preceda, quanto che segua la comparsa dei corpuscoli di Malpighi. Osservando attentamente i bordi della soluzione di continuo, si vede nel connettivo che riempie la perdita di sostanza, alla periferia di un corpuscolo già sviluppato e che ha raggiunto già un discreto volume, o poco lontano da esso, un'arteriola, la quale, in sezione trasversale, comparisce circondata da poche serie concentriche di cellule rotonde con grande nucleo e con scarso protoplasma, e si nota tra queste qualche cellula a nucleo ovale, di forma non ben definibile in mezzo a quell'accumulo cellulare. In stadî più avanzati queste figure hanno raggiunta una discreta grossezza, e gli elementi cellulari sono così disposti da dimostrare la loro tendenza ad aggrupparsi attorno a ciascun' arteria (tav. III, fig. 45 *d*), fino a che in ultimo passano intieramente ad avere la forma e la struttura dei corpuscoli di Malpighi (tav. I, fig. 5 *d;* tav. II, fig. 24 *d*, fig. 28 *d*, fig. 30 *c*). Relativamente alla provenienza del vaso attorno al quale si forma il corpuscolo, non può decidersi per ogni caso se questo appartenga ai vasi della polpa o a quelli dell'epiploon, poichè i primi si prolungano indubbiamente nel connettivo che riempie la soluzione di continuo e probabilmente si anastomizzano con la ricca rete vascolare di questo tessuto. Però, se non è possibile di decidere questa questione in modo generale, e specialmente per quei casi nei quali lo sviluppo dei nuovi corpuscoli avviene in tutta vicinanza dei bordi del vecchio parenchima, ciò riesce possibile invece per quelli nei quali il corpuscolo si forma in parti della soluzione di continuo assai lontane dai suoi bordi (tav. I, fig. 5; tav. II, fig. 24, 28, 30) e per quelli nei quali si vede l'arteriola che proviene dal connettivo che riempie la perdita di sostanza e che si fa di calibro sempre minore a misura che si accosta al vecchio parenchima della milza (tav. II, fig. 32 *b*,*c*). Quindi, senza escludere assolutamente il fatto che lo sviluppo dei corpuscoli di Malpighi possa aver luogo attorno ai vasi

del vecchio parenchima della milza prolungati nel connettivo che riempie la perdita di sostanza, bisogna ammettere come dimostrato che questa neoformazione, il più di frequente, ha luogo al dintorno dei vasi di questo connettivo, il quale, come abbiamo visto, rappresenta un prodotto della trasformazione e della proliferazione della piega dell'epiploon insinuatasi nella ferita. E se ciò non fosse, non si comprenderebbe davvero come potesse aver luogo la formazione di questi corpuscoli in quelle parti dell'epiploon che rimangono al di fuori della praticata lesione della milza e un poco distanti da questa (tav. I, fig. 13 *g;* tav. II, fig. 33 *d*, *e*).

I corpuscoli che si formano nell'interno della soluzione di continuo nelle prime fasi del loro sviluppo sono completamente separati dal vecchio parenchima della milza, con il quale però si mettono prontamente in rapporto, sia per il progredire dell'accumulo dei globuli bianchi intorno all'arteriola del corpuscolo in proporzione maggiore dalla parte con la quale il corpuscolo guarda i bordi della ferita (tav. III, fig. 45 *d*), sia per formazione di polpa attorno al corpuscolo già sviluppato. Che in molti casi i corpuscoli di Malpighi in formazione siano in primo tempo separati dalla vecchia polpa dei bordi, noi possiamo affermarlo con sicurezza, poichè non ci siamo limitati semplicemente all'esame di poche sezioni, ma abbiamo alcune volte esaminato l' intiero corpuscolo sopra a serie complete di sezioni microscopiche, ciò che si rende indispensabile per avere una prova certa di questa asserzione.

Un altro fatto ci piace ancora di far notare in riguardo allo sviluppo dei corpuscoli di Malpighi, per evitare possibili errori e confusioni. Quando si eseguisce l'operazione con il metodo antisettico, accade che i peli, i quali durante l'atto operatorio vanno a cadere in quantità più o meno grande sull'epiploon e per mezzo di questo, o anche per mezzo delle spugne con le quali si deterse la soluzione di continuo, vengono ad esser trasportati nell' interno della ferita, non destano nel connettivo in mezzo al quale si trovano nessun processo suppurativo, infettivo, ma si limitano solo a risvegliare attorno a loro un modico grado d'infiammazione. Ne viene perciò che molto spesso si osservano in mezzo al connettivo che riempie la soluzione di continuo degli accumuli di cellule, i quali in sezione trasversa danno luogo a delle figure che somigliano molto a quelle dei corpuscoli di Malpighi in via di formazione, ma che hanno un significato molto differente di questi, dai quali si distinguono per la presenza di uno o più peli nel loro interno e per le cellule giganti che si vedono sempre attorno a questi corpi estranei; in altre parole in questi casi, invece di corpuscoli di Malpighi, si tratta di un processo infiammatorio subacuto o cronico sviluppatosi al dintorno dei peli. Però in pochi casi ci fu dato di vedere uno di questi peli entro un vero corpuscolo di Malpighi già circondato di polpa, sia che il pelo fosse totalmente incluso nel corpuscolo, sia che in parte fosse compreso dentro di questo e in parte situato ancora nel connettivo che riempiva la perdita di sostanza. Abbiamo voluto espressamente accennare quest'ultima particolarità, poichè questa costituisce per noi una prova di più che i corpuscoli di Malpighi hanno primitivamente origine dal connettivo e per opera del connettivo dell'omento, e che solo secondariamente si mettono in rapporto col vecchio parenchima della milza. I corpuscoli così formati si rinvengono il più di frequente in vicinanza dei bordi e del fondo della soluzione di continuo; ordinariamente però

in maggior numero nel fondo e nella porzione inferiore dei margini di quella; di solito si trovano in piani differenti, solo eccezionalmente sono raccolti in discreto numero nel fondo della ferita (tav. II, fig. 20 *c*), o situati verso la linea mediana di questa e molto distanti dai suoi margini (tav. II, fig. 24, 28, 30). Come abbiamo detto, presto si fondono con il vecchio parenchima della milza o con quello già formatosi nei precedenti periodi della neoformazione, sia per l'ingrossamento del corpuscolo, sia per la formazione al dintorno di questo di una certa zona di polpa, che si fa più prontamente e più abbondantemente dal lato del corpuscolo che guarda i margini della soluzione di continuo (tav. I, fig. 5 *b*).

Siccome poi la polpa neoformata circonda in ultimo tutto il corpuscolo, così la neoformazione nell'insieme prende la figura di un corpo sferico che sporge verso la linea mediana della soluzione di continuo; ripetendosi lo stesso processo in diversi punti dei margini della ferita, ne viene che questi anzi che risultare da una linea retta regolare, come la si suole osservare nelle ferite da taglio, hanno invece il loro limite segnato da una serie di linee curve colle convessità sporgenti nella soluzione di continuo (tav. I, fig. 17 *a;* tav. II, fig. 24 *a*).

Da ciò ne viene che la presenza di queste figure sferiche che sporgono dai margini del vecchio parenchima della milza stanno sempre a denotare che la neoformazione si è svolta al dintorno di un centro rappresentato da un corpuscolo di Malpighi, e che nei casi nei quali si riscontrano queste figure, la detta neoformazione perciò ha avuto principio con lo sviluppo di corpuscoli di Malpighi.

Aggiungeremo finalmente, a proposito dei corpuscoli di Malpighi, come alcune volte si siano trovati verso il fondo della lesione della milza dei corpuscoli in forma di segmenti di sfera e con il lato pianeggiante di questi segmenti in continuazione con il connettivo dell'epiploon non ancora trasformato in polpa splenica (tav. I, fig. 6 *c*). Noi abbiamo interpetrato queste figure come corpuscoli che caddero sotto il taglio e dei quali perciò ne venne asportata una parte che non tornò più a riprodursi. È per questo che tale osservazione ci sembra appunto di molta importanza, giacchè vale a confermare che i vecchi corpuscoli di Malpighi non prendono nessuna parte alla neoformazione che ha luogo nella soluzione di continuo, e che essi non sono nemmen capaci di rigenerare quella parte che venne loro asportata.

Studiato il modo col quale ha luogo la produzione dei corpuscoli di Malpighi, vediamo adesso per qual processo avviene la formazione della polpa, la quale, lo abbiamo già detto, si sviluppa in modo identico tanto che preceda quanto che segua la formazione dei corpuscoli. Prima però di entrare nella minuta descrizione istologica, vogliamo riportare alcune prove che dimostrano la possibilità di una formazione primitiva della polpa, e che ci hanno servito di base per formulare le conclusioni sopra riferite. In un caso di asportazione parziale, cuneiforme della milza, che datava solo da 6 giorni, abbiamo trovato in mezzo al coagulo in riassorbimento, due focolai di polpa in via di sviluppo (tav. I, fig. 14 *f*), situati verso la linea mediana della soluzione di continuo, del tutto sprovvisti di corpuscoli di Malpighi e completamente separati dai bordi della soluzione di continuo; questi due focolai erano in comunicazione, per mezzo di fasci connettivi,

con la piega dell'epiploon penetrata nella ferita, là quale piega già nella sua zona periferica avea perduto l'adipe; erano insomma piccole porzioni di polpa sviluppatesi dal connettivo che avea invaso il coagulo in riassorbimento, e che, per quanto si osservassero in sezioni microscopiche disposte in serie, non mostravano nessuna traccia di corpuscoli e non avevano nessun rapporto diretto col parenchima della vecchia polpa. La polpa in via di sviluppo che abbiamo descritta era già arrivata a stadî piuttosto avanzati della sua formazione, e presentava in alcuni punti proliferazione nucleare attivissima delle trabecole connettive e formazione incipiente di vasi carvernosi. In altro caso di asportazione di milza di giorni 21, tutta la soluzione di continuo era riempita dal solito connettivo embrionale, che si continuava con la piega del grande omento, e che in quasi tutta la sua estensione, benchè non in tutti i punti allo stesso grado, presentava lo sviluppo di polpa splenica senza formazione precedente di corpuscoli di Malpighi (tav. I, fig. 7 *c*); solo verso il mezzo della soluzione di continuo rimaneva un piccolo nucleo di connettivo non ancora infiltrato di sangue che rappresentava i resti della piega dell'omento penetrata nell'interno della ferita (tav. I, fig. 7 *d*). Quello che è rimarchevole in questi casi nei quali ha luogo la neoformazione primitiva della polpa, si è che i margini del parenchima splenico più vecchio non presentano quelle elevazioni emisferiche piuttosto regolari che si osservano nei casi in cui ha luogo dapprima la formazione dei corpuscoli, e che dipendono appunto dal fatto che la neoformazione della polpa si fa attorno di quelli. Quindi, anche dalla forma dei bordi della soluzione di continuo, si può giudicare, fino ad un certo punto, se la neoformazione che va a riempire la perdita di sostanza ha principio con la formazione dei corpuscoli del Malpighi o con quella della polpa.

Premesso questo, passiamo adesso a descrivere il processo istologico per il quale avviene la neoformazione della polpa. Studiando attentamente il tessuto connettivo embrionale che riempie la perdita di sostanza e che sopra abbiamo descritto, si trova che nelle parti nelle quali avviene questa neoformazione aumenta considerevolmente la quantità dei globuli rossi che stanno nelle maglie della sua sostanza fondamentale, onde si formano fra la rete protoplasmatica delle cellule delle vere lacune sanguigne, fra le quali rimane una trama costituita dalla solita sostanza intercellulare omogenea, debolmente e diffusamente colorata dall'ematossilina; trama che, al pari del tessuto dal quale deriva, è provvista di cellule fisse fusate, stellate, di forma irregolare, molto ricche di protoplasma (tav. III, fig. 46 *a*, *b*, *c*).

Così, per questa infiltrazione sanguigna, del tutto simile a quella descritta da uno di noi (Tizzoni) nelle prime fasi di neoformazione della polpa per i casi di riproduzione totale della milza, ne nasce un tessuto lacunare a maglie molto grandi ed irregolari, maglie che sono intieramente ripiene di sangue e sprovviste di una parete endoteliale (tav. III, fig. 39). Come passi il sangue dai vasi sanguigni in queste lacune, ciò non è possibile determinare con certezza; solo in pochissimi casi abbiamo potuto ottenere delle figure nelle quali sembrava che i vasi del connettivo embrionale, che riempie la perdita di sostanza, fossero in comunicazione diretta con le lacune sanguigne che si andavano formando nella sostanza fondamentale di questo connettivo. Ed a riguardo di questi vasi che forniscono il sangue alla polpa in via

di sviluppo, non si può negare, come per quelli che servono alla vascolarizzazione del corpuscolo, che in parte derivino dai vasi del vecchio parenchima della milza, come è fuori di dubbio che i vasi proprî del connettivo che ha riempito la perdita di sostanza, i quali nelle trasformazioni da quello subite sono grandemente aumentati di numero, assai dilatati, e presentanti in alcuni punti come delle varicosità, mettono nella polpa che si sta neoformando e riversano il loro sangue nelle sue maglie (tav. II, fig. 28 *e*). In stadî più avanzati, le trabecole dell'infiltrato sanguigno presentano attiva moltiplicazione nucleare e formazione di gettate connettive, le quali spingendosi entro le lacune sanguigne le dividono e suddividono, regolarizzandole e trasformandole nelle piccole e delicate trabecole della polpa, mentre i fasci più grossi si trasformano nei grossi setti del parenchima splenico; niente abbiamo potuto stabilire sul modo di formazione delle fibre elastiche e delle fibre muscolari liscie di queste trabecole. Intanto, mentre ha luogo quest'ultimo stadio di neoformazione della polpa, in alcuni punti di essa vedonsi comparire dei vasi cavernosi; questi sono molto larghi, hanno una parete distintamente endoteliale con nuclei sporgenti nel loro lume, presentano un decorso presso che parallelo fra di loro e parallelo al corpuscolo che attorniano, nel caso che la neoformazione della polpa si faccia attorno ad un corpuscolo di Malpighi, e non mostrano che scarsi rami di comunicazione. Questi vasi sembra non derivino dai vasi preesistenti, ma che abbiano origine dagli spazî lacunari della polpa in via di sviluppo, i quali, per trasformazione delle cellule connettive che limitano questi spazî, si rivestirebbero di una speciale parete endoteliale.

Entro questa polpa in via di formazione, come nei vasi e nelle maglie del connettivo dell'omento insinuatosi nell'interno della ferita, si osservano molto spesso dei globuli rossi nucleati, delle cellule con nucleo in gemmazione e delle cellule globulifere. Dei globuli rossi nucleati alcuni presentano un nucleo unico in stato atrofico, altri hanno il nucleo diviso in tre o quattro piccole masse, altri, benchè assai più raramente, offrono un nucleo molto allungato e rigonfiato da un lato a guisa di una gemma e mostrano nel protoplasma fasi più o meno avanzate di divisione. Noi riteniamo che questi globuli rossi nucleati derivino non solo dal vecchio parenchima della milza, dove gli abbiamo osservati fino dai primi momenti dalla praticata lesione, ma che si formino anche in quelle parti nelle quali si hanno le varie fasi di sviluppo della polpa splenica, dove si ha cioè della polpa allo stato embrionario. Infatti, noi abbiamo potuto osservare questi globuli rossi nucleati non solo nella neoformazione che va a riempire la perdita di sostanza, ma anche in quella che si sviluppa nella porzione libera del grande omento e che, senza nessun dubbio, è del tutto indipendente dalla milza primaria. Una volta che questi globuli rossi nucleati si sono formati nella polpa splenica in via di sviluppo, essi probabilmente si moltiplicano attivamente e aumentano assai di numero, come lo dimostrano le figure nucleari e i segni di divisione cellulare di questi globuli che abbiamo sopra descritti. Le cellule con nucleo in gemmazione si trovano isolate, o raccolte in gruppetti di due a quattro cellule, nella polpa in via di sviluppo; sono molto ricche di protoplasma finamente granuloso e per i loro caratteri sono perfettamente identiche a quelle che si rinvengono normalmente nella polpa splenica.

Vogliamo aggiungere finalmente, sempre a riguardo della neoformazione della polpa, come nella riproduzione che tien dietro alle asportazioni parziali, cuneiformi della milza, non si siano mai osservate quelle figure che uno di noi ha descritte come altrettanti stadî di sviluppo della polpa nella riproduzione totale che ha luogo per la splenectomia, e come invece questa neoformazione parziale della polpa avvenga in modo analogo a quella che si produce nei noduli della parte libera del grande omento in seguito a malattie della milza primaria (splenite indurante).

Studiata la neoformazione di corpuscoli e di polpa che ha origine dall'epiploon che riempie la soluzione di continuo trasformato in un connettivo embrionale, vediamo adesso quello che avviene nel vecchio parenchima della milza. All'infuori delle prime modificazioni che abbiamo precedentemente studiate, poco è da osservare in questa parte. A debole ingrandimento troviamo anzitutto confermato quello che già abbiamo accennato nel reperto macroscopico, cioè che uno dei bordi della soluzione di continuo esaminata in sezione trasversa comparisce più grosso dell'altro, e molte volte in sezione longitudinale anche elevato sul livello dell'altro, per 1 o 2 mill. (tav. II, fig. 26, 29; tav. I, fig. 2, 4, 8). Questo attribuiamo ad una neoformazione parenchimatosa di milza che ha luogo prevalentemente in uno dei bordi della ferita e che si fa in special modo subito al disotto della capsula di questo bordo, ed in alcuni casi ad una neoformazione di parenchima splenico che avviene al disopra di uno dei bordi e che si produce da quella porzione dell'epiploon la quale si ripiega sopra uno dei margini della ferita per introdursi nel suo interno. All'infuori di questa differenza di grado, tutto il vecchio tessuto della milza che circoscrive la perdita di sostanza presenta segni più o meno evidenti di una neoformazione parenchimatosa. Così i corpuscoli di Malpighi che si trovano in vicinanza della ferita sono un poco più grossi di quelli delle parti lontane e forniti di un numero maggiore di zone concentriche alla loro periferia (tav. I, fig. 8 *b*, fig. 9 *b*); la polpa ha in queste parti, specialmente in alcuni punti, un numero maggiore di nuclei, benchè un giudizio esatto a questo riguardo sia molto difficile.

Quanto alla capsula e alle trabecole queste non prendono nessuna parte attiva alla neoproduzione di parenchima splenico. La capsula alcune volte si arresta nel punto nel quale venne praticata la sezione (tav. II, fig. 26 *c*, fig. 29 *b*), come si può apprezzare molto facilmente e molto più giustamente nelle sezioni trasverse; alcune volte invece segue la neoformazione che si sviluppa nella perdita di sostanza; altre volte finalmente s'introflette nella soluzione di continuo e ne riveste i bordi per un'estensione più o meno grande (tav. I, fig. 10 *e*, fig. 11 *c*). Questo ultimo fatto accade generalmente nei casi nei quali l'epiploon ha contratto aderenza solo con una parte dei bordi della ferita, e nei quali solo in corrispondenza dell'avvenuta adesione si verifica la neoformazione di parenchima splenico, mentre il rimanente di questi bordi si mostra del tutto inattivo e si riveste di capsula (tav. I, fig. 10, fig. 11).

Progredendo la neoproduzione di corpuscoli e di polpa che sopra abbiamo analizzata, accade poco a poco, e più o meno rapidamente a seconda dei casi, la riparazione completa della perdita di sostanza, la quale, come già abbiamo veduto dai caratteri macroscopici, procede dal fondo della soluzione di continuo verso il

bordo libero della milza, dai margini della ferita verso la linea mediana della medesima, dalle parti centrali verso le due faccie della milza. I primi due modi di progredire della neoformazione si vedono benissimo in sezioni longitudinali (vedi figure della tav. I), il terzo si vede meglio nelle sezioni trasversali, nelle quali si rileva facilmente che, mentre le parti centrali dei bordi già si toccano, questi poi nelle rimanenti porzioni si fanno tanto più lontani fra loro quanto più ci si avvicina alle due faccie della milza (tav. II, fig. 26 *d*). In questo modo da ciascun lato del punto centrale unito si formano due triangoli (tav. II, fig. 26 *e*, *f*) con la base rivolta verso le due faccie della milza e con gl'altri due lati curvilinei; di questi due triangoli d'ordinario è sempre un poco più grande quello che è situato dalla parte per la quale l'epiploon è entrato nell' interno della soluzione di continuo. Ma progredendo ancora la neoformazione, questi due triangoli si fanno sempre più piccoli ed in ultimo spariscono del tutto. La capsula però molte volte non tiene dietro alla neoformazione che riempie la perdita di sostanza, onde non di rado accade di vedere che essa si arresta ad un dipresso al punto nel quale venne praticata la sezione e segna così i limiti fra il vecchio e il nuovo tessuto, il quale in tal modo da una o da ambedue le faccie della milza si trova ancora in comunicazione diretta coll'epiploon, sul quale talune volte si prolunga, sia in forma di un piccolo cordone, sia sotto forma di noduli vicini, ma separati e distinti gli uni dagli altri. In periodi più avanzati però, meno nei casi eccezionali citati, anche il nuovo parenchima della milza viene ad esser chiuso dalla capsula, e questa chiusura accade di solito prima dal lato opposto a quello per il quale è penetrato l' epiploon (tav. II, fig. 31 *c*), poi dal lato che corrisponde al punto d' ingresso dell'omento. Avvenuta la chiusura della capsula si riconosce facilmente il lato dal quale è entrato l' epiploon per l'aderenza della capsula con questa sierosa, mentre nell'altro lato si nota solo una leggiera sporgenza nel punto nel quale fu praticata la soluzione di continuo, sporgenza dovuta a un eccesso di formazione di corpuscoli e di polpa che spinge in fuori la capsula.

Alcune volte però si hanno delle eccezioni a questo modo di procedere della neoformazione, sia perchè il processo di nuova produzione della milza si arresta poco dopo incominciato e la soluzione di continuo rimane quasi intieramente ripiena di epiploon adiposo (tav. I, fig. 3 *c*, fig. 8 *c*), sia perchè la neoproduzione, invece di procedere dal fondo della ferita verso la sua parte superficiale, tiene un cammino inverso, onde rimane nel fondo di questa ferita un pezzo d'epiploon separato completamente dal rimanente di questa sierosa e circondato da ogni parte da parenchima splenico (tav. I, fig. 9 *d*).

Quando è avvenuta la chiusura completa della ferita, al microscopio si trova nel posto di questa un sottile fascio di connettivo più o meno infiltrato di sangue; questo fascio tiene di solito un andamento serpiginoso negl' incavi del quale corrispondono dei corpuscoli di Malpighi, e termina in una trabecola nel fondo della ferita della milza (tav. II, fig. 27). Questa figura resulta, com'è naturale, dal modo, col quale nella maggioranza dei casi la neoformazione di milza procede dai bordi della soluzione di continuo verso la sua parte mediana; le piccole sporgenze sferoidali di essi bordi, che convergono fra di loro e che sono date da corpuscoli circondati

di polpa, non possono formare che una linea sinuosa quando quelle di una parte si toccano con quelle dell'altra e quasi s' incastrano le une con le altre.

Di fronte a questi casi nei quali avvenne la riunione completa della perdita di sostanza, stanno quelli nei quali ebbe luogo una riunione incompleta, e che corrispondono a quei casi in cui l' epiploon contrasse solo aderenze parziali con i margini della ferita; in questi casi, come abbiamo veduto, la capsula riveste quelle parti dei bordi sui quali l'epiploon non ha preso aderenza, onde nel posto della soluzione di continuo resta in ultimo una fenditura più o meno stretta, più o meno regolare (tav. I, fig. 10 *b*, fig. 11 *d*).

Con questo abbiamo terminato di esaminare la prima parte della questione che si riferisce alla rigenerazione parziale della milza, al modo cioè col quale si sviluppa questa neoformazione di parenchima splenico a partire dalle prime sue fasi andando fino alla riunione completa della perdita di sostanza. In questi studî abbiamo espressamente taciuto sul secondo punto della questione, relativo al tessuto che dà origine a questa neoformazione e alla parte che vi prendono l'epiploon e il vecchio parenchima della milza, giacchè per maggior chiarezza preferiamo di trattare separatamente questa questione, appoggiandola di tutte quelle prove che stimeremo necessarie. Avvertiamo subito intanto come nel trattare quest'argomento noi limiteremo la nostra discussione agli elementi fissi, essenziali, caratteristici della neoformazione, giacchè quanto agli elementi mobili della polpa, globuli bianchi e globuli rossi che riempiono le maglie di essa, resta difficile, il più spesso impossibile, di apprezzarne la provenienza e si rende molto probabile che questi elementi, al pari dei vasi sanguigni, derivino tanto dal connettivo dell' epiploon che riempie la soluzione di continuo, quanto dal vecchio parenchima della milza. Riguardo agli elementi essenziali, fissi dei corpuscoli e della polpa, che vanno a riempire la perdita di sostanza, molti fatti da noi osservati ci fanno ritenere con certezza che essi derivino dal connettivo embrionale dello epiploon che riempie in primo tempo la perdita di sostanza. Tanto per la neoformazione di corpuscoli quanto per quella della polpa, avendo potuto osservare in alcuni casi la presenza di queste parti in via di sviluppo in mezzo al detto connettivo e separate completamente dal vecchio parenchima della milza (tav. I, fig. 5, fig. 14; tav. II, fig. 24, fig. 28, fig. 30), diverrebbe quasi inutile di discutere su questo punto se non vi fossimo spinti dal desiderio di vedere universalmente accettata questa proprietà dell'epiploon di poter produrre nella vita extrauterina le diverse parti della milza. Abbiamo in primo luogo che l'epiploon s'insinua sempre nelle ferite della milza, sia che vi penetri direttamente, sia che aderisca alle faccie di quest' organo in punti più o meno lontani dalla praticata lesione e mandi entro la soluzione di continuo una sottile membranella connettiva che finisce per riempire intieramente la perdita di sostanza. Nè si può pensare davvero che il fatto dell'aderenza dell'omento con le ferite della milza sia un puro fatto accidentale, derivante solamente dalla proprietà che esso possiede di contrarre aderenze con la massima parte delle ferite della cavità addominale, sia dei suoi organi sia delle sue pareti, poichè mentre nelle ferite della milza si trovano in questa sierosa dei fatti attivissimi di neoformazione, questi mancano invece nelle altre ferite, nelle quali il grand'omento mostrasi del tutto

inattivo, o serve solo da substrato nel quale si svolge e si allarga la neoformazione, che proviene evidentemente dagli elementi speciali dell'organo col quale la detta sierosa ha preso aderenza (rigenerazione parziale del fegato). Ed infatti in quei casi nei quali l'adesione dell'omento con la superficie della soluzione di continuo fu solo parziale, la neoformazione si fa solo in quelle parti della ferita nelle quali avvennero queste aderenze, mentre le rimanenti parti si presentano a contorno regolare, senza le solite sporgenze che si avanzano verso la linea mediana della soluzione di continuo, e rivestite negli stadî più avanzati della cicatrizzazione della ferita da un tessuto fibroso che è un prolungamento della capsula (tav. I, fig. 10 e 11). Nella stessa maniera, in quei casi nei quali, per un forte dislocamento dei bordi, l'omento si trova in contatto da un lato con la superficie cruenta e dall'altro con la capsula di una delle faccie della milza (tav. I, fig. 19), la neoformazione di parenchima splenico comincia egualmente e separatamente nei due bordi della ferita, benchè in uno di questi sia separata dalla vecchia polpa per mezzo della capsula (tav. I, fig. 19 *f*).

Il modo di procedere della neoformazione e la direzione di alcune sue parti nelle prime fasi del loro sviluppo, servono ancora come prova dell'enunciata asserzione. Esaminando infatti i preparati istologici che si riferiscono alla riproduzione parziale della milza, è facile di accorgersi, anche quando questa neoformazione non può sorprendersi nel suo inizio, come essa sia sempre a stadî meno avanzati dalla parte che guarda il connettivo il quale riempie la perdita di sostanza, e come passi poco a poco e per gradazioni quasi insensibili in questo tessuto. Quando poi si segua lo sviluppo della neoformazione sopra a sezioni trasverse alla praticata soluzione di continuo, riman facile di persuadersi in egual maniera, come le trabecole della polpa splenica abbiano nelle prime fasi della loro formazione, e prima che si siano ulteriormente perfezionate, la stessa direzione dei fasci delle fibre e delle cellule connettive del grand'omento, il quale ha preso aderenza ai bordi della ferita della milza. Per comprendere bene questo fatto, si supponga di esaminare delle serie continue di sezioni microscopiche trasversali alla praticata lesione della milza; si osserverà allora molto facilmente in quelle sezioni che corrispondono ai punti meno spessi della milza, che rimangono cioè molto vicine al bordo di quest'organo, che dalla linea di sezione, disegnata a un dipresso dal punto d'arresto della capsula (tav. II, fig. 29), sporge la neoformazione nell'interno della soluzione di continuo in forma di due segmenti di cerchio che si guardano col loro lato curvilinee, e che al disopra di essa si attacca il grand'omento, le fibre del quale tengono la stessa direzione arcuata delle trabecole più giovani che si osservano nella parte periferica di detta neoformazione. Fra queste parti insomma si distingue non solo un rapporto di vicinanza, ma ancora una vera e propria continuità, un passaggio graduale delle une nelle altre; perciò le ultime avanti di essere profondamente modificate da ulteriori processi, conservano delle prime lo stesso tipo, la stessa disposizione. Esaminando le sezioni che interessano parti di milza un poco più grosse delle prime, le sezioni cioè che si discostano maggiormente dal bordo di quest'organo, si hanno a un dipresso gli stessi fatti, con la differenza che in queste parti essendo due o tre i centri della neoformazione, non si ha più un semplice arco nell'andamento delle fibre dell'omento

e nella disposizione della polpa in via di sviluppo, ma si formano invece due o più segmenti di cerchio, che si uniscono per uno dei loro estremi nel punto nel quale corrisponde di solito una trabecola (tav. II, fig. 29 *c*) e sul quale va a prendere attacco il grand'omento. Così anche in questo caso, tanto l'epiploon con i suoi elementi, quanto il sistema trabecolare della polpa in formazione, costituiscono dei piccoli archi, gli uni accanto agli altri, ciascuno dei quali corrisponde a un centro della neoformazione. Anzi, per la differenza di grossezza e di elevazione di uno dei bordi della ferita, accade alcune volte, come nella fig. 29 riportata, che in uno dei bordi della soluzione di continuo si veda un solo centro di neoformazione, e che un solo arco rappresenti quindi l'andamento delle fibre e delle cellule dell'epiploon e delle trabecole della polpa in via di sviluppo, mentre nell' altro bordo siano due o più questi centri di neoformazione, e l'andamento delle parti sopracitate sia rappresentato da due o più piccoli archi.

Fra la prova della genesi della neoformazione, che ripara la perdita di sostanza, dal connettivo dello epiploon, possiamo annoverare ancora la presenza in questo parenchima neoformato di alcuni elementi che accennano indubbiamente alla sua derivazione, come alla presenza di cellule adipose o di peli. Accade infatti in alcuni casi di rapidissima neoformazione della polpa, che il processo di trasformazione del connettivo dell' omento sia così precipitoso, che non tutte le sue cellule adipose arrivino in tèmpo a liberarsi dal grasso, e che alcune di queste rimangano chiuse più o meno lungamente in mezzo alla neoformazione della polpa. La stessa cosa accade a un dipresso per i peli. — Infatti operando gli animali di splenotomia parziale, sia per l' estrazione di buona parte dello epiploon e per l' estrazione della milza che s' adagiano sulle pareti addominali, sia per l' applicazione della spugna nella soluzione di continuo per frenare l'emorragia, avviene molto spesso che si trapiantino dei frammenti di peli, i quali valgono benissimo per determinare l' estensione del parenchima neoformatosi e per attestare la sua derivazione. — Quando si mette in pratica il processo antisettico, nelle vicinanze di questi corpi estranei non si forma nessuna suppurazione, ma ha luogo attorno a loro lo sviluppo regolare della neoformazione della milza della quale questi corpi ci disegnano i confini, come se fossero tanti termini o tanti segnali. Quando ci accade di sezionare longitudinalmente qualcuno di questi peli, si può osservare alcune volte che solo una parte del pelo si trova entro un corpuscolo di Malpighi o circondata da polpa, mentre l'altra parte, dopo aver attraversata la polpa in vari stadî di sviluppo, giace ancora in mezzo al connettivo dell' omento; ed in questi casi è certo che il pelo è penetrato nella ferita per mezzo dell' epiploon e che successivamente fu circondato per buona parte della sua lunghezza dalla neoformazione (corpuscoli o polpa), che si produsse dal connettivo nel quale si trovava questo corpo estraneo.

Finalmente un' ultima prova che dimostra come tutte le parti della milza normale possano aver origine esclusivamente dal tessuto dell' epiploon, l' abbiamo nelle diverse forme di neoproduzione di parenchima splenico che si osservano tanto nella porzione dell' epiploon che si è fatta aderente a una delle faccie della milza quanto nella sua porzione libera, e che fra poco andremo a studiare particolarmente. In questi casi manca ogni e qualsiasi rapporto di continuità fra la neoformazione e

la milza primaria (tav. I, fig.13; tav. II, fig. 33), onde per ammettere la loro produzione da quest' organo anzi che dal grand' omento, non vi sarebbe altro che ricorrere a stranissime ipotesi, quale quella, ad esempio, di una migrazione degli elementi della milza e di una loro colonizzazione nel tessuto del grand' omento. Provato che il tessuto matrice della nuova produzione di milza che va a riparare le perdite di sostanza di quest' organo è per la massima parte il connettivo dell' epiploon, non ci resta egualmente facile di dimostrare che il vecchio parenchima della milza non prende nessuna parte in questa neoformazione. Le numerose osservazioni da noi praticate ci autorizzano ad ammettere, che la neoformazione che avviene nella soluzione di continuo è intieramente o quasi intieramente devoluta al connettivo dell' epiploon a quella fattosi aderente, e che il vecchio parenchima della polpa concorre alla cicatrizzazione delle ferite solo con una neoformazione parenchimatosa, la quale conduce semplicemente ad una tumefazione dei bordi e ad un loro avvicinamento; questa neoformazione parenchimatosa sarebbe data da un ingrossamento dei vecchi corpuscoli e da produzione di nuova polpa in seno alla vecchia.

Esaminato quello che avviene nelle perdite di sostanza cuneiformi della milza, vediamo adesso quello che avviene al di fuori di queste ferite, e tanto sulla superficie della milza stessa quanto sulle grandi duplicature del peritoneo. Questo accenneremo solo in modo generale, come abbiamo fatto per tutte le questioni trattate fino ad ora, poichè uno studio molto particolareggiato delle medesime verrà fatto nel seguente capitolo, nel quale riporteremo alcuni esperimenti che serviranno come tipo o come eccezione delle cose osservate.

I fatti che si osservano al di fuori della soluzione di continuo della milza sono in generale delle neoformazioni, delle quali, per comodo di studio, se ne posson distinguere varie specie, a seconda della loro sede ed estensione. Diciamo per comodo di studio e con divisione molto artificiale, poichè le varie forme il più spesso si trovano combinate fra loro nello stesso soggetto. In una prima forma, abbiamo che la neoformazione dello interno della ferita si continua lungo i vasi dell' epiploon a quella fattasi aderente con le apparenze di cordoni o d'infiltrazioni rosso-brune, o sotto forma d' infiltrazione di globuli bianchi di aspetto grigiastro. Queste neoformazioni, che sporgono per poche linee al difuori della ferita, sono perfettamente identiche per struttura a quelle avvenute nello interno di essa, solo che ordinariamente a grado meno avanzato di sviluppo. Si comprende poi molto facilmente come avvenga questo prolungamento della neoformazione dell'interno della ferita lungo i vasi dell' epiploon a questa fattosi aderente, quando si richiama alla mente quello che accade nella chiusura di questa soluzione di continuo. Abbiamo visto, infatti, che dal lato per il quale s' introduce l' epiploon nello interno della perdita di sostanza, solo molto tardi, e quasi come fatto ultimo, si ristabilisce la continuità della capsula, e che per molto tempo rimane una comunicazione diretta fra l' interno della ferita e l'epiploon che a questa si è fatto aderente, onde viene a mancare quella barriera che dovrebbe impedire alla neoformazione sviluppatasi entro la soluzione di continuo di non oltrepassare i confini normali.

In una seconda forma, le neoformazioni di parenchima splenico si sviluppano sulla superficie della milza, sia nel suo margine libero, sia nelle sue faccie, e tanto in

vicinanza dei margini della soluzione di continuo, quanto in punti da questa assai lontani; hanno una grossezza che varia da quella di un capo di spillo a quella di corpiccioli più grossi, del diametro di 4 millimetri; in alcuni casi presentano la forma di un segmento di sfera, in altri hanno una superficie libera irregolare, bernoccoluta, ed una forma di corpi allungati, ovalari; possiedono in generale tutti i caratteri delle milze neoformate. Al microscopio si trovano costituite da polpa in varî stadî di sviluppo, e alcune volte da corpuscoli di Malpighi. D' ordinario si formano dal peritoneo viscerale o dalla pellicola che in alcuni punti riveste la superficie della milza e che proviene da aderenze dell' epiploon con quest' organo; nelle prime fasi del loro sviluppo sono separate dal parenchima della milza primaria per mezzo della capsula, ma in ultimo finiscono per infiltrare e per distruggere alcune piccole porzioni di quella e per fondersi in parte con la polpa della vecchia milza (tav. II, fig. 22). Più di rado, questi piccoli noduli della superficie della milza hanno origine da neoformazione parenchimatosa circoscritta dal vecchio tessuto della milza, onde per un aumento di grossezza dei corpuscoli di Malpighi e per una iperplasia della polpa si formano delle sporgenze circoscritte che sollevano e assottigliano la capsula che le riveste (tav. II, fig. 23). Il più spesso queste neoformazioni si sviluppano successivamente alla praticata operazione; nei pochi casi nei quali avevamo osservato che i noduli preesistevano alla splenotomia, questi in seguito all'operazione aumentarono grandemente di volume. In una terza forma, la neoproduzione del parenchima splenico è costituito da piccoli nodettini che risiedono in quella porzione dell' epiploon che sta in vicinanza delle aderenze avvenute fra questa sierosa e la milza, e che sono completamente separati dalla neoformazione che si svolge nello interno della soluzione di continuo (tav. I, fig. 13; tav. II, fig. 33). Questi nodettini talora hanno la forma di una ricca infiltrazione di cellule rotonde attorno ai vasi e la figura di piccoli corpi sferici o fusati che, per l' aspetto microscopico, offrono perfetta somiglianza con i tubercoli della meningite basilare, talora presentano il diametro di un millimetro, il colore e tutti gli altri caratteri macroscopici delle milze neoformate. Al microscopio si presentano, i primi come ammassi di globuli bianchi al dintorno di un piccolo vaso, e molto simili a quelli da uno di noi (Tizzoni) descritti come corpuscoli di Malpighi in via di sviluppo, i secondi come ammassi di polpa in varie fasi di formazione, provvista in alcuni di questi noduli di un corpuscolo di Malpighi.

In una quarta forma finalmente, vogliamo comprendere tutte le modificazioni e le neoformazioni che avvengono nella porzione libera del grand' omento in seguito alle lesioni sperimentali della milza. All' infuori dei casi nei quali in seguito alle asportazioni cuneiformi della milza primaria si sviluppano piccole milze nella porzione libera del grande omento, accade quasi sempre di trovare nelle grandi duplicature del peritoneo degli animali operati di splenotomia, una grandissima quantità di corpuscoli bianco-grigiastri, che per la loro struttura si avvicinano molto al tessuto linfatico; questi possono derivare tanto da ingrossamento di quelli che nelle condizioni normali si trovano in queste parti, e che sono state descritte

in un recente lavoro del prof. Maffucci ([1]) come follicoli linfatici, quanto da nuova formazione. Studiamo prima la struttura di questi corpuscoli, per passare dopo alla vera neoformazione di milza. Se si esamina il grand' omento o l' epiploon gastro-splenico di un cane operato da un certo tempo di asportazioni cuneiformi multiple della milza, si trova che queste sierose sono disseminate di piccoli corpicciolі, ordinariamente di forma allungata, fusata, situati lungo il corso dei vasi sanguigni; questi corpiccioli sono molto più grossi e assai più numerosi di quelli che nelle condizioni normali si sogliono trovare in queste parti. Al microscopio si vede che il grasso che accompagna i vasi sanguigni di queste sierose è stato in molti punti più o meno completamente riassorbito od è in via di riassorbimento, e che al posto dei lobuli del grasso si trovano di questi corpiccioli. Questi poi ora sono isolati e disseminati qua e là lungo le trabecole della sierosa, ora sono gli uni di seguito agli altri sul corso di qualche vaso, il quale prende così l' aspetto di una corona di rosario; risiedono talora da un lato del tronco vascolare, talora lo comprendono invece nel loro interno (tav. II, fig. 21). Ad un esame a più forte ingrandimento, si vede che questi corpiccioli sono essenzialmente formati da cellule e da vasi; le cellule somigliano a un dipresso ai globuli bianchi del sangue; hanno un nucleo piuttosto grosso e scarso protoplasma al dintorno di questo (tav. II, fig. 21 b); fra queste cellule se ne vedono alcune a nucleo ovale e a forma non ben definibile, per il forte accumulo di cellule in mezzo al quale si trovano. La rete vascolare è molto ricca; è costituita principalmente da un intreccio molto serrato delle diramazioni della vena principale del corpuscolo, diramazioni che sono molto dilatate, in alcuni punti anche varicose, e che hanno tutti i caratteri dei vasi cavernosi (tav. II, fig. 21 *a*). L' arteria forma in questo corpuscolo una rete vascolare meno ricca e a rami molto più sottili di quelli della vena. Alla periferia di questo corpicciolo la rete vascolare termina in anse, dalle quali partono rami sottilissimi che vanno a terminare nelle trabecole più piccole dell' epiploon, e ad unirsi il più spesso ai prolungamenti protoplasmatici della rete cellulare di queste trabecole (tav. II, fig. 21 *c*). Intorno al modo di formazione di questi corpiccioli, è indubitato che essi si sostituiscono al tessuto adiposo che segue il corso dei vasi sanguigni, e ciò si desume facilmente dalle seguenti prove: 1° dal trovarsi questi corpiccioli lungo il corso dei vasi di discreto calibro, al dintorno dei quali in condizioni normali si osserva una ricca infiltrazione adiposa; 2° dal rinvenirsi molto spesso entro di questi, qualche cellula che non si è ancora liberata del grasso; 3° dal vedere che in alcuni punti tutto il grasso che accompagna un vaso sanguigno è sostituito da questa rete cavernosa, che contiene nelle sue maglie una grande quantità di globuli bianchi. Quanto alla significazione di questi corpiccioli non possiamo stabilire niente di preciso; diciamo solo che per la struttura somigliano a piccoli organi linfatici o linfatico-sanguigni, che si differenziano per la rete vascolare e per la costituzione degli elementi cellulari dai corpuscoli di Malpighi in via di sviluppo e che si avvicinano molto ai follicoli linfatici descritti recentemente dal Maffucci ([2]).

([1]) Maffucci, *Sull' assorbimento peritoneale*. Giornale internazionale delle scienze mediche, anno IV, fasc. 7-8, 1882.

([2]) Maffucci, loc. cit.

Oltre di questi corpiccioli abbiamo osservato in 4 casi di splenotomia parziale la produzione di veri noduli di milza nella porzione libera del grand'omento. Questi si trovavano lungo il corso dei vasi, raggiungevano una grossezza che oscillava fra quella di piccoli punti scuri, appena apprezzabili ad occhio nudo, a quella di corpiccioli del diametro di 1 o 2 millimetri, e avevano tutti i caratteri macroscopici delle milze neoformate.

Anche al microscopio si trovavano costituiti, come le milze riprodotte, da una capsula, da una certa quantità di polpa in varie fasi di sviluppo, e in alcuni noduli da un corpuscolo di Malpighi nel centro. Ordinariamente erano formati da un tessuto connettivo smagliato da sangue (1° stadio di formazione della polpa), e solo più di rado qualcuno di questi noduli conteneva nel centro un corpuscolo e aveva una polpa in stadî più avanzati di sviluppo e maggiormente perfezionata. In altre parole la struttura di queste piccole milze era di solito incompleta, onde, e per la loro costituzione, e per il loro modo di sviluppo, si accostavano più frequentemente alle piccole milze che si producono nelle grandi duplicature del peritoneo in seguito a malattia della milza primaria, anzi che ai noduli scuri che si sviluppano in quelle parti in seguito alla splenectomia. Tra questi nodettini rosso-scuri se ne trovavano di quelli piccolissimi, di un colore grigiastro, simili a tubercoli migliari, e aventi la struttura dei corpuscoli di Malpighi in via di formazione. Tanto nella polpa delle piccole milze riprodotte, quanto nel connettivo che stava al dintorno di queste, si vedevano globuli rossi nucleati e cellule con nucleo in gemmazione. In tutti e 4 i casi durante l'operazione era stato accuratamente osservato il grande omento estratto a bella posta dalla cavità addominale, e notato che in questa sierosa mancavano le neoproduzioni sopra descritte. In questi casi era quindi dimostrato all'evidenza, che i piccoli noduli del grande omento erano milze neoformate, e che queste neoproduzioni non erano produzioni accidentali sviluppatesi là quasi per capriccio della natura, ma che erano secondarie alla lesione della milza primaria, e quindi in rapporto genetico con questa lesione: veniva quindi confermata anche una volta di più la proprietà del grande omento e delle grandi duplicature del peritoneo in genere di dar luogo a delle neoproduzioni di parenchima splenico. In altre parole, in questi esperimenti eravamo arrivati a riprodurre artificialmente quello che uno di noi ebbe già ad osservare come conseguenza delle rotture spontanee della milza e della splenite indurante che alcune volte ne consegue, e a dimostrar giusta l'interpetrazione che venne data in questi casi alla presenza di noduli scuri nelle grandi duplicature del peritoneo. Non comprendiamo quindi come dopo aver visto, diremo così, nascere, crescere e diffondersi la neoformazione della milza nel grande omento, si possano ancora sollevare dei dubbî sull'attitudine di questa sierosa a servire da tessuto matrice per queste neoproduzioni, e come dopo aver visto il modo col quale cicatrizzano le ferite della milza, e il rapporto fra le lesioni naturali o sperimentali di quest'organo e la produzione di noduli splenici nella porzione libera del grande omento, si debba negare ancora che le alterazioni della milza siano la causa diretta di questa neoproduzione e seguitare a fare opposizione alla riproduzione totale della milza per la splenectomia. Se delle distruzioni parziali della milza naturali o sperimentali sono capaci di dar luogo a questa riproduzione, a più forte ragione ciò dev'essere possibile quando la funzione dell'intiero organo

viene abolita mediante la sua completa estirpazione. Al più, come per la splenectomia, così per l'asportazione parziale della milza, si potrà obiettare perchè non in tutti i casi ha luogo questa riproduzione; ciò che equivale, non a negare la possibilità di un fatto, ma a dichiarare che non si conoscono tutte le condizioni nelle quali questo fatto si effettua e che si dorranno meglio studiare in avvenire.

IV.

Studiato in generale il processo della neoformazione di parenchima splenico, in corrispondenza di soluzioni di continuo della milza e in punti da questa lontani, vogliamo adesso riferire il reperto di qualcuno dei più importanti esperimenti da noi praticati, perchè servano per esempio e come tipo delle cose dette, o come eccezione alla regola generale.

Esp. 1°. *Riparazione di una soluzione di continuo della milza per neoformazione di parenchima splenico; sviluppo di piccole milze in quella porzione del grand'omento che si trova in prossimità delle aderenze avvenute fra questa sierosa e quella ferita; modo di procedere di questa neoformazione.*

9 marzo 1882. — Ad un piccolo cane volpino, di 3 anni circa, si estrae la milza dall'addome con taglio laterale delle pareti addominali, e si asportano da quest'organo due pezzettini cuneiformi, uno in corrispondenza del suo bordo inferiore, e uno in corrispondenza della sua estremità anteriore; i pezzetti asportati avevano una lunghezza di 1 centimetro e mezzo, e una larghezza, misurata in corrispondenza della loro base, di un centimetro circa. Le superfici cruente che risultarono da queste asportazioni dettero poco sangue, onde si rimise subito la milza nella cavità addominale, dopo essersi accertati però che non esisteva nessuna neoproduzione di parenchima splenico, nè sulla superficie della milza, nè sul ligamento gastro-splenico, nè sul grand'omento. Di questa operazione l'animale non ebbe a risentirne molto; mostrò solo un leggero rossore erisipelotoso e un poco di suppurazione nella parte esterna della ferita addominale in seguito all'uso di una soluzione troppo forte di acido fenico.

24 aprile 1882. — Si riopera nuovamente quest'animale di splenotomia cuneiforme, facendo il taglio delle pareti addominali in corrispondenza della precedente cicatrice. Tirata fuori la milza, si trova che il grand'omento è penetrato nelle due soluzioni di continuo fatte in quest'organo con la prima operazione, e che ha contratto con i bordi di queste delle validissime aderenze; si nota di più, che poco al di là della lesione dell'estremo anteriore della milza (2 millimetri circa), si è formato un piccolo nodulo scuro, grosso quanto un capo di spillo, avente tutti i caratteri macroscopici delle milze riprodotte, e situato lungo il corso di un vaso sanguigno dell'epiploon che si continua nello interno della ferita; un poco più in basso finalmente, circa 1 o 2 millimetri al disotto della descritta neoproduzione, se ne trova un'altra assai più piccola della prima, appena visibile ad occhio nudo, situata pure sul corso dello stesso vaso sanguigno; anche questa seconda neoproduzione offre tutti i caratteri di una piccola milza riprodotta. Il rimanente del grande omento, benchè attentamente esaminato, non presenta altre di queste neoproduzioni. Appena constatati questi fatti, si fanno due nuove asportazioni cuneiformi nell'estremo auteriore della milza, di 2 centimetri di lunghezza e di 1 di larghezza,

nonchè una profonda ferita nel margine inferiore di quest'organo. Siccome le varie soluzioni di continuo anche questa volta danno poco sangue, così si rimette subito la milza nella cavità addominale. L' animale non ebbe a risentir molto anche di questa seconda operazione, ed il 27 aprile era già del tutto risanato e si era già riunita quasi completamente la ferita delle pareti addominali.

7 maggio. — Ucciso l'animale con la sezione del midollo oblungato, si trovò che il grande omento era penetrato direttamente nelle due più antiche soluzioni di continuo della milza, e che un sottile prolungamento o membranella connettiva, partita dai punti di adesione di detta sierosa con la faccia anteriore di quest' organo, era penetrata nelle altre tre soluzioni più recenti. La milza primaria era normale, se si eccettua in alcuni punti un poco d'inspessimento della capsula e dei grossi setti del suo parenchima. Il fatto più interessante di questo esperimento, e sul quale fermeremo maggiormente il nostro esame, si era quello che si riferisce alla neoformazione avvenuta al di fuori di una ferita. Si trovava infatti, che le due piccole milze notate durante la 2ª operazione in vicinanza di una delle lesioni della milza, erano aumentate di numero e di volume; se ne contavano fino a 6, a breve distanza le une dalle altre (1 a 4 millimetri circa), tutte situate lungo il corso di un vaso sanguigno dell'omento che penetrava nello interno della soluzione di continuo già quasi completamente cicatrizzata; aveano una forma presso che sferica, un colore rosso bruno le più grosse, rosso chiaro le più piccole. La loro grossezza si faceva sempre minore a misura che si procedeva dalla parte aderente verso la parte libera del grand'omento; dal diametro massimo di 1 millimetro o poco più, si andava gradatamente fino al diametro di un piccolo punto rossastro appena apprezzabile ad occhio nudo. Nella rimanente porzione del grande omento non si notava altro che un rapido riassorbimento del grasso, e la formazione di numerosissimi corpuscoli bianco-grigiastri simili ai follicoli linfatici di questa sierosa.

Fatte delle sezioni in serie, che comprendevano la soluzione di continuo della milza primaria e la prima delle piccole milzine sviluppatasi nel grand'omento al difuori della detta soluzione, si osservavano i seguenti fatti (tav. I, fig. 13). La milza primaria non conteneva globuli rossi nucleati e non mostrava di anormale che un poco d'ispessimento delle sue trabecole; la perdita di sostanza di quest'organo era già per buona parte riparata da neoformazione di corpuscoli e di polpa; solo rimaneva verso il bordo libero della milza una piccola porzione triangolare, costituita da un connettivo fibroso a vasi sanguigni molto dilatati e con parete sottile, e in alcuni punti con sangue libero nelle sue maglie; connettivo il quale era in continuazione diretta con quello del grand'omento (tav. I, fig. 13 *d*). In vicinanza della milza primaria si trovava nella porzione libera del grand'omento, lungo il corso di un vaso sanguigno, un piccolo nodulo sprovvisto di capsula e di corpuscolo e formato solamente di polpa; questa poi era in fasi molto avanzate di sviluppo nelle sue parti centrali, dove conteneva già un reticolo assai perfetto e dei vasi cavernosi, nei primi stadî di evoluzione invece nelle sue parti periferiche (tav. I, fig. 13 *g*). Cellule con nucleo in gemmazione erano in buon numero nella polpa di questa piccola milza, globuli rossi nucleati vi si trovavano in piccola quantità; erano però molto numerosi nelle maglie del connettivo dell' epiploon che stava al dintorno

di questo nodulo nel quale si trovavano pure liberi in mezzo a questo tessuto un buon numero di globuli rossi senza nucleo. Nell'omento che aveva aderito alla faccia anteriore della milza ai due lati della lesione praticata in quest'organo, si trovava una quantità di sangue infiltrato nel tessuto di questa sierosa, ed in alcuni punti si vedeva in mezzo a questo sangue il principio della formazione di polpa splenica (tav. I, fig. 13 *h*); in altre parole si aveva anche nel grande omento che aveva aderito alla milza primaria in vicinanza della soluzione di continuo, lo sviluppo di piccole neoformazioni spleniche, le quali erano completamente separate dal vecchio parenchima della milza per mezzo della capsula.

Questo esperimento serve a dimostrare, come le grosse perdite di sostanza della milza possano riparare in un tempo abbastanza breve per neoformazione di corpuscoli e di polpa, e come in seguito a queste lesioni si possano sviluppare nell'omento che sta al difuori della ferita, delle piccole milze, le quali, a misura che ci si allontana dall' epoca della praticata operazione, si fanno sempre più grosse, e si diffondono dalle parti aderenti dell'epiploon verso le parti libere di questa sierosa.

Esp. 2°. *Riparazione di asportazioni cuneiformi multiple della milza per neoproduzione di parenchima splenico; abbondante produzione nel grand' omento di piccole milze in seguito a questa operazione, e aumento di volume di una piccola neoformazione della superficie della milza primaria preesistente all'atto operatorio.*

30 aprile 1882. — Ad un cane barbone bastardo di media taglia si tira fuori la milza dalla cavità addominale con incisione lungo il margine esterno del retto addominale sinistro, e si nota che quest'organo è normale per volume e per colorito, e che verso l'estremità sua posteriore presenta sulla faccia anteriore una serie di nodettini sporgenti di color rosso bruno, uniti insieme da un tessuto connettivo. Nell'omento estratto dalla cavità addominale ed esaminato molto attentamente non si trova nessun nodulo di milza neoformata. Dalla milza primaria si asportano tre pezzettini a cuneo, di una lunghezza che oscilla fra 5 e 10 millimetri, e di una larghezza che oscilla fra 5 e 7 millimetri; una di queste asportazioni si fa in vicinanza della neoproduzione notata sulla superficie anteriore della milza, una seconda si fa verso il mezzo del margine inferiore di quest'organo, e la terza in corrispondenza del suo estremo anteriore. Si ripone la milza nella cavità addominale, non avendosi emorragia inquietante, e si pratica la sutura delle pareti addominali. L'animale risente poco di questa operazione e guarisce assai presto.

28 maggio 1882. — Si riapre la cavità addominale in prossimità della precedente cicatrice, si tira fuori di nuovo la milza e si fanno sopra di quest' organo altre due piccole asportazioni cuneiformi.

30 maggio 1882. — Si uccide l'animale con acido cianidrico. Alla sezione si nota che il grande omento aveva preso rapporto più o meno diretto con le 5 lesioni della milza, le quali si trovavano in diverse fasi del processo di riparazione. Ciò che di questa sezione richiede una particolare descrizione, è quanto si riferisce alla comparsa di noduli rosso-scuri nel grand'omento e alle modificazioni subìte per l'operazione dalla neoformazione impiantata sulla superficie della milza, nonchè all' influenza di questa neoformazione sulla cicatrizzazione della soluzione di continuo, cuneiforme, praticata nelle sue vicinanze. I nodettini del grand'omento erano per la massima parte di forma sferica e della grossezza di $^{1}/_{4}$ di millimetro circa, pochi

(4-5) avevano una forma ovale, appiattiti nel senso della loro superficie libera e d'impianto sull'omento, e misuravano nel diametro longitudinale massimo 1 millimetro a 1 millimetro e $^1/_2$, e nel diametro trasversale $^3/_4$ di millimetro; finalmente se ne trovavano due un poco più grossi degli altri, di forma sferica, e del diametro di millimetri 2 $^1/_2$. Alcuni offrivano una depressione nel mezzo della loro superficie libera, in modo da aver l'aspetto di due nodettini fusi insieme; ed infatti, fra le più piccole di queste milze, se ne trovavano due assai vicine, poste sul decorso dello stesso vasellino. Le lamine dell'omento offrivano varie aderenze tra loro e per ripiegature di una stessa lamina di questa sierosa; i nodi di milza neoformati corrispondevauo in maggior copia a queste aderenze. Dell' esame istologico, come dell'esame macroscopico, non riporteremo di questi esperimenti che quanto si riferisce alla neoproduzione del grand'omento e a quella della superficie della milza, nonchè quello che si riferisce all' influenza che quest' ultima ha esercitato sulla cicatrizzazione della ferita vicina. Il grande omento presentava fra i noduli rosso-bruni una discreta quantità di corpiccioli bianco-grigiastri, i quali erano costituiti da ammassi dei globuli bianchi al dintorno dei vasi; questi si trovavano in quelle parti nelle quali era avvenuto il riassorbimento del grasso. I noduli scuri più grossi avevano la struttura che uno di noi (Tizzoni) ha descritto nelle piccole milze sviluppatesi nel grande omento per alterazioni della milza primaria; avevano una capsula non molto distinta, e nell' interno della polpa splenica, ora allo stato di semplice infiltrazione sanguigna di uno stroma connettivo, ora in fasi di evoluzioni più avanzate, sotto forma cioè di un reticolo sottile, delicato, regolare, provvisto di vene cavernose. Solo pochi di questi noduli avevano uno sviluppo più regolare e contenevano nell' interno un corpuscolo di Malpighi; nelle serie complete di sezioni microscopiche fatte su 12 di questi piccoli noduli per mezzo del microtomo a slitta di Thoma, solo in uno si aveva nello interno della polpa un corpuscolo di Malpighi. Scarse erano le cellule giganti e i globuli rossi nucleati nell'interno di questi nodettini; questi ultimi erano invece piuttosto abbondanti nelle maglie del connettivo che stava al dintorno delle piccole milze, dove si trovava pure un discreto numero di globuli rossi senza nucleo liberi nelle maglie di questo tessuto.

La neoformazione preesistente sulla faccia anteriore della milza, verso la sua estremità posteriore, appariva all'autopsia non più come una serie di nodettini rosso-bruni, ma come una lamella più larga e più grossa, a superficie poco bernoccoluta, rivestita di una lamina d'epiploon che pure s'insinuava nella soluzione di continuo vicina. Praticando delle sezioni sopra questa neoformazione, si constatò che essa era in comunicazione col parenchima della milza (come nella fig. 22 della tav. II) per breve tratto della sua larga base, la quale, all'infuori di questo piccolo tratto (tav. II, fig. 25 *c*), era rivestita da una sottile capsula. Alla superficie libera della neoformazione non si aveva quasi più traccia di capsula, poichè questa era smagliata e completamente fusa coll' epiploon, nello spessore del quale si osservavano varî stadî di sviluppo della polpa splenica e discreto numero di corpuscoli malpighiani, dei quali era sprovvista la porzione centrale della neoformazione (tav. II, fig. 25 *c*). Nei bordi della soluzione di continuo posta vicino a questa neoformazione, si era destata una forte attività formativa per cui la detta soluzione era di molto ridotta (tav. II, fig. 25 *d*).

Esp. 3°. *Riparazione di asportazioni cuneiformi multiple della milza per neoformazione di parenchima splenico; neoformazioni di milza in vicinanza di esse asportazioni, sia continue con quelle dell' interno della ferita, sia in piani differenti; neoformazione di piccole milze nella porzione libera del grand'omento; piccolo nodulo alla superficie della milza primaria formato dal vecchio parenchima e rivesitto ancora della capsula splenica assottigliata.*

4 aprile 1882. — Col solito metodo si apre ad un cane grosso, bastardo, la cavità addominale, ed estratta la milza con buona parte dell'epiploon, si trova quella di volume alquanto superiore al normale e con una larga macchia biancastra, che pare dovuta ad ispessimento parziale della capsula, sulla sua faccia anteriore, verso la sua estremità posteriore. L'epiploon è normale. Si fanno 4 asportazioni cuneiformi, di cui tre larghe da 6 a 9 mill. e lunghe da 8 a 10 mill., mentre la 4ª, fatta all'estremità anteriore, misura 20 mill. in larghezza e 17 in lunghezza. L'animale non dimostrò aver sofferto in seguito all'operazione e la ferita guarì per prima intenzione. Il 26 aprile fu ucciso con acido cianidrico. All'autopsia si trovò che l'epiploon aveva contratto aderenza colle soluzioni di continuo, e in una larga ripiegatura di esso, la quale aderiva al bordo inferiore della milza in corrispondenza di una delle soluzioni, si notarono molti (14) noduletti rosso-bruni, grossi da 1 a 3 mill., di cui i più piccoli avevano forma sferica, i più grossi una forma ovoidale schiacciata su due faccie, le quali apparivano bernoccolute. Il più grosso di questi noduli appariva impiantato sulla superficie posteriore della milza ad 1 mill. dal bordo libero di questa e ad 1 cent. dal bordo di una delle soluzioni di continuo. Nella porzione libera del grande epiploon si osservarono moltissimi noduli da mezzo mill. a 3 mill. di diametro, i quali offrivano gli stessi caratteri macro e microscopici di quelli descritti nel caso precedente. Due noduli rosso-bruni si osservavano nella spessezza dell'epiploon che aderiva alla faccia posteriore del bordo di una delle soluzioni di continuo, ed altri più piccoli nella porzione di epiploon sporgente da questa soluzione. Sulla faccia anteriore della milza, lontano dalla soluzione di continuo, si osservava una rilevatezza emisferica a superficie libera liscia, che aveva un diametro massimo di 4 mill., uno minore di 3, e l' altezza di 1 mill. Studiando con serie di sezioni i varî noduli sviluppatisi nell'epiploon aderente alla milza, si trovava che alcuni di questi erano costituiti soltanto da polpa splenica nelle sue diverse fasi di sviluppo, altri contenevano un bel corpuscolo malpighiano circondato da polpa splenica in via di formazione. La fig. 33 della tav. II, rappresenta appunto la porzione di epiploon aderente alla milza, nella quale si sono sviluppati varî nodi (*d*) costituiti da polpa splenica, ed uno (*e*) contenente un corpuscolo malpighiano. L'epiploon, nella parte corrispondente alla milza e all'intorno dei noduli, non era più adiposo ed era fortemente infiltrato di cellule rotonde. In corrispondenza delle aderenze, la capsula della milza appariva per un tratto ingrossata, infiltrata di sangue e quasi fusa coll'epiploon; era quindi assai probabile che la neoformazione sviluppatasi nell'epiploon si sarebbe più tardi, raggiunto un maggiore sviluppo, fusa col parenchima preesistente della milza. Per la struttura dei noduli della porzione libera del grand'epiploon, avemmo un reperto eguale a quello dell'esperienza precedente, per il che non ne diamo una descrizione particolare. Dobbiamo invece fermare la nostra attenzione sulla neoformazione

prodottasi sulla faccia anteriore della milza lontano dalla soluzione di continuo. Coll'esame microscopico fatto sulla serie di sezioni, si è constatato che la capsula era assottigliata nei precisi limiti della neoformazione ed era infiltrata di cellule rotonde, ma che fuori di questi limiti si continuava con la capsula normale della milza. Il parenchima corrispondente a questa neoformazione (fig. 23, tav. II), trovavasi in diretta ed uniforme continuità con quello sottostante ed ai lati di essa, ed offriva corpuscoli malpighiani molto ingrossati per un maggior numero di strati concentrici disposti attorno ad essi; la polpa interposta a questi presentava un maggior numero di nuclei e di globuli rossi nucleati, nonchè scarse e sottili trabecole. Questa neoproduzione ha per noi un grande interesse, come quella che dimostra la possibilità d'una neoformazione parenchimatosa; ed infatti la sua continuità col parenchima vecchio, l'aumento in grossezza dei corpuscoli malpighiani, la ricchezza in nuclei della polpa splenica e la scarsa quantità di trabecole, che ordinariamente assai grosse partono dalla capsula e si diramano nel parenchima, infine il semplice sollevamento ed assottigliamento della capsula, la quale, oltre i limiti della neoformazione, si continuava direttamente colla normale, ne sono una prova evidente. Questa esperienza è pure importante per la grande quantità di noduli di milza sviluppatisi nel grand'epiploon, ciò che sta in relazione colle grandi e numerose asportazioni praticate sulla milza primaria. Il processo di riproduzione in tutte le soluzioni di continuo fu in questo caso assai rapido, per la qual cosa può considerarsi questa esperienza come tipo di quei casi in cui e nella milza e nell'epiploon si destò in seguito a parziali asportazioni una eccezionale attività formativa.

Esp. 4°. *Riparazione di asportazioni cuneiformi multiple della milza per neoformazione di parenchima splenico; neoformazione di parenchima splenico dal peritoneo di rivestimento della milza.*

Operato un cane con 5 asportazioni della milza il 22 maggio 1882, fu ucciso il 9 giugno dello stesso anno. Limitandoci a riportare quanto riguarda una neoforma zione sviluppatasi sulla milza, noteremo che all'autopsia si osservò sulla faccia anteriore di quest'organo, a 3 centimetri dalla estremità sua posteriore, una neoformazione d'aspetto lamellare, lunga 7 millimetri, larga $4^1/_2$ a 5 millimetri e alta 1 millimetro. Essa aveva a fresco un colore rosso-bruno violaceo. Collo esame microscopico si constatò che questa neoproduzione era formata da un corpo allungato, costituito da uno stroma connettivo nel quale si avevano pochissimi corpuscoli di Malpighi ed una polpa in varie fasi di sviluppo (tav. II, fig. 22); a forte ingrandimento si vedeva in questa polpa un discreto numero di cellule con nucleo in gemmazione e pochissimi globuli rossi nucleati. I rapporti di continuità con la milza primaria non erano molto estesi, poichè in molti punti essa pigliava attacco alla capsula splenica per sottili peduncoli e per la massima parte la piccola milza in via di sviluppo e la milza primaria erano separate l'una dall'altra per mezzo della capsula; solo in un punto molto limitato la neoformazione aveva infiltrato, smagliato la capsula e si era messa in comunicazione con la vecchia polpa (tav. II, fig. 22 *e*). Le superfici della neoformazione, tanto l' esterna quanto quella verso la capsula della milza primaria, nonchè i peduncoli con i quali essa neoformazione si attaccava, erano rivestiti da uno strato di cellule endoteliali. Relativamente al modo di sviluppo

di questa piccola milza, si osservava nei tagli che interessavano la periferia o la parte meno avanzata di questa neoformazione, che dal peritoneo di rivestimento della milza primaria si elevava una neoformazione connettiva in forma di piccoli bottoni, i quali si accrescevano maggiormente da un lato e andavano a fondersi con neoformazioni simili delle parti vicine, o a saldarsi a un punto della superficie della capsula un poco distante da quello dal quale avevano avuto origine.

Questa osservazione ha per noi una grande importanza, perchè dimostra come il peritoneo di rivestimento della milza, analogamente a quello da uno di noi osservato per il peritoneo di rivestimento dello stomaco ([1]), ha la proprietà di proliferare e di dar luogo ad una neoformazione connettiva dalla quale si sviluppano corpuscoli di Malpighi e polpa, indipendentemente dal concorso del vecchio parenchima della milza dal quale fino a fasi molto avanzate di sviluppo rimane separato per mezzo della capsula.

Per questo non possiamo escludere assolutamente, benchè non ne abbiamo ancora le prove dirette, che nei casi nei quali l'epiploon non contrasse nessuna aderenza con la milza, il tessuto connettivo che va a riempire alcune soluzioni di continuo di quest'organo e che serve di matrice alla neoformazione di corpuscoli e di polpa, non possa provenire dal peritoneo viscerale che riveste la milza primaria.

Esp. 5°. *Riparazione di asportazioni cuneiformi multiple della milza per neoformazione rapida di parenchima splenico; inclusione di tessuto adiposo dell'epiploon nel mezzo di questa neoformazione.*

11 aprile 1882. — Ad un piccolo cane di mantello bianco e nero, al quale 26 giorni innanzi era stata fatta una grossa asportazione cuneiforme nell'estremità anteriore della milza, si riapre la cavità addominale e si fanno in corrispondenza del bordo inferiore di quell'organo due nuove asportazioni. Si rimette la milza nella cavità addominale e si pratica la sutura delle pareti di questa cavità. La ferita dell'addome guarisce assai prontamente e l'animale si rimette assai presto anche di questa seconda operazione.

23 giugno 1882. — Si uccide l'animale con acido cianidrico e si trova che delle due soluzioni di continuo praticate in questa seconda operazione, una è ridotta ad una sottilissima striscia bianchiccia leggermente depressa sulle due faccie della milza e in corrispondenza del margine libero di quest'organo mentre l'altra è poco ristretta e raccorciata ed è riempita intimamente da epiploon adiposo, e che ambedue le faccie della milza nella metà inferiore di essa sono ricoperte di una pellicola, la quale pare si continui posteriormente con una ripiegatura dell' epiploon gastro-splenico che si eleva dall'ilo. Nel primo caso, che è quello che c'interessa principalmente per le particolarità che presenta, e del quale intendiamo di dar qui una descrizione speciale, troviamo che una rapida neoformazione di corpuscoli e di polpa ha chiuso quasi completamente questa soluzione di continuo, e che in mezzo a questa neoformazione, e in corrispondenza delle parti profonde dell' antica soluzione di continuo, è rimasta rinchiusa una zona di tessuto adiposo dell'epiploon (tav. I, fig. 9 *d*); questo poi si continua infuori con un sottile cordone di connettivo che nelle parti

([1]) Tizzoni, lav. cit. Rend. dell'Accad. delle scienze dell'Istituto di Bologna, 1882. Atti della r. Accad dei Lincei ser. 3ª, vol. XV.

più esterne della sezione termina con un piccolo triangolo, nella periferia del quale si possono notare le prime fasi di formazione della polpa (tav. I, fig. 9 c). Un altro fatto importante che si può rilevare da questa osservazione si è, che la sottile pellicola che riveste le faccie e il bordo libero della milza, e che si continua con quel po' di connettivo che rimane ancora nello interno della soluzione di continuo, in alcune parti della superficie della milza è completamente separata e distinta dalla capsula splenica, e che nei punti nei quali questa separazione è evidente, si può facilmente dimostrare che essa è rivestita da uno strato di cellule endoteliali (tav. I, fig. 9 *e*). Questo fatto ha perciò moltissima importanza, non solo in quanto ci rappresenta un caso di rapida neoformazione di polpa e di corpuscoli, e ci mostra l'inclusione di una zona di tessuto adiposo nell'interno della neoformazione di parenchima splenico, ma anche perchè in questo è chiaramente dimostrato che un sottile prolungamento dell'epiploon, in forma di una piccola membranella o pellicola, può scorrere sulla faccia della milza, penetrare nell'interno delle soluzioni di continuo praticate in quest'organo, e provvedere alla loro riparazione. Di questa membranella poi mentre è facile comprenderne la genesi e l'ufficio che compie nella cicatrizzazione delle ferite della milza quando, come nel caso presente, si mostra in alcuni punti completamente separata dalla capsula e rivestita di uno strato endoteliale, ciò non rimane possibile invece quando si è fusa intieramente con gli strati esterni di essa capsula. Insistiamo sopra di questo, giacchè ciò può spiegare come si possa avere la guarigione delle ferite della milza e la neoformazione in loco di parenchima splenico in quei casi nei quali si potrebbe credere a prima vista che il processo di riparazione fosse del tutto indipendente dalla influenza dell'epiploon.

Esp. 6°. — *Riunione incompleta di soluzioni di continuo della milza per incompleta penetrazione del grand'omento nell'interno di queste soluzioni.*

31 marzo 1882. — Con incisione laterale delle pareti addominali si tira fuori la milza ad un piccolo e giovane cane pomere e se ne asportano due pezzettini cuneiformi, uno in corrispondenza del bordo inferiore di quest'organo, e uno sulla sua estremità anteriore. La milza operata è del tutto normale, l'epiploon non presenta nessuna neoformazione di tessuto splenico. Rimessa la milza nella cavità addominale senza preoccuparsi di quel poco di sangue che sgorga dalle due superfici cruente, si fa la satura delle pareti addominali e la medicatura. Questa operazione non ebbe nessuna conseguenza grave e l'animale guarì senza presentare complicazioni di sorta.

22 aprile 1882. — Si riapre la cavità addominale in prossimità della cicatrice ottenuta con la precedente operazione, e si fanno tre nuove asportazioni cuneiformi della milza, tutte in vicinanza del suo estremo anteriore. Anche di questa seconda operazione l'animale guarisce prestissimo e senza complicazioni di sorta.

30 aprile 1882. — Si uccide l'animale. Alla sezione si trovava il grande omento disteso sulla matassa intestinale e arrossato per fina vascolarizzazione; si vedeva di più che il grasso di questa sierosa era già stato per buona parte riassorbito e che sul corso dei vasi si erano formate delle piccole macchie bruno-giallognole le quali rappresentavano tante piccole neoformazioni di milza nei primi stadî del loro sviluppo. L'omento, che aveva contratto larghe aderenze con le due faccie della milza, si metteva in

rapporto con le 5 soluzioni di continuo praticate in quest'organo, in alcune delle quali penetrava direttamente, mentre mandava nello interno di altre solo un prolungamento di tessuto connettivo. Di queste 5 ferite, quella praticata nel bordo inferiore della milza da 30 giorni presentava alcune particolarità che la rendono meritevole di una descrizione speciale. Già all'esame macroscopico si osservava che il grande omento penetrato direttamente in questa soluzione di continuo dalla faccia anteriore della milza, non lo riempiva completamente, ma ne occupava solo la metà anteriore, mentre nell'altra metà i bordi di questa soluzione si presentavano ancora molto allontanati fra di loro e ricoperti da uno strato connettivo che sembrava essere una continuazione della capsula. Ne veniva da ciò, che quando si guardava la ferita dalla faccia anteriore della milza, questa si mostrava riunita dal grande omento penetrato nel suo interno, e infiltrato ancora per buona parte di grasso, mentre quando si guardava questa lesione dalla faccia posteriore della milza si vedeva in corrispondenza della ferita un grande solco, con i bordi lisci, ricoperti di un connettivo fibroso, e con il fondo rappresentato dal grande omento penetrato dall'altra faccia della milza. Studiate le serie complete di sezioni microscopiche longitudinali, procedendo dalla faccia anteriore verso la posteriore della milza, si trovava; delle sezioni nelle quali la soluzione di continuo era intieramente ripiena del grand'omento, il quale nella sua zona periferica, in cui il grasso era stato riassorbito, presentava neoformazione di corpuscoli e di polpa (tav. I, fig. 3); delle sezioni nelle quali il grande omento aderiva solo in uno od in più punti limitati dei bordi della soluzione di continuo, mentre nella rimanente parte questi bordi erano ricoperti da un sottile strato di connettivo compatto che si continuava con la capsula (tav. I, fig. 11); finalmente delle sezioni nelle quali i bordi della ferita erano in tutta la loro estensione ricoperti da un sottile strato di tessuto connettivo in continuazione con la capsula, e fra i quali rimaneva uno spazio triangolare completamente vuoto, non avendo l'omento contratto con essi nessun aderenza (tav. I, fig. 18).

Era quindi evidente che nel caso in esame il grande omento non riempiva intieramente la soluzione di continuo, e che nelle parti nelle quali questa sierosa non era arrivata, i margini della ferita erano ricoperti da un sottile strato di connettivo compatto che si continuava con la capsula, e non mostravano nessun segno che accennasse a neoformazione di parenchima splenico.

Questi stessi fatti si poterono confermare con molta chiarezza anche in un altro caso nel quale l'asportazione del piccolo cuneo di milza era stata praticata da 40 giorni. In questo si osservava che il grande omento aveva contratto aderenza con il bordo inferiore della milza, in prossimità della praticata soluzione di continuo, e che da questo punto partiva, probabilmente, una sottile membranella connettiva che andava ad attaccarsi per tutta la lunghezza di uno dei margini di questa soluzione, mentre l'altro si era rivestito di un sottile strato di fitto connettivo, proveniente da un prolungamento della capsula. E da questa disposizione di cose ne veniva che la neoformazione di parenchima splenico aveva luogo solamente sopra uno dei bordi della soluzione di continuo, onde questo si era avvicinato moltissimo all'altro, il quale non dava per sua parte nessun segno di attività, e conservava la stessa direzione divergente dalle parti profonde verso il margine libero della milza

che doveva avere quando fu praticata la lesione (tav. I, fig. 10). Ne avveniva ancora, che in questo caso i bordi della soluzione di continuo non essendo stati legati insieme dall'omento, invece di aversi una riparazione completa della perdita di sostanza, nel posto di questa era rimasta una sottile fenditura. Questi due casi confermano pienamente quanto è stato da noi ammesso della influenza del grande omento sulla neoformazione di corpuscoli e di polpa che va a compensare le soluzioni di continuo della milza. Per quali ragioni poi in questi esperimenti l'epiploon non abbia riempito con il prodotto della sua attiva proliferazione l'intera perdita di sostanza, questo fino ad ora non ci fu dato di conoscere.

Esp. 7°. *Dislocamento dei bordi della soluzione di continuo, riunione angolare; neoformazione di milza nello interno della soluzione di continuo completamente separata dalla vecchia polpa per mezzo della capsula; distruzione secondaria di quella parte del bordo della ferita che fa sporgenza sulla superficie della milza.*

31 maggio 1882. — Con un' incisione laterale delle pareti addominali si opera di splenotomia cuneiforme un piccolo cane volpino bastardo, giovane, di media taglia: si portano via quattro grossi cunei di milza, due sul bordo inferiore di quest'organo, e due nella sua estremità anteriore. Si rimette subito la milza nella cavità peritoneale, poichè dalle quattro superficie cruenti esce solo poco sangue, e si fa la sutura delle pareti addominali. L'operazione non ebbe conseguenza di sorta, ed in tre o quattro giorni l'animale in esperimento era già completamente guarito.

16 giugno 1882. — Ucciso l'animale, si nota alla sezione che l'omento si è fatto aderente a molti punti della faccia anteriore della milza, e che da questi parte una sottile pellicola che entra nello interno di tre soluzioni di continuo, le quali si trovano già in fasi molto avanzate di riparazione, mentre nella quarta (che è quella nella quale ha avuto luogo il dislocamento dei bordi) l'omento penetra direttamente nell'interno della ferita prendendo valida aderenza coi suoi margini. In due delle soluzioni di continuo prima rammentate, si ha una formazione eccedente di polpa, la quale fa rilievo sulle due faccie della milza come cordone rosso-scuro bernoccoluto; nell'ultima si ha una riunione ad angolo dei margini della ferita, e quindi la sporgenza di uno dei suoi bordi sulla faccia anteriore della milza. Di questa specialmente vogliamo tener parola, per esaminare come avviene la cicatrizzazione della soluzione di continuo quando le due superfici cruente non si trovano l'una di contro all'altra, e per vedere ciò che accade di quella porzione del bordo della ferita che fa sporgenza sulla superficie della milza.

Anche dall'esame macroscopico del pezzo in discorso, si vedeva facilmente che l'omento era entrato nella soluzione di continuo dalla faccia anteriore della milza, e che passando sopra quel bordo della perdita di sostanza che aveva conservato la sua normale posizione e prendendo adesione tanto a questo quanto alla capsula del bordo che gli stava di contro, riesciva per la faccia posteriore di quest' organo, sulla quale prendeva validissime aderenze; quella porzione del margine di questa ferita che era poi piegata all'infuori e che faceva sporgenza sulla superficie della milza, si era intieramente rivestita da tessuto fibroso e non aveva contratto nessuna aderenza coll'epiploon.

Facendo delle serie a mano di sezioni microscopiche trasverse, si trovava che la superficie cruenta piegata all'infuori non si era fatta aderente all'epiploon, e che era chiusa da un prolungamento fibroso della capsula (tav. I, fig. 19 *i*); e si notava di più che il grande omento penetrato nell'interno della soluzione (tav. I, fig. 19 *d*, *e*) legava insieme la capsula, che corrispondeva alla faccia posteriore del bordo piegato all'infuori (tav. I, fig. 19 *k*), con la superficie cruenta dell'altro. Esaminando le preparazioni microscopiche successive, si notava che nell'omento penetrato nella soluzione di continuo aveva luogo un'attiva produzione di corpuscoli e di polpa, e che questa neoproduzione si faceva, tanto dal lato nel quale l'omento era in rapporto con il vecchio parenchima della milza (tav. I, fig. 19 *g*), quanto dal lato nel quale questo aveva aderito alle pieghettature della capsula che corrispondeva alla faccia posteriore del bordo piegato ad angolo (tav. I, fig. 19 *f*).

Quest'ultima neoformazione era perciò assolutamente indipendente da quella che si era fatta sul margine opposto della soluzione di continuo, dalla quale era completamente separata; ed era altresì indipendente dal vecchio parenchima della milza dal quale era divisa per mezzo della capsula; era quindi un prodotto dell'attività del grande omento. Da ciò appunto viene l'importanza di questo caso, poichè in esso abbiamo la dimostrazione più chiara che la neoformazione che si produce nello interno della soluzione di continuo, come quella che in alcuni casi avviene nella porzione libera del grand'omento, ha origine dal connettivo di questa sierosa, e indipendentemente da ogni e qualsiasi contributo per parte del vecchio parenchima della milza. Questo, come abbiamo già veduto, concorrerebbe solo a ristringere la perdita di sostanza con un ingrossamento dei corpuscoli e con un'attiva proliferazione della polpa, ma non prenderebbe parte alla formazione del parenchima splenico che va a compensare la stessa perdita di sostanza.

Un altro punto molto importante di questa osservazione si riferiva alla sorte di quella parte di parenchima splenico che faceva sporgenza sulla superficie della milza. Si osservava, infatti, che tanto la polpa quanto i corpuscoli di Malpighi del bordo piegato all'infuori si erano trasformati in un tessuto fibroso molto compatto, in mezzo al quale si notavano qua e là dei focolai di globuli rossi, liberi o racchiusi entro globuli bianchi, di un colore più carico di quelli normali, ed in via di distruzione o di trasformazione in un pigmento granulare bruno (tav. I, fig. 19 *h*, *c*). Perciò, nello estremo del bordo piegato all'infuori sul quale non si era fatto aderente l'epiploon, mancava ogni e qualsiasi traccia di neoformazione non solo, ma tutta la porzione di quel bordo che restava fuori del piano di riparazione si mostrava completamente inattiva nel processo di neoformazione di parenchima splenico, anzi si atrofizzava, si distruggeva per trasformazione fibrosa.

Esaminando le sezioni microscopiche che corrispondevano alle parti più profonde della soluzione di continuo, si trovava che la continuità dei bordi di questa soluzione si ristabiliva, finalmente, per l'usura della capsula, che da un lato divideva il vecchio tessuto della milza dalla neoformazione di parenchima splenico avvenuta entro la ferita per opera del grande omento, in modo che questa neoformazione finiva coll'invadere il parenchima della milza trasformato in connettivo compatto, dal quale era precedentemente divisa per mezzo della detta capsula.

Visto come si effettua la guarigione delle soluzioni di continuo della milza nei casi in cui avviene il dislocamento dei bordi, e qual parte prenda l' epiploon in questa cicatrizzazione; visto come da quella porzione del bordo che fa sporgenza sopra una delle faccie della milza non si ottenga nessuna neoformazione di corpuscoli e di polpa, quando all'estremo di questo non aderisce l'epiploon, e come invece esso si atrofizzi e si distrugga per trasformazione fibrosa, vogliamo subito aggiungere, però, come non sempre le cose si passino a questo modo, e come cambino un pochettino i fatti descritti col variare di alcune condizioni nelle superfici di sezione e nei rapporti di queste col grand'omento. Così in un caso operato di asportazione cuneiforme della milza da giorni 16, nel quale era avvenuta questa dislocazione dei bordi della soluzione di continuo, ma nel quale però si era avuta oltre alla penetrazione dell' epiploon nell' interno della perdita di sostanza, ancora l'aderenza di questa sierosa alla superficie cruenta del bordo piegato all'infuori, si poteva osservare un' attivissima neoformazione di parenchima splenico tanto nell'estremo del bordo rimasto in posto quanto in quello piegato, neoformazione che in ambedue le parti presentava nelle prime fasi del suo sviluppo un sistema trabecolare, con trabecole aventi la stessa direzione delle fibre e delle cellule del grand'omento.

Esp. 8°. *Arresto della neoformazione di parenchima splenico nella riparazione di soluzioni di continuo della milza.*

13 aprile 1882. — Ad un piccolo cane giovane, al quale 26 giorni innanzi erano state fatte due asportazioni cuneiformi della milza, si fanno tre nuove asportazioni, una delle quali comprende una delle ferite precedentemente praticate. Di questa, come della precedente operazione, l'animale guarisce prestissimo.

12 giugno 1882. — Si riapre il cavo addominale e si fanno tre nuove asportazioni.

13 giugno 1882. — Si uccide l'animale con acido cianidrico. All'autopsia si trova la milza ingrossata di un terzo circa del suo volume, giudicando il fatto così ad occhio; l'omento non contiene nessun nodulo scuro.

Delle sette soluzioni di continuo praticate, quella che interessa in modo particolare in questo esperimento, è ricoperta nelle sue due faccie e nel margine libero della milza da spesse ripiegature dell'epiploon.

Nell'osservazione istologica di questa soluzione di continuo, si trova che questa si è ristretta e accorciata di poco, e che è quasi intieramente ripiena di epiploon adiposo (tav. I, fig. 8). Quali fossero le ragioni per le quali in questa soluzione di continuo la neoformazione di parenchima splenico si era arrestata, mentre in altre ferite dello stesso organo questa neoformazione aveva progredito molto rapidamente, ciò non ci fu dato di conoscere.

Questo caso vale intanto a dimostrare, che nelle asportazioni parziali come nelle asportazioni totali della milza, vi sono delle condizioni che impediscono la neoproduzione di parenchima splenico, nelle prime anche quando non manchi la penetrazione dell'epiploon nell' interno della soluzione di continuo.

V.

CONCLUSIONI

Dalle cose fin qui esposte si possono trarre le seguenti conclusioni:

1° In seguito ad asportazioni parziali, cuneiformi della milza, ha sempre luogo una neoformazione di parenchima splenico che porta al compenso della soluzione di continuo.

2° Questa neoformazione compensatrice si fa generalmente in modo lento, e può anche in qualche soluzione di continuo, dopo aver alquanto progredito, arrestarsi, mentre in altre soluzioni praticate sulla stessa milza si trova molto avanzata. In altri casi invece la neoformazione si fa in modo rapido.

3° Il vecchio parenchima splenico dei bordi della soluzione di continuo contribuisce solo indirettamente alla cicatrizzazione per una neoformazione parenchimatosa, rappresentata dall' ingrossamento dei corpuscoli malpighiani e da produzione di nuova polpa, per la quale neoformazione si ha la tumefazione dei bordi e quindi un loro moderato avvicinamento; mentre la neoformazione di parenchima splenico che veramente compensa la soluzione si fa soltanto da un tessuto connettivo embrionale, che deriva, o dalla diretta trasformazione dell'epiploon insinuato nella ferita, o dalla proliferazione dell'epiploon stesso, il quale aderendo alla superficie della milza invia nella soluzione una propaggine di tessuto connettivo embrionale che poco a poco crescendo la riempie. Perciò questa neoformazione di parenchima splenico si fa sempre a spese dell'epiploon e quindi *secondo il modo dello sviluppo embrionale.*

4° La neoformazione compensatrice si fa talora con lo sviluppo primitivo di corpuscoli malpighiani, talora con quello di polpa splenica; e gli uni e l'altra, a principio del loro sviluppo nel connettivo embrionale, si trovano completamente separati dal vecchio parenchima dei bordi della soluzione di continuo, e soltanto successivamente si fondono con esso.

5° In alcuni casi, dopo asportazioni parziali, si desta nella milza, ed anche nell'epiploon, una eccezionale attività formativa, la quale si manifesta, non solo con la rapida neoformazione di parenchima splenico che compensa le soluzioni di continuo, ma anche con la produzione di noduli sulla milza e nell'epiploon. Alcuni di questi nodi sono interamente somiglianti alle milze riprodotte in seguito ad asportazioni totali della milza; altri, risultando formati da sola polpa splenica, somigliano ai nodi che si sviluppano in seguito a splenite indurante.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola I.

Fig. I. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da 22 giorni. Rapporti dell'epiploon con la soluzione di continuo; sezione longitudinale; à*, vecchio parenchima della milza; *b*, perdita di sostanza; *c*, epiploon che si è fatto aderente ai bordi della ferita e che presenta un riassorbimento rapido del grasso per infiltrazione e accumulo di globuli bianchi; *d*, piccola piega dell' epiploon che fa sporgenza nell' interno della perdita di sostanza e che mostrasi ancora ricca di adipe; *e*, porzione di epiploon nella quale il grasso è stato completamente riassorbito e nella quale si osserva lo sviluppo incipiente di corpuscoli e di polpa. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 2. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 6 *giorni. Rapporti fra l'epiploon, il coagulo e i bordi della soluzione di continuo*; *sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, coagulo raccolto nel fondo della soluzione di continuo; *c*, un bordo della ferita rivestito di uno strato fibroso; *d*, l'altro bordo della ferita di forma del tutto regolare; *e*, porzione di epiploon ancora ricca di adipe; *f*, porzione di epiploon che per il riassorbimento del grasso si è trasformata in un connettivo embrionale ricco di elementi cellulari e che ha preso aderenza al coagulo e ad una piccola porzione dei bordi di questa soluzione di continuo; *g*, strato di fibrina che divide il coagulo dal vecchio parenchima della milza. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 3. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 30 *giorni. Prime modificazioni istologiche dell'epiploon; lenta neoformazione di parenchima splenico*; *sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, piccola zona di polpa nelle prime fasi del suo sviluppo; *c*, porzione di epiploon penetrato nell' interno della ferita ancora ricco di adipe; *d*, piccola zona periferica di quest' epiploon trasformata in connettivo embrionale per riassorbimento del grasso; *e*, grosso fascio di connettivo, derivante da trasformazione dell' epiploon, che chiude la soluzione di continuo in corrispondenza del bordo della milza. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 4. *Asportazione cuneiforme della milza che pratica da* 8 *giorni. Riassorbimento del coagulo; neoformazione connettiva dell'epiploon penetrata nell'interno del coagulo*; *sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, porzione di epiploon ancora ricco di adipe; *c*, porzione più periferica di questa sierosa trasformata in connettivo embrionale per riassorbimento del grasso; *d*, sottile pellicola di connettivo proveniente dall'epiploon e penetrata fra il coagulo e i bordi della soluzione di continuo; *e*, neoformazione connettiva dell'epiploon penetrata nell' interno del coagulo. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 5. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 29 *giorni. Neoformazione di corpuscoli e di polpa nell' interno della soluzione di continuo; sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, corpuscoli di Malpighi che si sono sviluppati nell'epiploon penetrato nell' interno della soluzione di continuo, e che si stanno mettendo in rapporto di continuità con i bordi di questa soluzione; *c*, epiploon penetrato nell' interno della ferita e trasformato in un connettivo embrionale; *d*, corpuscolo di Malpighi in via di formazione, situato ancora molto lontano dai margini della soluzione di continuo. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 6. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 58 *giorni e già quasi intieramente riparata per neoformazione di parenchima splenico; sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, epiploon trasformato in connettivo embrionale; *c*, corpuscolo di Malpighi diviso dalla parte che guarda la soluzione di continuo dal fascio di connettivo *d* non ancora trasformato in parenchima splenico. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 7. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da 21 giorni; riparazione della perdita di sostanza per neoformazione primitiva della polpa; sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, piega dell'epiploon che è penetrata nell' interno della soluzione di continuo; *c*, neoformazione primitiva e rapida della polpa; *d*, chiazza di tessuto connettivo embrionale, proveniente dall' epiploon, non ancora trasformato in parenchima splenico. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 8. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da 58 giorni. Arresto della neoformazione di parenchima splenico nell' interno della perdita di sostanza; sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, corpuscoli di Malpighi delle vicinanze della ferita molto ingrossati; *c*, epiploon penetrato nell' interno della soluzione di continuo molto ricco di adipe; *d*, sottile zona di polpa neoformata; *e*, parte di epiploon trasformata in semplice tessuto connettivo per riassorbimento del grasso. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 9. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da 42 giorni. Riparazione rapida della perdita di sostanza per neoformazione di parenchima splenico; residuo di porzione di epiploon adiposo in mezzo alla neoformazione; sezione longitudinale*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, corpuscoli di Malpighi che si trovano in vicinanza della soluzione di continuo e che sono molto ingrossati; *c*, residui di connettivo embrionale nell' interno della ferita; *d*, residui di epiploon adiposo in mezzo alla neoformazione; *e*, pellicola o membranella connettiva che non si è ancora fusa con gli strati esterni della capsula e che è rivestita da endotelio. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 10. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da 40 giorni. Chiusura incompleta della ferita per aderenza incompleta dell'epiploon con i bordi di questa; sezione longitudinale*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, soluzione di continuo grandemente ristretta; *c*, epiploon che aderisce solo ad uno dei bordi della ferita e che nell'interno della perdita di sostanza è già tutto trasformato in parenchima splenico; *d*, parenchima splenico neoformato; *e*, bordo della ferita al quale non ha preso aderenza l'epiploon e che mostrasi del tutto inattivo nel processo di rigenerazione locale, e rivestito da un prolungamento della capsula. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 11. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da 30 giorni. Aderenza parziale dell'epiploon con i bordi della ferita, neoformazione di parenchima splenico limitata solamente ai punti dell'avvenuta aderenza; sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, epiploon che ha aderito ad un punto limitato dei bordi della ferita e nel quale ha luogo la neoformazione di parenchima splenico; *c*, porzione dei bordi della ferita alla quale non ha preso aderenza l'epiploon e che mostrasi del tutto inattiva nel processo di rigenerazione locale, e rivestita da un prolungamento della capsula; *d*, perdita di sostanza. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 12. *Asportazione cuneiforme della milza di 53 giorni. Modificazioni istologiche dell' epiploon penetrato nell' interno della soluzione di continuo e neoformazione di parenchima splenico; sezione longitudinale*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, polpa neoformata e nelle sue prime fasi di sviluppo; *c*, porzione di epiploon ancora ricco di adipe; *d*, porzione di epiploon trasformata in connettivo embrionale; *e*, un corpuscolo di Malpighi in via di formazione. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 13. *Asportazione cuneiforme della milza di giorni 59. Riparazione quasi completa della perdita di sostanza per neoformazione di parenchima splenico*; *neoformazione di piccola milza sull'epiploon che sta al di fuori della soluzione di continuo; sezione longitudinale*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, corpuscoli di Malpighi delle vicinanze della ferita divenuti assai più grossi; *c*, epiploon trasformato in connettivo embrionale; *d*, depressione del bordo della milza nella parte che corrisponde alla praticata lesione; *e*, resti di connettivo dell' epiploon penetrato nell' interno della soluzione di continuo; *f*, porzione libera dell'epiploon che lungo il corso di un vaso contiene tante piccole milzine, che vanno diminuendo di grossezza a misura che ci si allontana dalla milza primaria; *g*, una di queste milzine; *h*, formazione di polpa splenica nelle porzioni aderenti dell'epiploon. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig 14. *Asportazione cuneiforme della milza di giorni 4. Rapporti fra l'epiploon, il coagulo e i bordi della soluzione di continuo; neoformazione primitiva, incipiente, della polpa in mezzo al coagulo; sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, coagulo; *c*, grossa chiazza sanguigna formatasi in corrispondenza dell' apertura di un vaso di discreto calibro; *d*, epiploon ricco ancora di grasso; *e*, porzione di epiploon trasformata in connettivo embrionale e nella quale si vede un

corpuscolo di Malpighi in formazione; *f*, polpa in via di sviluppo, che ha origine dal connettivo dell'epiploon che invade il coagulo e che è completamente separata dai bordi della soluzione di continuo e sprovvista in ogni sua parte di corpuscoli. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 15. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da 22 giorni. Trasformazione irregolare dell'epiploon, penetrato nell'interno della soluzione di continuo, in connettivo embrionale*; *sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, polpa neoformata nelle prime fasi del suo sviluppo; *c*, epiploon che rimane in prossimità della soluzione di continuo ancora ricco di adipe; *d*, epiploon penetrato nell'interno della ferita trasformato in connettivo embrionale e offrente in alcuni punti degli accumuli di cellule che sembrano corpuscoli di Malpighi in via di sviluppo; *e*, lobuli di adipe di quest'epiploon non trasformati e rimasti in mezzo al connettivo embrionale; *f*, porzione di epiploon che rimane all'esterno della soluzione di continuo, nella quale il grasso è completamente riassorbito, e nella quale avvengono le prime trasformazioni del connettivo in parenchima splenico. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 16. *Asportazione cuneiforme di milza praticata da 42 giorni. Ritardo della neoformazione di parenchima splenico che deve andare a riparare la perdita di sostanza*; *sezione longitudinale*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, porzione di epiploon transformata in connettivo, *c*, epiploon penetrato nell'interno della ferita ancora ricco di adipe. Ing. 10. Cam. luc.

Fig. 17. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da 87 giorni. Forma dei bordi della soluzione di continuo*; *sezione longitudinale*; *a*, elevazioni emisferiche dei bordi della soluzione di continuo; *b*, porzione dell'epiploon penetrata nell'interno della ferita e ancora ricca di adipe; *c*, zona di epiploon trasformata in connettivo embrionale e dalla quale ha luogo la produzione del nuovo parenchima; *d*, epiploon che rimane all'esterno della lesione e che si è trasformato in connettivo semplice per riassorbimento del grasso. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 18. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da giorni* 30. *Mancanza di aderenza dell'epiploon e di neoformazione di parenchima splenico nell'interno della soluzione di continuo; sezione longitudinale*, *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, perdita di sostanza di quest'organo; *c*, bordi della ferita che si mostrano del tutto inattivi nel processo di rigenerazione locale e che sono rivestiti da uno strato fibroso che proviene da un prolungamento della capsula. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 19. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da giorni* 16. *Dislocamento dei bordi ; sezione trasversale*; *a*, bordo rimasto in posto; *b*, bordo piegato in fuori; *c*, porzione di questo bordo che fa sporgenza sulla superficie della milza; *d*, porzione di epiploon ancora ricca di grasso; *e*, epiploon trasformato in semplice connettivo per riassorbimento del grasso; *f*, neoformazione di parenchima splenico che si è fatta dal lato nel quale il bordo della ferita è piegato all'infuori, e che è completamente separata per mezzo della capsula dal vecchio parenchima e da quella dell'altro lato; *g*, neoformazione di parenchima splenico che si è fatta sul bordo della ferita rimasto in posto; *h*, porzione del bordo che fa sporgenza sulla superficie della milza trasformato in fitto tessuto connettivo; *i*, capsula che riveste la superficie di sezione della milza che si è piegata all'infuori; *k*, capsula della faccia posteriore della milza che è venuta a corrispondere alla soluzione di continuo e che divide la vecchia polpa da quella formatasi nell'epiploon. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 20. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da 8 giorni. Accumulo di corpuscoli di Malpighi nel fondo della soluzione di continuo; sezione longitudinale*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, epiploon penetrato nella perdita di sostanza; *c*, corpuscoli di Malpighi accumulati nel fondo della soluzione di continuo. Ingr. 10. Cam. luc.

Tavola II.

Fig. 21. *Apparecchio linfatico sanguigno del grand'omento*, 40 *giorni dopo aver praticato nella milza primaria delle asportazioni cuneiformi multiple*; *a*, ricca rete di vasi cavernosi; *b*; accumulo di globuli bianchi al dintorno di questa rete; *c*, vasi terminali; *d*, trabecole dell'omento. Ingr. 40. Cam. luc.

Fig. 22. *Neoformazione di parenchima splenico della superficie della milza primaria; a*, vecchio parenchima splenico della milza primaria; *b*, capsula della milza primaria; *c*, neoformazione di polpa in un connettivo che proviene da proliferazione del peritoneo di rivestimento della milza primaria;

d, corpuscolo di Malpighi di questa neoformazione; *e*, parte nella quale la milza neoformata ha rotta la capsula splenica e comunica col parenchima della milza primaria. Ingr. 40. Cam. luc.

FIG. 23. *Piccolo nodulo sulla superficie della milza formato dal parenchima della milza primaria;* *a*, vecchio parenchima splenico: *b*, capsula molto assottigliata e sollevata in corrispondenza della neoformazione; *c*, capsula normale della milza; *d*, polpa splenica della neoformazione; *e*, corpuscoli di Malpighi molto grossi. Ingr. 10. Cam. luc.

FIG. 24. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 33 *giorni. Neoformazione di un corpuscolo di Malpighi dal connettivo dell'epiploon penetrato nell'interno della soluzione di continuo*; *sezione longitudinale*; *a*, margini della soluzione di continuo con eminenze emisferiche; *b*, connettivo dell'epiploon che penetra nell'interno della soluzione di continuo; *c*, connettivo embrionale che riempie la perdita di sostanza e che qua e là presenta una infiltrazione di sangue; *d*, corpuscolo di Malpighi formatosi in questo connettivo in un punto assai distante dai margini della soluzione di continuo. Ingr. 10. Cam. luc.

FIG. 25. *Rapido accrescimento di una neoformazione di parenchima splenico della superficie della milza per asportazioni cuneiformi multiple di questo organo; la sezione praticata trasversalmente ad una soluzione cuneiforme della milza, interessa obliquamente la neoformazione della superficie di quest'organo; in sezione trasversa la neoformazione dava una figura simile alla* 22ª; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, capsula splenica che dalla superficie anteriore della milza si continua sulla base della neoformazione e dà l'immagine di una trabecola colossale; *c*, porzione della neoformazione della superficie della milza che è separata dalla vecchia polpa per una fessura e che è fusa con il grand'omento lungo il quale progredisce molto attivamente; *d*, soluzione di continuo della milza molto ristretta; l'epiploon provvede così alla riparazione di questa soluzione nella quale è penetrato come all'accrescimento della neoformazione *c* della superficie libera della milza alla quale ha aderito.

FIG. 26. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da giorni* 13; *modo di procedere della riunione della perdita di sostanza; sezione trasversa*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, neoformazione di parenchima splenico; *c*, capsula splenica che si arresta nel punto nel quale fu sezionata; *d*, riunione della neoformazione in corrispondenza della parte centrale della soluzione di continuo; *e*, epiploon ancora adiposo; *f*, epiploon trasformato in semplice tessuto connettivo per riassorbimento del grasso; *g*, epiploon ancora ricco di adipe. Ingr. 10. Cam. luc.

FIG. 27. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 23 *giorni. Riparazione rapida della perdita di sostanza per neoformazione di parenchima splenico; aspetto della parte riparata; sezione longitudinale*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, corpuscoli di Malpighi delle vicinanze della ferita, molto ingrossati; *c*, resti del connettivo dell'epiploon fortemente infiltrati di sangue; *d*, sottile fascio di connettivo che forma una linea sinuosa che marca il punto nel quale fu praticata la lesione. Ingr. 10. Cam. luc.

FIG. 28. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 29 *giorni. Neoformazione di corpuscoli e di polpa; comunicazione dei vasi dell'epiploon con la polpa in formazione*; *sezione trasversa*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, connettivo dell'epiploon penetrato nell'interno della soluzione di continuo; *c*, polpa neoformata già in rapporto con i margini della ferita; *d*, corpuscolo di Malpighi formatosi nel connettivo dell' epiploon in un punto assai lontano dai bordi della soluzione; *e*, vasi sanguigni dell'epiploon, fortemente dilatati, che si mettono in comunicazione con la polpa in via di sviluppo. Ingr. 10. Cam. luc.

FIG. 29. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 16 *giorni. Arresto della capsula nel punto nel quale fu sezionata, direzione delle trabecole della polpa in via di sviluppo*; *sezione trasversa*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, punto di arresto della capsula splenica; *c*, neoformazione di polpa che corrisponde al margine più grosso; *d*, epiploon che lega insieme i due margini della ferita e che si trova fortemente infiltrato di sangue; *e*, neoformazione di un corpuscolo e di polpa che corrisponde al margine più sottile. Ingr. 10. Cam. luc.

FIG. 30. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 28 *giorni. Neoformazione primitiva di un corpuscolo di Malpighi dal connettivo dell'epiploon penetrato nell'interno della ferita*; *sezione longitudinale*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, connettivo dell'epiploon penetrato nell'interno della soluzione di continuo; *c*, corpuscolo di Malpighi con un sottile strato di polpa formatosi in mezzo a

questo connettivo, in un punto assai distante dai margini della ferita; *d*, pelo con accumulo di globuli bianchi al dintorno. Ingr. 26. Cam. luc.

Fig. 31. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 30 *giorni. Modo di procedere della neoformazione di parenchima splenico che va a riparare la perdita di sostanza*; *sezione trasversale*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, epiploon che entra nella soluzione di continuo; *c*, neoformazione di parenchima splenico che procede dalla parte opposta a quella dalla quale penetra l'epiploon verso quella nella quale ha luogo l'ingresso di questa sierosa nella soluzione di continuo; *d*, epiploon trasformato in semplice tessuto connettivo. Ingr. 10. Cam. luc.

Fig. 32. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 30 *giorni. Corpuscolo di Malpighi formatosi sul corso di un vaso dell'epiploon*; *sezione longitudinale*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, corpuscoli di neoformazione; *c*, vaso sanguigno dell'epiploon sul quale si è formato il grosso corpuscolo *b*; *d*, connettivo dell'epiploon penetrato nell'interno della soluzione di continuo. Ingr. 26. Cam. luc.

Fig. 33. *Neoformazione di noduli di milza nell'epiploon che ha contratto aderenza con la milza primaria; a*, parenchima della milza primaria; *b*, capsula della medesima; *c*, epiploon aderente alla capsula; *d*, noduli neoformati costituiti da sola polpa splenica; *e*, un nodulo contenente un corpuscolo di Malpighi; *f*, porzione di epiploon ancora infiltrata di grasso. Ingr. 10. Cam. luc.

Tavola III.

Fig. 34. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da giorni* 8. *Genesi della membranella connettiva che penetra fra il coagulo e i bordi della soluzione di continuo dell'epiploon*; *sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, capsula splenica; *c*, connettivo dell'epiploon che si mette in rapporto con la soluzione di continuo; *d*, sottile membranella di connettivo che proviene dall'epiploon e che penetra fra il coagulo e i bordi della soluzione di continuo; *e*, gettate connettive che da questa membranella s'insinuano nel coagulo; *f*, fasci di fibrina coagulata. Ingr. 70. Cam. luc.

Fig. 35. *Asportazione cuneiforme nella milza praticata da giorni* 4. *Prime modificazioni istologiche dell'epiploon e deformazione primitiva dei bordi della soluzione di continuo*; *sezione longitudinale; a*, vecchio parenchima della milza; *b*, grossa trabecola fortemente retratta; *c*, coagulo con grossi fasci di fibrina coagulata; *d*, neoformazione connettiva che proviene dall'epiploon vicino e che s'insinua nel coagulo per raggiungere la trabecola; *e*, epiploon penetrato nell'interno della ferita che già ha perduto il grasso e si è trasformato in un connettivo embrionale; *f*, epiploon nel quale si ha il riassorbimento del tessuto adiposo e la comparsa fra le cellule adipose di accumuli di globuli bianchi. Ingr. 90. Cam. luc.

Fig. 36. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da giorni* 3. *Penetrazione nel coagulo di gettate connettive che provengono dall'epiploon*; *a*, connettivo embrionale che si trova in mezzo al coagulo; *b*, coagulo. Ingr. 90. Cam. luc.

Fig. 37. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 8 *giorni. Gettate connettive che provengono dall'epiploon, le quali s'infiltrano nel coagulo*; *sezione longitudinale*; *a*, vecchio parenchima della milza; *b*, sottile membranella connettiva penetrata fra il coagulo e il bordo della soluzione di continuo e che proviene dall'epiploon; *c*, gettate connettive di questa membranella che si spingono entro il coagulo; *d*, coagulo. Ingr. 90. Cam. luc.

Fig. 38. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 16 *giorni. Neoformazione della polpa; sezione trasversale*; *a*, lacune sanguigne; *b*, trabecole connettive di queste lacune. Ingr. 160. Cam. luc.

Fig. 39. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 8 *giorni. Infiltrazione di sottili gettate nell'interno del coagulo*; *sezione longitudinale*; *a*, porzione della piega dell'epiploon trasformata in tessuto connettivo; *b*, sottili prolungamenti connettivi dell'epiploon che penetrano nell'interno del coagulo; *c*, coagulo. Ingr. 90. Cam. luc.

Fig. 40. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 58 *giorni. Fusione della pellicola con gli strati esterni della capsula splenica*; *sezione longitudinale*; *a*, vecchio parenchima splenico; *b*, capsula fusa nei suoi strati esterni con la pellicola *c*. Ingr. 60. Cam. luc.

Fig. 41. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da 8 giorni. Cellule con nucleo in gemmazione nel connettivo che è penetrato nell'interno della soluzione di continuo*; *a*, connettivo embrionale con incipiente infiltrazione di sangue; *b*, cellule con nucleo in gemmazione. Ingr. 90. Cam. luc.

Fig. 42. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da giorni* 21. *Comparsa di globuli rossi nucleati fra le cellule adipose dell'epiploon penetrato nell' interno della soluzione di continuo*; *sezione longitudinale*; *a*, epiploon nel quale il grasso è già stato riassorbito; *b*, cellule adipose; *c*, sangue con qualche globulo rosso nucleato che divide queste cellule adipose. Ingr. 90. Cam. luc.

Fig. 43. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 10 *giorni. Connettivo embrionale proveniente da trasformazione del tessuto adiposo dell'epiploon.* Fra le cellule fusate del connettivo comincia a formarsi già un' infiltrazione sanguigna.

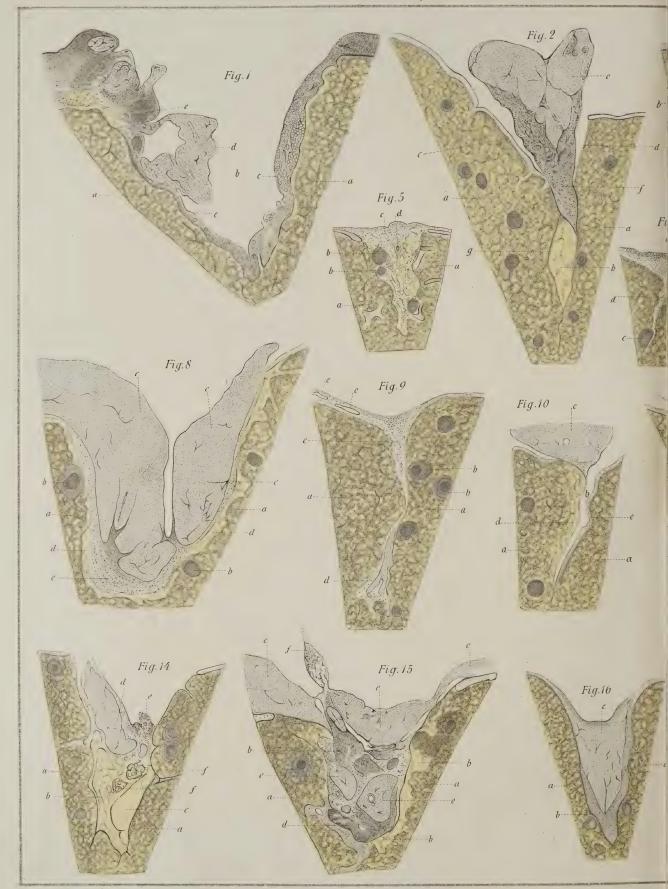
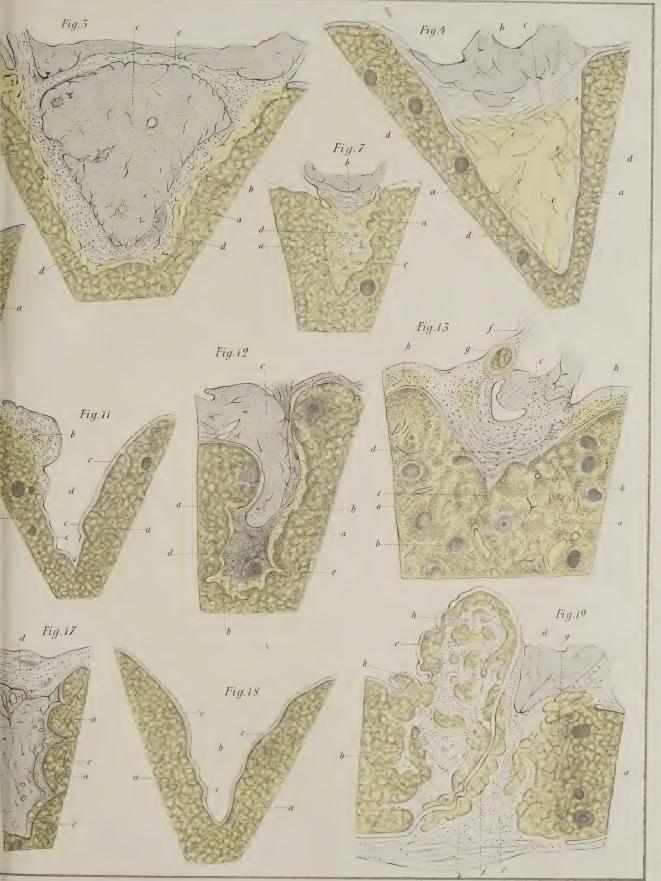
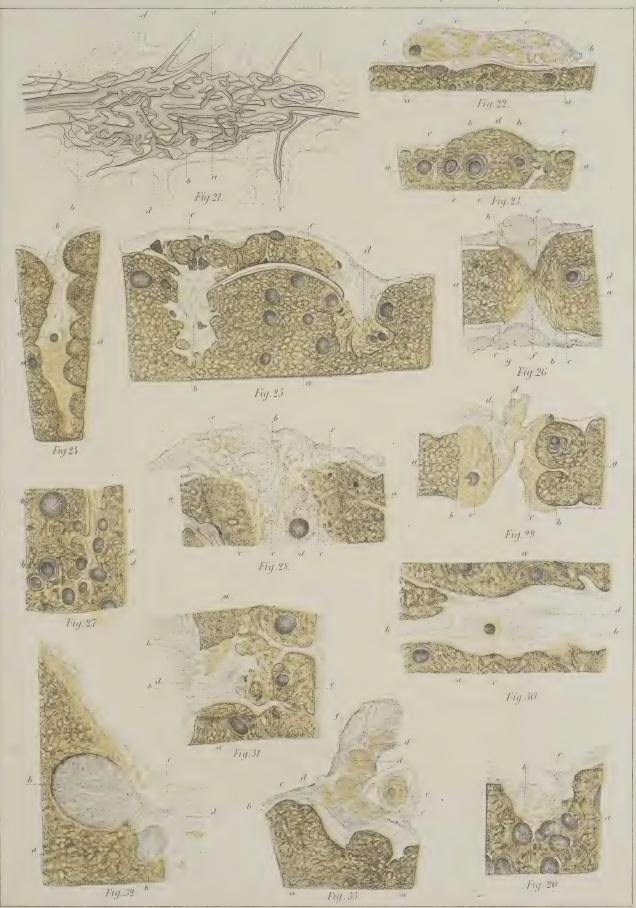
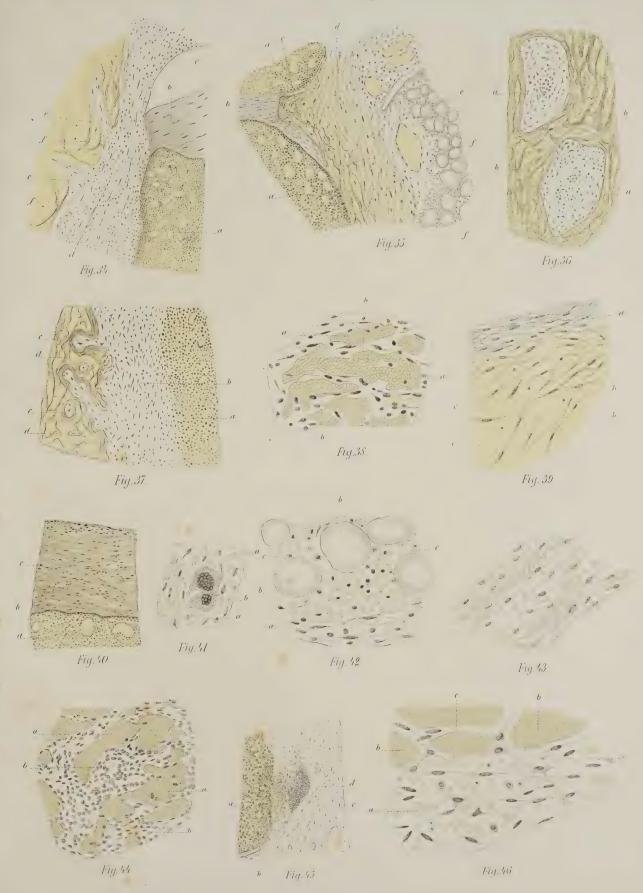
Fig. 44. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 4 *giorni. Neoformazione della polpa*; *a*, lacune sanguigne; *b*, trama connettiva molto ricca di nuclei. Ingr. 160. Cam. luc.

Fig. 45. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 30 *giorni. Neoformazione di un corpuscolo di Malpighi*; *sezione trasversale*; *a*, vecchia polpa della milza; *b*, capsula splenica; *c*, connettivo dell'epiploon penetrato nell' interno della soluzione di continuo; *d*, corpusculo di Malpighi nelle prime fasi di sviluppo. Ingr. 60. Cam. luc.

Fig. 46. *Asportazione cuneiforme della milza praticata da* 16 *giorni. Neoformazione della polpa*, *sezione trasversale*; *a*, connettivo embrionale con ricca rete protoplasmatica e con incipiente infiltrazione di globuli rossi dei quali alcuni nucleati; *b*, grandi lacune sanguigne; *c*, trabecole di queste lacune.

G. Tizzoni ad. nat. del.

Lit. Bruno e Salomone Roma

G. Tizzoni ad nat. del		Lit. Bruni e Salomone Roma

G. Tizzoni ad nat. del. Lit. Bruno e Salomone Roma

I. Studî geologici sulle conche di Terni e di Rieti
di A. VERRI Capitano nel Genio.

II. Contributo allo studio della fauna liassica dell'Apennino centrale
del dott. C. F. PARONA.

Memorie approvate per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 maggio 1883.

(Con quattro tavole)

I. *Studî geologici sulle conche di Terni e di Rieti.*

CAPO I.

SISTEMA IDROGRAFICO ED OROGRAFICO — PAESAGGIO
MEMORIE STORICHE — CONDIZIONI AGRICOLE ED INDUSTRIALI.

Dei fiumi confluenti nel Tevere principale è la Nera, la quale, ricevuti il Corno, il Velino col Salto e col Turano, si ritiene che nelle massime magre non porti meno di 100 metri cubi, ed arrivi a 2800 metri cubi d'acqua per minuto secondo nelle maggiori piene [1]. Perciò il detto che *il Tevere non sarebbe Tevere, se la Nera non gli dasse da bevere* [2]. La Nera taglia trasversalmente l'Apennino nel luogo dove si aggruppano alla catena le montagne più alte. A Visso, dove il fiume riunisce i rami delle sorgenti, la valle è elevata circa 540^{m}; 200 alla confluenza del Velino: in questo tratto è fiancheggiata a destra dai monti Femma (1573^{m}), Maggiore (1427^{m}), Fionchi (1335^{m}); a sinistra dai monti Aspro (1401^{m}), Coscerno (1682^{m}), della Pelosa (1677^{m}). Queste vette distano dalla valle dai 3 ai 5 chilometri, sicchè la valle deve risultare stretta e con ripe alte e scoscese. Giunto il fiume vicino a Terni, improvvisamente la valle diviene aperta e per ampia pianura, e per poca elevazione delle colline che la serrano; si ristringe di nuovo, e più fortemente che non nel tronco superiore, quando attraversa i monti di Narni.

(1) Baccarini, *Le acque e le trasformazioni idrografiche in Italia.* — Plinio, Ausonio, Virgilio chiamano solfuree le acque della Nera, e si ritiene da alcuni che il fiume fosse chiamato *Nar* perchè i Sabini chamavano *Nar* il solfo.

(2) Il Tevere ha bacino di circa 16700 chilometri quadrati. La lunghezza del corso è 393 chilometri. La portata minima è valutata dal Brighenti 165 metri cubi; la media dal Baccarini 292 metri cubi, la massima dallo stesso 4500 metri cubi.

La Nera ha bacino di circa 4000 chilometri quadrati. La lunghezza del corso è 104 chilometri; la portata media secondo il Baccarini, 169 metri cubi.

Il Corno ha 43 chilometri di corso, 10 metri cubi di portata media.

Il Velino ha 109 chilometri di corso, e le portate citate, dopo ricevuto il Salto ed il Turano.

Il Salto ha 82 chilometri di corso, 20 metri cubi di portata media, 610 di portata massima.

Il Turano ha 97 chilometri di corso, 8 metri cubi di portata media, 420 di portata massima.

Strabone nel L. V° descrive la Nera come fiume navigabile; Tacito accenna pure alla navigazione della Nera nel L. III° degli *Annali*. Non è difficile che il fiume potesse essere navigato fino alle rupi di Labriano; ma non mi sembra che avrebbe potuto eseguirsi la navigazione fino a Narni senza adatte opere d'arte, e di queste non rimane segno.

Il bacino della Nera si estende circa 4000 chilometri quadrati. È ristretto ad una zona di pochi chilometri sulla destra del fiume, senza confluenti di qualche importanza; è molto allungato invece sulla sinistra, dove la distanza dalle sorgenti del Salto alla valle della Nera supera 90 chilometri.

Il Velino è il confluente principale della Nera: si calcola la sua portata media di 60 metri cubi, di 1260 la massima [1]. Anche il Velino, uscito da una valle profondamente incassata, e specialmente tra i monti di Cogito e di Campello, dove è chiuso tra ripe altissime a picco, incontra la larga pianura di Rieti, e poi corre in una valle più ristretta fino alle Marmore, da dove si precipita nella Nera côn caduta di 160 metri [2].

Appunto la singolarità delle due valli, che, senza progressione idrografica, da gole strettissime si cambiano in estese pianure, e poi, vicino alla confluenza, tornano a ristringersi, costituisce il soggetto di questo studio. Nel quale procurerò di mostrare la conformazione stratigrafica delle conche di Rieti e di Terni, e di narrare per quali trasformazioni sembra che sieno passati i bacini della Nera e del Velino, prima di stabilirsi nell'assetto attuale.

La conca di Rieti, di figura sensibilmente circolare, è elevata circa 400 metri sul livello del mare. Ad oriente è chiusa dalla catena del Terminillo, ad occidente dai monti di Greccia, al nord ed al sud da poggi e da colli di minore altitudine (circa 800^m al sud e 600^m al nord). I laghetti di Piediluco e di Ventina sono compresi tra i poggi ed i colli al nord, e tra questi poggi e la catena di Greccia, la valle del Velino prosegue fino alle Marmore. Tra i colli ed i poggi al sud sono gli sbocchi delle valli del Velino, del Salto, del Turano. Una fila di piccole collinette isolate divide in due la conca di Rieti; tra quelle collinette ed il Terminillo la pianura è sensibilmente più depressa, e si hanno varî stagni, tra i quali principali sono il lago di Cantalice ed il lago Lungo [3].

La catena del Terminillo, il cui vertice è il punto più elevato del subapennino, si compone del Terminillo (2278^m), del monte Leprino (1750^m), delle montagne del Corno (1738^m), del monte della Pelosa (1677^m). Al sud-est è tagliata dalla valle del Velino le cui quote sono 410^m sotto Città Ducale, 542^m ad Antrodoco, 755^m alla Posta. Nella valle del Velino, dal fianco del Terminillo, scaturiscono ricchissime

(1) Baccarini, Memoria citata.

(2) Dionisio Alicarnasso scrive che il fiume fu chiamato Velino perchè ivi erano delle paludi, che nell'antico uso della lingua si chiamavano *Velia*.

(3) Lago di Piediluco lungo 3500 metri, largo 500, esteso ettari 164,76 con periferia di metri 16805; lago Lungo periferia di metri 4950, lunghezza metri 2500, larghezza metri 400; lago o stagno di Ripasottile lungo metri 2000, largo metri 500, côn periferia di metri 8500. Oltre a questi, tre piccoli bacini, detti laghi della Volta, di Canale, di Ventina.

sorgenti, tra le quali le acque minerali di Antrodoco e Città Ducale. La catena limita ad ovest l'altipiano di Rieti (400^{m}), ed ivi alle falde delle montagne del Corno surge improvviso il grosso corso d'acqua del Fiumarone; al nord è tagliata dalla valle della Nera (300^{m}), ed anche là si hanno copiose sorgenti presso Arrone e presso Ferentillo. Nella catena di Greccia, allineata dal nord al sud, le maggiori elevazioni sono segnate dal monte di Moggio (1047^{m}), dal monte di Greccia (1234^{m}), dal monte Porcomorto (1271^{m}), dal monte Acuto, o vetta di Costa Marchigiana (4308^{m}). Questa catena è completamente isolata. Al nord la valle della Nera (200^{m}), al sud i colli del Farfa (400^{m}), ad oriente la valle del Velino (400^{m}), ad occidente la valle di Configni (400^{m}). Sulla spina della catena diverse vallette, quali disposte secondo la sua direzione, quali in direzione trasversale, all'altitudine di circa 800^{m}, formano i prati di Cimitelle, di Canepine, di Stroncone, di Cottanello.

La conca di Terni non ha la figura circolare di quella di Rieti. La sua pianura, in media elevata a 110^{m} sul livello del mare, può essere assomigliata ad una ellissi coll'asse maggiore nel senso della direzione della Nera. Però se si osserva la direzione delle catene montuose, si vede che la parte piana della valle taglia ortogonalmente l'asse di un'altra valle, i cui fianchi convergono a mezzogiorno con angolo di pochi gradi e divergono verso tramontana. Il terreno della valle superiore è tagliato dai torrenti, i quali lo dividono in colline elevate dai 300 ai 400 metri.

La conca di Terni confina ad oriente coi monti Martani, ed i monti di Stroncone; ad occidente coi monti di Narni e di Amelia. I monti di Stroncone sono il proseguimento della catena di Greccia. Separati da questi per un largo insellamento, nel quale corre la Nera, i monti Martani hanno le altitudini di 1054^{m} al Pizzo di Appecano, 1118^{m} al Torre Maggiore, 1090^{m} al monte Martano. Il gruppo è limitato al sud dalla valle di Terni, ad oriente dalle valli del Serra e della Maroggia, ad occidente dalla valle della Naia, a tramontana dai colli di Montefalco. Le pendici di quei monti dalla parte di Terni sono estremamente dirupate ed irte di scogliere.

I monti di Narni sono compresi tra la valle di Lugnola e Configni ad oriente, le colline della valle del Tevere (elevate circa 350^{m}) a mezzogiorno e ad occidente, la stretta della Nera (media elevazione 84^{m}) al nord. Le loro elevazioni maggiori sono, verso l'estremità sud, le taglienti creste del monte Cascia (1118^{m}) e del San Pancrazio (1026^{m}). Dopo quelle creste la catena si abbassa e diviene meno aspra, finchè sopra Taizzano ha l'altitudine di 417^{m}. La catena, dopo la gola della Nera, prosegue coi monti di Amelia, i quali al monte Croce sono elevati 453^{m}, al monte Arnata 547^{m}, al monte Piano-Napi 755^{m}, e 993^{m} al monte di Melezzole. Troncata di nuovo la catena dalla profonda stretta del Tevere (elevazione media 120^{m}), seguita coi monti di Orvieto (monte Peglia 867^{m}).

Nelle conche di Terni e di Rieti si perde il tipo uniforme caratteristico dell'Apennino centrale. Aguglie, cupole e creste taglienti, scogliere nude, pendici boscose, estese praterie si alternano e danno a quei monti aspetto alpino. Mancano al paesaggio le nevi perpetue ed i ghiacciai; ma le nevi solo per pochi mesi abbandonano alcune cime, e sulla vetta del Terminillo si ha il cielo profondamente azzurro delle

Alpi. Nella conca di Rieti le pendici della montagna per lo più incontrano la pianura senza transazione di colline; nella conca di Terni tra la pianura ed il monte sta sempre una zona di colli. Dietro quei colli si staccano i poggi arrotondati di Miranda, il rilievo aspro del monte S. Angelo, la gola cupa e dirupata del Serra; e, troncata bruscamente dalla rupe di Cesi, la faccia ripidissima del Pizzo di Appecano e del Torre Maggiore, maestosa quando il sole ne disegna le rughe severe, e quando si aggrotta sotto mantello denso di nebbie. Verdura perenne veste i colli ed i monti: nei colli il verde pallido dell'olivo, nel monte il verde cupo del bosso, del corbezzolo, del pino, e dell'elce.

Dai monti di Narni, ad occidente spazî senza termine colle tinte calde del giallo ranciato, sui quali spiccano isolati il Soratte, il Cimino, il cono tronco di Bracciano; più là il monte di Canino, le alture della Tolfa, poi il mare: ad oriente profili aspri, tinte fredde, monti e poi monti fino ai gioghi nevosi della Sibilla. Quando la nebbia copre le valli, ad occidente un mare con rare isole, ad oriente un miscuglio di golfi, di seni, di stretti, di laghi.

Ad oriente della conca di Terni la Nera si divide, si rompe, sparisce vorticosa in un letto di scogli, incassata tra ripe a picco alte ed uniformi, poi tra le aguglie slanciate di S. Angelo e Pennarossa. Dietro quelle scogliere, da 60 a 1260 metri cubi d'acqua precipitano a piombo per 80 metri, e per altri 80 trabalzano di rupe in rupe fino alla Nera [1]. Dopo la cascata una valle aperta, colline popolate di castelli, e nel fondo le rupi di Ferentillo, del Sollene, del Fionchi.

L'orrido della gola di Narni; la gola del Serra prima coi dirupi e le torri di Battiferro e della Rocca, poi colle tinte rosse vive delle roccie contrastanti col verde degli elci, e dopo colla amena valletta di Giuncano; la valle selvosa di Strettura; le vallette sopra ai monti di Stroncone e Cottanello, popolate di casolari dei pastori; la bellezza malinconica del lago di Piediluco, i laghetti selvaggi sopra ai monti del Cicolano, la gola aspra del Velino tra la Posta ed Antrodoco, e mille altri luoghi che troppo divagherebbe descrivere, dovunque si vada, offrono scene parziali di paesaggio con indefinite varietà di linee e di tinte [2].

Si ritiene che i primi abitatori di queste contrade siano stati gl'*Iberi*, scesi in Italia dai Pirenei per le coste meridionali della Gallia, i quali invasero la valle del Po e si allargarono verso il sud della penisola, estendendosi nei piani del Tevere e nel Settimonzio. Questa immigrazione Iberica, costituente l'età della Pietra, si riferisce a 24 o 25 secoli prima dell'Era volgare.

[1] Byron nel canto *L'Italia* ci ha lasciata l'unica descrizione che si possa fare della cataratta del Velino.

[2] Tra i fenomeni che possono interessare il visitatore è l'eco di Piediluco, il quale ripete un endecasillabo, e le grotte di Cesi chiamate eolie perchè vi soffia una corrente d'aria. La temperatura dell'aria soffiata nell'estate è da 7° a 9° R., nell'inverno da 6° a 7° R. Nell'estate spirano venti dall'interno, nell'inverno le grotte aspirano l'aria dall'esterno. Nell'estate la corrente aerea è tanto più forte, quanto più alta è la temperatura esterna, e quindi è variabile nella giornata. (Notizie tratte dall'opuscolo del Riccardi: *Ricerche istoriche e fisiche sulla caduta delle Marmore, ed osservazioni sulle adiacenze di Terni*, 1879).

Alla immigrazione Iberica sembra succeduta quella *aborigeno-pelasgica*, ed a questa la immigrazione del ramo *Ario-pelasgico* chiamato *Umbro-latino*, 19 o 20 secoli prima dell' Era volgare. Rami di questo ceppo gli *Umbri* ed i *Sabini* o per divisione fatta del territorio occupato, o come si crede per guerre avvenute tra loro, i Sabini occuparono la regione alpestre dell'Abruzzo, il territorio di Rieti e di Norcia, e loro confine cogli Umbri fu il corso della Nera.

A contrastare agli Umbri-Sabini il possesso delle terre acquistate 16 o 17 secoli avanti l'era volgare, venne una quarta immigrazione Ariana, alla quale si dà il nome di *Greco-pelasgica*. Sembra che questo popolo, nonostante gli elementi di forza e grandezza che possedeva, non abbia potuto reggersi molto nel dominio, e che gli Umbri abbiano ripreso il sopravvento.

Quattordici secoli avanti l'era volgare gli *Etruschi*, provenienti dall' Asia Minore, tolsero agli Umbri ed ai Sabini parte del territorio; e questi popoli furono ristretti alle contrade montuose dell'Apennino.

Nel tempo della invasione Celtica gli Umbri ancora figurano come popolo indipendente, e sono alleati all'Etruria; dopo la battaglia del Sentino (presso Sassoferrato nelle Marche), furono totalmente assoggettati ai Romani. Questi nella seconda guerra punica accamparono un esercito a Narni per coprirsi contro la marcia di Annibale.

Si credono opere Umbre le grotte esistenti nel monte Santa Croce presso Narni, la grotta detta d'Orlando con tre sculture simboliche sulla strada nazionale a mezzo chilometro da Narni, le camere sotterranee presso Stifone.

Cesi, Rieti, Aspra, hanno avanzi di mura umbro-pelasgiche; in Amelia queste mura formano tuttora parte della cinta della città. Fra Fara e Correse, si hanno vestigia di costruzione umbro-pelasgica, che si ritiene edificata a difesa della prossima Curi. Presso Monteleone in Sabina stanno gli avanzi di Trebula; l' Entilia col suo lago e la sua isola, cui erano diretti i Greco-pelasgi dall'oracolo, era situato presso Città Ducale. Nel territorio di Rieti gli archeologi ritrovano le mura di Lista e di Batia; ed a Tarano le traccie del tempio di Marte annesso alla città di Tiova.

Amelia ha vestigie di opere etrusche; presso Frasso si vedono avanzi di opera forse etrusco-sabina; si hanno vestigia di opere etrusche a Todi.

Avanzi di opere romane si vedono a Todi, Massa Martana, Terni, Narni, Ferentillo, Rieti, Frasso, Fianello, Montone, Torri, Rocchette, Poggio Mirteto, Montopoli, Aspra, Poggio Catino, Montasola, Otricoli. Sul monte S. Martino presso Fara stanno gli avanzi d'un recinto romano; vicino S. Gemini si trova Carsoli città romana distrutta dai Goti; presso Montebuono in Sabina sono i resti della villa e delle terme di Marco Agrippa. Il territorio era traversato da due grandi strade romane: la Salaria diretta alla Sabina; la Flaminia incominciata insieme alla Valeria dopo la guerra Sannita (104 anni A. C.) per coprire la linea del Tevere. Giungeva in principio, per Borghetto ed Otricoli, a Narni; fu condotta a Spoleto, per Acquasparta e Massa Martana, soggettata la Gallia cisalpina (222 anni A. C.); per Rimini fu prolungata fino a Piacenza compiuto il soggiogamento dei Galli (187 anni A. C.). Sotto Narni si ammirano gli avanzi del grandioso ponte, sul quale la Flaminia passava la Nera, che si crede fatto costruire da Augusto Imperatore.

Rieti fu patria dell'Imperatore Vespasiano e di Varrone; Narni dell'Imperatore Marco Coccejo Nerva, Terni degl'Imperatori Claudio ed Anneo Floriano Taciti, e di Cornelio Tacito.

Durante le invasioni barbariche, i Carpi, popoli venienti dalle rive del Danubio saccheggiarono Terni (anno 370), trovarono resistenza a Narni e furono rotti ad Otricoli con strage di 50,000.

Nel 400 i Goti distrussero Carsoli, saccheggiarono più volte Terni. Poi i Longobardi occuparono il territorio, mantenendovisi fino dopo la rotta di Desiderio (anno 774). Con questo cessò il dominio Longobardo, ed incominciò quello dei Pontefici Romani. Nel 748 avvenne in Terni l'abboccamento di Papa Zaccaria col Re Liutprando.

Credo che si debbano riferire al periodo della dominazione Longobarda i numerosi castelli che dominano le alture, imperocchè negli avvenimenti posteriori si trovano nominati come già esistenti da tempo antico, tra i quali bellissimo il castello di Polino.

Però inutilmente ho consultato le storie per formarmi un criterio della disposizione di alcune opere militari, le quali più che castelli feudali mostrano un concetto difensivo della valle, e sono veri fortilizi di sbarramento. Ne esistono a chiusura di tutti gli sbocchi dei torrenti principali che scendono dalla catena del Terminillo e delle montagne del Corno, i quali torrenti anche oggi costituiscono le vie naturali dall'Abruzzo alla Sabina. Le torri della Rocca S. Zenone stanno a guardia dello sbocco della valle del Serra; il castello di Strettura chiude la valle del Tescino; le mura turrite che s' inerpicano sulle scogliere di Ferentillo sbarrano la valle della Nera.

Cessata la dominazione Longobarda, il territorio nell'800 fu soggetto a scorrerie dei Saraceni, nel 900 a scorrerie degli Ungheri. Nel XI secolo Terni fu rovinata in gran parte dalle truppe di Federico Barbarossa; nel XII Rieti fu quasi distrutta da Ruggero I di Sicilia; nello stesso secolo resistè a Federico II, il quale s'impossessò di Terni. Nel 1289 Papa Niccolò IV incoronò in Rieti Carlo II d'Angiò Re delle due Sicilie. Dal XII secolo al XVI la storia registra continue lotte di parte tra Guelfi e Ghibellini, tra Colonnesi, Orsini, Savelli; turbolenze e tirannie dei capitani di ventura, tra i quali sono nominati Braccio da Montone, Francesco Sforza, Niccolò Fortebraccio, Nicolò Piccinino. Nel 1320 (?) 400 cavalli e 1500 fanti di Lodovico il Bavaro, partiti da Todi per assalire il castello di S. Gemini, furono rotti presso Terni dagli Spoletini uniti a 200 cavalli di Perugia. Nel secolo XV altre turbolenze per Cesare Borgia. Narni e Terni furono devastate dalle truppe di Carlo di Borbone dopo la presa di Roma.

In questo periodo Narni ebbe il Capitano Erasmo Gattamelata, del quale è conservata l'armatura nell'arsenale di Venezia; Terni ebbe Annibale detto da Terni uno dei tredici di Barletta [1].

Per il soggetto speciale della Memoria, interessa sopratutto la narrazione

[1] Gli accenni storici sono tratti dagli elementi di statistica della provincia dell'Umbria, e dalla Storia di Terni di Francesco Angeloni.

storica dei litigi, tra i popoli di Rieti e di Terni, sulla quistione del deflusso del Velino.

Alle Marmore, dove il Velino cade sulla Nera, il piano di Rieti termina con un ciglione largo circa 450^{m}. Le acque del Velino anzichè corrodere il ciglione, scolando senza canale ricche di sali calcarei e magnesiaci, collo stillicidio vi producevano incrostazione continua, talchè con processo continuo ne era rialzata la soglia. Plinio ci ha lasciato scritto nel libro II: *In exitu paludis Reatinae saxum crescit — Locus ille Marmora vulgo nuncupatus quia ibi marmor et saxum crescit. — Lacu Velino lignum deiectum lapideo cortice obducitur.* — Il rialzamento della soglia intristiva sempre peggio la valle di Rieti, e tendeva a ridurla completamente palustre, nonostante la copia dei detriti coi quali fiumi e torrenti la colmavano.

Si ritiene che il console M. Curio Dentato nell'anno di Roma 481, accampato colla legione presso Rieti, per il primo facesse il taglio della incrostazione generata del Velino, alle cui acque fu provveduto allora libero scolo. Si fa risalire all'anno di Roma 700, consoli L. Domizio Enobarbo ed Appio Claudio Pulcro, la prima lite tra i due popoli limitrofi. Fu spedito a deciderla il console Appio con due legati, ed i Reatini chiamarono a loro difensore Cicerone: *Reatini me ad sua Tempe duxerunt, ut agerem causam contra Interamnates apud Consulem et decem legatos, quod lacus Velinus a M. Curio emissus interciso monte in Narem defluit, ex quo est illa siccata.*

La seconda lite si accese durante il regno di Tiberio, e le cose restarono allo stato primitivo.

Verso il 1400 i Rietini, senza intendersi coi Ternani, incominciarono ad aprire un nuovo canale da sostituire al Curiano divenuto insufficiente a smaltire l'acqua, ed assalirono e s'impossessarono della Rocca S. Angelo custodita dai Ternani per vigilare sulle loro pretese. Questi il 17 agosto 1417 in pubblica adunanza decisero *eundum portum Marmorum ad moriendum.* Braccio da Montone fece cessare i Reatini dall'opera avviata, ma stabilì la costruzione di nuovo emissario, il quale non doveva essere aperto finchè non fosse stata costruita dai Ternani una torre, tenuta da persone incaricate di regolare l'uscita delle acque. Quell'emissario fu detto Reatino ed è anche chiamato Gregoriano. Non riconosciuto sufficiente nemmeno il nuovo emissario, i Reatini si rivolsero a Paolo III, perchè accordasse altro cavo. Il Papa visitò il luogo ed affidò il lavoro al Sangallo; la morte dell'architetto in Terni nel 1546 impedì il compimento dell'opera. Malgrado l'opposizione di Roma, Terni ed altre comunità, i Reatini riescirono ad ottenere l'apertura di un terzo emissario: ma nemmeno da questo la bonifica della valle fu molto vantaggiata, e nel 1596 chiesero a Clemente VIII che facesse riaprire la cava Curiana, obbligandosi di pagare a S. Pietro una tazza di mezza libbra d'oro. All'architetto Giovanni Fontana furono affidati i lavori con istrumento del 14 agosto 1596. Le condizioni dell'emissario stabilite nell'istrumento furono: che avesse principio al ciglio dei così detti scaglioni (m. 295 a monte del ponte regolatore), e da là dovesse finire a fior di terra nel fondo dell'antico bacino del lago. La sua larghezza dovesse essere m. 17,84 all'imbocco, m. 15,94 verso la caduta; l'alveo dovesse avere pendenza di 0,0041 per metro. Dovesse essere costruito un ponte alla distanza di circa 467 metri dalla cascata, colla

soglia a m. 1,333 sotto l'imposta dell'arco, e m. 4,90 sotto l'intradosso dell'arco stesso. La superficie totale della luce del ponte risultava metri quadrati 48,91. Quel ponte fu detto perciò *ponte regolatore.*

Nel 1598 il Papa assistè alla immissione del fiume nella cava Clementina o Curiana riaperta. Nel dicembre del 1598 il Tevere inondò Roma, alzandosi m. 19,56 sull'idrometro di Ripetta: quindi proteste contro l'opera avviata; ma questa continuò e fu totalmente compiuta nel 1601. Immesso il Velino nel nuovo emissario, si determinò nella Nera un rigurgito verso le campagne superiori. Fu incaricato il Fontana di provvedere, e si credè rimediarvi collo sgombrare dai massi il letto della Nera: non giovando l'espediente adottato, fu difeso il tronco superiore con argini.

Nel 1781, regnando Pio VI, fu deputato l'ingegnere Rapini a studiare il rimedio contro i danni derivanti dal rigurgito della Nera, il quale si protendeva a circa 7447 metri. Egli, attribuita la causa del rigurgito alla direzione data al Velino, propose di piegarlo alla cava Paolina, abbandonando la Clementina. Sorse forte contesa tra Rieti e Terni, per la prima volta alleate in tale quistione, ed i paesi della Valnerina superiore. Forse i Rietini temevano col risuscitarsi della quistione di perdere i beneficî ottenuti, i Ternani erano sempre preoccupati delle rapide crescenze della Nera, e così i due popoli si allearono mossi dai loro interessi. Chi sa quante belle e sottili argomentazioni si saranno addotte, per dimostrare essere giustissimo, che gli abitanti della valle superiore marcissero nelle paludi!.... Gl'ingegneri Corelli e Bonati proposero che fosse regolata la immissione del Velino nella Nera ad angolo acuto, togliendo l'angolo retto che riconobbero causa del rigurgito, e nel 1787 ordinato il taglio progettato da quegl'ingegneri, si ottenne il prosciugamento della valle superiore alla cascata, e la confluenza prese l'aspetto che attualmente conserva.

Le condizioni attuali provvedono alla sicurezza, al benessere agricolo ed igienico della valle di Rieti? Fortemente impressionato della terribile inondazione, dalla quale aveva veduta sommersa quella valle l'inverno 1879-1880, invitato a fare una lettura nella occasione della riunione a Perugia del XII Congresso alpino italiano, scriveva: « Mentre da una parte si lavorò per liberare le valli dai ristagni dovuti al difficile scolo delle acque, dall'altra il timore delle piene del Tevere a Roma fece costruire il ponte regolatore sul Velino, pel quale ad ogni grossa crescenza, resta sott'acqua la fertile pianura di Rieti, per 10 mila ettari. È veramente un'ironia vedere le acque sommergere quel vasto territorio, mentre, escendone col salto di 160 metri, se non fossero trattenute da quel ponte, dovrebbero tagliare la pianura profondamente. Non sarebbe possibile adoperare le ricchezze, che si perdono per tali disastri, a togliere alle popolazioni reatine così ingiusta e dannosa servitù, e riparare le valli più basse dai pericoli delle inondazioni? Ad ottenere questo scopo, si obietterà, che s'oppongono le condizioni del Tevere a Roma, anche dopo compiuti i lavori di sistemazione; ma tale difficoltà sarebbe rimossa colla deviazione dell'Aniene ed altre opere proposte nel progetto Baccarini » [1]. Dopo quell'anno, nella mia dimora a Terni, ho inteso impugnare da alcuni che il ponte regolatore sia la causa del ristagno dell'acqua nella pianura di Rieti, perchè neanche nelle massime piene la luce del ponte è interamente

[1] *Le valli antiche e moderne dell'Umbria.* Bullettino del r. comitato geologico, anno 1880, n. 1-2.

coperta dalle acque. Devesi considerare però che, anche senza che la luce sia tutta occupata, la posizione della soglia del ponte e la strettezza della sezione dell'alveo può essere causa di rigurgiti, e quindi di esondazioni nei terreni a monte. Posto anche che le esondazioni non siano prodotte da difetti nella sezione dell'ultimo tronco del Velino, e ne siano causa difetti di alveo o di confluenze nei fiumi superiori, col dilivello tra l'altipiano del Velino e la valle della Nera deve essere sempre facile il provvedere (1).

Così, per difetti nell'alveo e nel corso della Nera, la pianura tra Terni e Narni soffre molti guasti per le tortuosità e per le piene del fiume.

La Nera da Terni a Narni ha 0,70 di pendenza per chilometro, mentre allorchè attraversa la catena di Narni ha 3,27 di pendenza, e 2,94 dopo escita dalla stretta fino alla confluenza nel Tevere. Non si potrebbero desiderare migliori condizioni, per adattare la sezione del fiume, in modo da assicurare il regolare smaltimento delle acque. Nè i danni recati dalle esondazioni dei fiumi si limitano a guasti di terreni: ma, per i ristagni delle acque, sono causa delle perniciose febbri miasmatiche che infettano alcune zone delle conche di Rieti e di Terni.

Altre popolazioni non risparmierebbero cure per liberarsi da tali flagelli, tanto più quando le circostanze suggeriscono, come nei casi descritti, rimedî di sicura efficacia (2).

La conca di Rieti è nota in commercio per la eccellente qualità dei suoi grani. Per tutto il territorio è estesissima la coltivazione dell'olivo: però gli olii riescono di poco buona qualità. La causa di tale difetto è in questo, che i molini dell'olio sono scarsi in confronto della produzione, per cui la raccolta delle olive si prolunga fino all'aprile, e di più il frutto dopo colto deve stare troppo tempo ammucchiato prima di passare sotto le macine. Lo studio di provvedimenti opportuni non è problema facile a risolvere. La costruzione dei molini da olio è costosa, mentre il denaro impiegato è produttivo solamente per pochi mesi dell'anno, e terminata la macinazione delle olive non si sa adoperarli per altri usi. In tali condizioni è evidente che nessuno si curi di spendere per aumentarli.

Le montagne sono ricche di pascoli, e nell' estate riuniscono gran quantità di mandre. La conca di Terni ai vantaggi agricoli, aumentati per la pianura dalla facilità d'irrigazione, riunisce la considerevole forza motrice, per la quale dovrà diventare uno dei più importanti centri industriali.

Attualmente sono derivati dalla Nera, tra la cascata e la pianura di Terni, circa 19,50 metri cubi d'acqua al minuto secondo per uso misto d'irrigazione, di forza

(1) Nella stessa quistione da alcuni si afferma e da altri si nega che le acque del Velino tendano ad incrostare l'alveo in modo da rendere sempre più difficile il deflusso. — Relazione dell'ing. cav. Ottavio Coletti, *Sulla opposizione del Municipio di Terni all'abbassamento dell'emissario progettato nel* 1865 *dall'ing. Maranesi.*

(2) Benchè la Valdichiana (Toscana) sia in condizioni migliori delle valli interne dell'Umbria, pure la provincia di Arezzo ha voluto anche più migliorare lo scolo delle acque, e nell'anno scorso (1882) fu posto all'asta un progetto di allargamento e di approfondamento dello sbocco del canale della Chiana per la spesa di 2 milioni e 130 mila lire.

motrice di molini, e di stabilimenti industriali; e circa 36 metri cubi per forza motrice di grandi stabilimenti industriali ([1]). Tra le derivazioni devono essere ricordati per la storia antica i due canali romani Sersimone e Cervino; e per la moderna il canale Nerino. Altri 5 metri cubi sono stati concessi per irrigazione dei territorî di Narni e Collescipoli.

Secondo le divisioni amministrative del Regno, le quali conservano i confini delle divisioni politiche cessate, il territorio studiato in questa Memoria appartiene alle provincie di Aquila (Abruzzo), Roma, Perugia. I confini dell'Abruzzo, nelle valli del Salto e del Velino, giungono fino a pochi chilometri da Rieti, passano per le falde del Terminillo sulla pianura di Rieti fino al lago di Cantalice; poi salgono alle montagne del Corno, della Pelosa, del Carpelone. Il fiume Farfa divide la provincia umbra dalla romana. Oltre agli Abruzzesi, negli abitatori del territorio delle conche di Rieti e di Terni, si distinguono gli Umbri ed i Sabini. Si può quasi dire che la Nera è il confine tra le due razze antiche; a destra gli Umbri, a sinistra i Sabini. Il Sabino forse pare di carattere più aperto; il carattere di noi Umbri, se non erro, mi sembra che renda alquanto difficile lo scambio delle idee. È facile comprendere i danni che simile difetto cagiona nella società moderna. Non è oggetto del lavoro estendermi in queste considerazioni, nè sulle costumanze degli abitatori del territorio. Ho tratteggiate alcune linee generali, perchè l'occhio dell'osservatore non può fermarsi esclusivamente su un'ordine solo di fatti ([2]).

CAPO II.

ANALISI GEOLOGICA.

I. Carattere litologico dei terreni ordinati in serie discendente.

Oltre ai detriti, che la corrosione meteorica distacca dalle parti elevate, e le acque accumulano attualmente nelle parti depresse, oltre alle torbe che si compongono nei laghi e negli stagni esistenti, le terre e le roccie disegnate sulla carta del territorio si distinguono nelle masse seguenti, tenuto l'ordine, secondo il quale si sovrappongono.

1. Letti alluvionali talvolta cementati, con sparsi blocchi pietrosi grossi anche qualche metro cubo, sabbie gialle e rosse, marne, contenenti organismi di molluschi terrestri e di acqua dolce, denti di cavallo e di bove, rottami di stoviglie rozze, fusaiuole, armi di bronzo, ed oggetti dei tempi storici. Masse di pietra spugna, e

([1]) Le acque dei canali corrono per lunghi tratti con forte velocità; è incalcolabile quanto profitto si può ritrarre da tanta forza finora perduta.

([2]) Nella Sabina si conservano varie costumanze antiche: caratteristiche sono le feste del 12 maggio sul monte S. Pancrazio, e del 29 settembre alla grotta di S. Michele presso la Rocca di Tancia. Il contadino sabino incontrato per via saluta colle parole *allegri, lesti.*

tufi alabastrini delle Marmore. Travertini. Tufi leucitici. Ceneri bigie leucitiche; ceneri rosso-caffè con pirosseni e minuti frammenti di sanidino, con pezzetti di pomice felspatica, qualche volta riunite in masse omogenee, per lo più alternate o mescolate a ghiaie rotolate, e più spesso a scaglie angolose di calcari e di selci.

2. Banchi di ghiaie rotolate e discoidali, spesso cementate, sabbie gialle anch'esse a volte cementate, marne, banchi di lignite. — Ad occidente del monte Gennaro, del monte di Fara, e dei monti di Narni e di Amelia le masse contengono reliquie di organismi marini, e salmastri; ad oriente organismi terrestri e di acqua dolce o leggermente salmastra.

3. Breccie, brecciole, calcari screziati, arenarie. — Le breccie e le brecciole si mostrano composte di quarzo e di serpentina, le arenarie sono ricche di mica bianca. Veramente le breccie mancano nel territorio di Terni e di Rieti, ma se ne trovano abbondanti nella prosecuzione al nord delle masse. Le brecciole di Lugnola e di Antrodoco hanno gli elementi del quarzo e della serpentina grossi anche tre o quattro millimetri.

4. Schisti marnosi bigi, alternati con calcari duri e capaci di pulimento, a frattura sublamellare, color caffè e latte più o meno scuro. Contengono fucoidi e nel proseguimento della formazione al sud vi si trovano strati con organismi marini.

5. Schisti marnosi bigi, rossi, verdi: alternano con calcari degli stessi colori, con pietra paesina, con brecciole e calcari zeppi di nummoliti. — La pietra paesina, ed i calcari non sono rappresentati nei pochi lembi della formazione esistente nel territorio, ma abbondano esternamente a nord e ad ovest.

6. Schisti marnosi bigi, rosei, verdicci con traccie di fucoidi. Nella massa degli schisti bigi, sopra Poggio Fidoni, ho trovati intercalati alcuni strati di roccia calcarea giallo rossigna a struttura granulosa. Gli schisti verdi di Cantalice sono ricchi di foraminifere. La formazione abbonda di preferenza nelle sinclinali: Valle del Serra e della Maroggia, Valle della Laja di Finocchieto, altipiano di Rieti, Valnerina tra Arrone e Ferentillo.

7. Calcari a frattura compatta e concoidale, di color bianco, bigio chiaro, rosso con tutte le sfumature dal carnicino al roseo, al rosso mattone, al rosso viola scuro. A volte durissimi e capaci di buon pulimento, a volte alquanto terrosi. Sono sparsi di piccolissimi puntini o lineette, ed abbondano di nuclei e strati limitati di selce rossa. Generalmente poveri di reliquie di molluschi, e più specialmente nel territorio di Rieti e Terni. Nella massa, procedendo verso il sud, sono intercalati alcuni strati di calcari duri, bianchi, i quali nel monte sopra Stroncone presentano struttura oolitica; nel monte di Tripozzo in Valnerina, nei colli di Labro, nei monti del Corno, presso Poggio Fidoni, sul monte Calvo presso Scandriglia, struttura cristallina e frattura somigliante a quella delle quarziti. Questa massa nel gruppo del Cicolano è sostituita da straterelli di calcari duri, rossi e bigi, a frattura sublamellare; ai quali si sovrappongono calcari bianchi, a frattura ceroide, schisti marnosi bigi, strati di calcari bianchi a struttura oolitica, e banchi di calcari ippuritici [1].

[1] Il conte Toni di Spoleto ha un'ippurite raccolta nel letto del torrente Tissino, quindi devono esistere banchi ippuritici su quei monti. Io non ne ho trovati mai nell'Apennino mesozoico settentrionale, invece li ho trovati sviluppatissimi in sostituzione dei calcari rosati della valle del

8. Schisti marnosi in lamine sottili, bigi, rossi, verdi, neri, con traccie di fucoidi. Contengono molti grossi nuclei di pirite.

9. Calcari zeppi di fucoidi color bigio scuro, le quali macchiano la roccia come un bardiglio. Molto sviluppati nel Catria e nel Penna, si proseguono anche nei monti di Terni. Nel Catria e nel Penna contengono abbondanti traccie di ammoniti e di belemmiti.

10. Calcari giallicci a frattura compatta e concoide, con suture pieghettate: sopra Cottanello ho trovato nella formazione qualche strato di roccia a struttura granulare color ruggine, in Valnerina strati di brecciole con piccoli elementi bianchi e rosso mattone. La massa contiene frequenti nuclei di selce bigia; invece nelle montagne del Corno e del Terminillo le selci sono color roseo. Al basso i calcari divengono di struttura schistosa, e sul Catria e sul Penna, nelle montagne del Corno, tra le lamine presentano abbondanza di piccole ammoniti e di aptichi; sono ricchi di strati di selce bigia, adoperata nel Penna per fabbricare macine. Nel territorio di Rieti e di Terni le traccie di fossili sono meno abbondanti; ho raccolti nei monti di Cesi alcuni pezzi della roccia con impronte di piccole ammoniti tinte di verde. Nelle adiacenze di Terni spesso ho trovati i calcari giallicci con macchie irregolari ruggine chiaro, nel territorio di Rieti ne ho trovati macchiati di venature rosee e carnicine.

11. Schisti selciosi verdi, rossi ed a volte color ruggine, divisi in strati di poco spessore, colle superficie generalmente bitorzolate, zeppi di ammoniti, aptichi, belemmiti [1]. Schisti rossi con ammoniti, calcari a frattura compatta e concoidale, pezzati di rosso e di bigio con ammoniti. — Spesso la distribuzione delle tre zone appare confusa, e le grandi masse di sgretolamento, che accompagnano la formazione, rendono più difficile il riconoscere i piani di divisione. Alle Caldarelle presso Cesi ho veduta la seguente distribuzione: 1ª zona di schisti rossi e verdi con fucoidi zeppa di ammoniti; 2ª sopra zona di calcari bigi a volte spezzati di rosso con selci rosse, alternate con straterelli schistosi rossi e verdi; 3ª sopra zona di schisti selciosi. Dalla zona degli schisti rossi, a contatto col Lias medio, sono estratte generalmente le celebri ammoniti di Cesi.

12. Calcari marnosi di colore bigio per lo più chiaro, a frattura concoide, con qualche straterello marnoso interposto, con nuclei di selce bigia, ricchi di ammoniti, belemmiti, fucoidi, e con qualche reliquia di brachiopodi. In questi per lo più le ammoniti, le belemmiti, le fucoidi sono trasformati in limonite. Nell'interno degli strati sono interclusi piccoli nuclei di pirite.

13. Massa variata di strati ricchi di brachiopodi e di coralli, nei quali ho anche trovata qualche Ammonite. Per caratteri esterni alcuni sono eguali a quelli della massa precedente, altri sono più compatti ed in questi spesso il colore tende al carnicino. Ve ne sono di color rosso vinoso, con intercluse macchie più chiare

Velino da Antrodoco fino al lago di Fucino. Nei saggi raccolti su questa regione il prof. Pirona ha riconosciuto due specie di *Radiolites*, una specie di *Sphaerulites*, ed una valva superiore probabilmente di *Caprina*.

(1) Nel monte Cetona (Valdichiana) ho notato che sopra al rosso ammonitico posa una massa composta di schisti marnosi varicolori e di ftaniti pure varicolori. Questa sostituisce gli schisti selciosi con aptichi. Ho trovate le ftaniti anche nel monte Malbe presso Perugia.

che hanno l'apparenza di ghiaiette (Porteria); di color bigio piombo a frattura concoide; dello stesso colore a frattura sublamellare (monti di Amelia); di color rossiccio a frattura sublamellare (Ferentillo); di color viola rossiccio a frattura scagliosa. A questa massa appartengono strati di roccie, composte di particelle di calcari bianchi e di lamelle di marna verdiccia, contenenti brachiopodi e gasteropodi. Questi strati hanno struttura brecciforme, a volte granulosa. Vi ho trovata a Papigno una impronta di ammonite. La massa è generalmente povera di selci.

14. Calcari generalmente bianco-nivei e qualche volta di color bigio, a frattura ceroide oppure oolitica, assolutamente privi di selci, di carattere uniforme su tutto l'Apennino, dal Catria al monte Gennaro. Questa massa è spesso ricca di coralli, e, dai segni lasciati sulla superficie degli strati dalla corrosione meteorica, appare ricca di molluschi: però è difficilissima la estrazione dei fossili. È da notare che nel luogo dove ho potuto fare la miglior raccolta di fossili (Penna di S. Andrea presso Cesi), ho trovato le reliquie organiche fasciate da involucri calcarei; ivi la massa si disfa in tante pisoliti.

15. Dolomie. Non ho potuto ben precisarne la posizione stratigrafica per le difficoltà locali, ma probabilmente sotto la massa precedente stanno i calcari dolomitici e le dolomie a struttura saccaroide di Amelia, del monte della Cicuta, di Antrodoco, della valle della Meta sotto al Terminillo.

Accennati gli accidenti di struttura, le varietà della frattura, delle proprietà fisiche, e dei minerali associati, per le roccie le quali compongono le diverse formazioni del territorio, interessa notare le differenze principali che si osservano nelle medesime, assoggettate all'azione meteorica o di altre forze esterne.

La decomposizione dei calcari rosati (massa 7ª), dei calcari giallicci (massa 10ª), produce terriccio nero; la decomposizione delle masse 12ª, 13ª, 14ª produce terriccio color rosso mattone, rosso bruno, ruggine. Però qualche volta si vede anche la massa 14ª decomporsi in terriccio nero (Terminillo), e qualche volta ho osservato il gialliccio della massa 10ª decomporsi in terra rossa (Poggio di Apuleggia ecc.).

Gl'infiniti contorcimenti sofferti hanno fratturate e sgretolate le roccie in differenti maniere, dipendentemente dalla proprietà delle medesime.

I calcari rosati si sono spezzati ed i frammenti, rilegati da belle vene spatiche, possono essere bene adoperati per marmi brecciati. Gli schisti varicolori loro sottoposti, nei luoghi dove hanno subìto gagliarde compressioni, si sono schiacciati, ed induriti; colle varietà di colore presentano delle roccie pezzate di rosso, di verde, di bigio chiaro o scuro, traversate da vene spatiche. I calcari giallicci sono pur essi rilegati da vene spatiche nelle spezzature, e più mostrano a volte efflorescenze dendritiche. Quelle roccie sono molto sgretolate nei piani di scorrimento, e le scaglie sono cementate grossolanamente. Spesso, tra la roccia del gialliccio allo stato naturale e la formazione immediatamente sottoposta, si ha una larga zona di quelle breccie. Maggiore che nel calcare gialliccio è lo sgretolamento degli schisti selciosi: raro è il caso di trovare questa massa senza una estesa zona di scaglie lamellari; però i detriti sono quasi sempre sciolti, o al più rilegati da cemento di pochissima presa. Le roccie con organismi limonitici pello sgretolamento assomigliano agli schisti selciosi; però

difficilmente presentano le grandi masse di scaglie come questi, forse perchè l'azione meteorica facilmente ne ha decomposto il tritume. Gli strati della formazione descritta al n. 13, per quanto siano stati torturati, e quindi spezzati, conservano bene apparenti le linee della stratificazione. L'azione meteorica e delle acque ne stacca dei frammenti angolosi, dei quali si trovano grandi scarpate sulle chine delle montagne. Egualmente si staccano pezzi angolosi più o meno grossi dalla massa dei calcari bianchi a frattura ceroide privi di selci: ma quei pezzi facilmente si arrotondano negli spigoli anche prima che le acque li rotolino a distanza dalle frane. Questi ultimi calcari meno di tutti gli altri si sono mostrati elastici nell' obbedire alle forze che li hanno raddrizzati, e per lo più si trovano fratturati in modo da rendere molto difficile il riconoscere la direzione degli strati. Parrebbero quasi nuclei massicci, colle linee di divisione dovute al clivaggio; però le divisioni degli strati sono ben distinte nei luoghi dove la roccia è stata meno tormentata. Generalmente negli strati spezzati, che espongono le testate all'azione atmosferica, il calcare si presenta d'aspetto cariato.

Per la prima e seconda massa di formazioni citeremo i fossili man mano nella descrizione della loro giacitura, essendochè gli organismi raccoltivi siano di aiuto per dimostrare le cause, per le quali contemporaneamente si componevano roccie di genesi differente nei varî luoghi del territorio. Intanto per l'ordine di esposizione si può stabilire che la prima massa di formazioni appartiene all'epoca quaternaria, la seconda al periodo pliocenico dell'epoca terziaria.

Nel territorio di Terni e di Rieti non ho potuto raccogliere fossili determinabili delle formazioni terza e quarta. Però nelle breccie e nei calcari screziati del subapennino perugino, alle quali per tutti i caratteri si rassomigliano i piccoli lembi di brecciole e di arenarie di Antrodoco e di Lugnola, anni addietro, nell'alta valle del Tevere trovai le specie:

Pecten latissimus Br.	*Pecten solarium* Lk.
» *dubius* L.	*Ostrea plicatula* Desh.
» *Besseri* Hörn.	*Echinolampas depressa* Ag.

oltre ad alcune cellepore e molti resti di briozoi.

A Schifanoia vicino Gualdo Tadino, in un banco di grossa breccia con serpentina contenuto tra le arenarie, trovai ostriche e pettini, i quali il dott. Foresti mi scrive che gli sembra si debbano riferire al *Pecten scabrellus* Lk. Per la composizione delle roccie, per i loro fossili il prof. Taramelli mi ha esternato il parere che la formazione appartenga al periodo oligocenico. I calcari con fucoidi per i caratteri sembrano identici a quelli di Ferentino nella valle del Sacco, e questa formazione proseguendo verso la valle dell' Aniene, si rilega quasi senza interruzione alle calcaree con pettini di Oricola e Subiaco. Inviati anche quei saggi al dott. Foresti, mi scrive che ha trovate le impronte dei pettini di quasi impossibile determinazione, ma che in uno sembragli riconoscere il *P. scabrellus*. La disposizione stratigrafica, ed i caratteri della roccia fanno supporre, che anche questa formazione appartenga al periodo oligocenico.

Le roccie nummulitiche contenute nel territorio descritto dalla Memoria sono lembi isolati, senza altre formazioni che li coprano. Però per i caratteri dei depositi

sono perfettamente eguali alle formazioni, che nell'Apennino dell'alto Tevere e nella Val di Chiana, stanno immediatamente sottoposte alle brecciole con elementi di serpentina, ed alle arenarie psammitiche.

Esaminati i campioni delle roccie del territorio dal dott. A. Negri di Padova, ha riscontrato nel nummulitico dei colli di Carpiglione e Schiazze le specie seguenti:

Nummulites striata — *Nummulites contorta*
» *lucasana* — » *variolaria* (?)

più abbondante la prima; nel nummulitico del Monte Calvo le specie:

Nummulites variolaria — *Nummulites Héberti* (?).

Con questa formazione terminano i depositi terziari distribuiti saltuariamente: vengono adesso le masse mesozoiche, tutte stratificate con regolare concordanza.

Nei calcari rosati della massa 7ª il prof. Pantanelli ha notato il genere *Atavophragmium* cretaceo; nei saggi delle formazioni descritte al n. 10, il dott. Parona riconobbe le specie:

Phylloceras Kocki Opp. (?) — *Perisphinctes contiguus* Cat.
Lytoceras quadrisulcatum D'Orb. — *Aspidoceras* cfr. *Uhlandi* Opp.
» *montanum* Opp. — *Aptychus* cfr. *Beyrichi* Opp.
Oppelia sp.

in base alle quali ha creduto riferire la massa al titonico.

Dallo studio dello stesso dott. Parona, sui fossili che vi ho raccolti, annesso alla Monografia, risulta che i calcari e schisti del n. 11 appartengono al lias superiore, quelli dei n. 12, 13 al lias medio, e finalmente i calcari del n. 14 al lias inferiore [1]. Dai fossili trovati dall'ing. Segré e dal Canevari, sembra che le dolomie siano sottoposte ed appartengano al trias superiore.

Pertanto, secondo i tempi geologici, le formazioni delle conche di Terni e di Rieti, a partire dalle più profonde, si dividono nella seguente serie [2]:

[1] Nel monte di Cetona e nel monte Malbe presso Perugia ho trovate masse di calcari grigio scuri e neri con odore bituminoso, che forse sostituiscono i calcari della massa n. 14 ivi mancante. Forse i gessi del M. Malbe appartengono al trias. Anche nel monte Cetona si ha la dolomite saccaroide, però mi sembra interclusa nel lias medio.

[2] La sezione delle valli del Sentino e dell'Esino, presentata per le escursioni della Società Geologica nei dintorni di Fabriano (settembre 1883) porta la seguente classificazione dei terreni mesozoici:

(*a*) Creta superiore — Calcari bianchi e rossi (scaglia); (*b*) Creta media — Schisti varicolori a fucoidi; (*c*) Creta inferiore (neocomiano) — Calcare bianco con vene spatiche; (*d*) Giura superiore (titoniano) — Calcare bianco-giallastro, verdastro; (*e*) Giura inferiore (piano ad aptichi) — Schisti verdognoli e rossastri; (*f*) Lias superiore — Calcare rosso e giallastro, marne rosse; (*g*) Lias medio — Calcare marmoreo a macchie ferruginose; (*h*) Lias inferiore — Calcare semiceroide, oolitico, cavernoso; (*i*) Trias — Calcare come sopra, distinto per epoca dalla presenza della *Giroporella*.

Trattandosi di formazioni comprese nello stesso sistema, reputo necessario spiegare i motivi di alcune differenze che si trovano tra la divisione dei terreni premessa, e quella che adottai per lo studio delle conche di Terni e di Rieti.

1° Per il motivo che dirò appresso, ho comprese nella creta le sole zone (*a*), (*b*), suddividendo però la zona (*a*) in due, cioè in veri calcari compatti, ed in calcari schistosi. La massa dei calcari schistosi si vede anche nel territorio di Fabriano, e lungo il versante occidentale di quell'Apennino.

2° Le masse (*c*), (*d*) dell'Apennino del Chiascio m'hanno presentata la sola differenza di

Lias inferiore = Calcari bianchi a frattura ceroide ed oolitica privi di selci. Dolomie (forse del trias).

Lias medio = Calcari rossicci, violetti, carnicini, bigi, bianchi, a frattura compatta e concoide, o sublamellare con alcune selci bigie. — Calcari marnosi bigi con fossili limonitici e molte selci bigie.

Lias superiore = Calcari pezzati rossi e bigi, e schisti rossi con ammoniti. — Schisti selciosi rossi e verdi con ammoniti ed aptichi.

Titonico = Calcari giallicci schistosi e compatti con selci bigie o rosee con ammoniti ed aptichi.

Cretaceo = Calcari pseudo-bardigli. — Schisti varicolori inferiori. — Calcari rosati e bianchi con selci rosse. — Calcari bianchi a struttura oolitica o cristallina. — Calcari ippuritici. — Schisti varicolori superiori.

Eocene superiore = Schisti e calcari varicolori. — Calcari e breccie nummulitiche.

Oligocene = Calcari compatti con fucoidi. — Schisti bigi. — Calcari screziati. — Brecciole con elementi serpentinosi. — Arenarie psammitiche.

Pliocene = Banchi alluvionali. — Sabbie gialle. — Marne. — Ligniti.

Quaternario = Banchi alluvionali. — Sabbie gialle. — Marne. — Terre rosse. — Calcari concrezionari. — Lave, tufi vulcanici, ceneri vulcaniche. — Torbe.

2. Disposizione stratigrafica delle formazioni mesozoiche.

Sbozzata la carta delle formazioni mesozoiche dell' Apennino umbro ed abruzzese, cogli appunti raccolti nei viaggi intrapresi per formarmi un' idea generale di quelle masse, noto i seguenti fatti principali.

trovare fossili abbondanti negli strati inferiori e più nulla negli strati superiori. Nella Valnerina neanche ho potuto più fare tale distinzione, perchè la massa si presenta omogenea dal contatto degli schisti selciosi a quello degli strati (*b*). Non poteva quindi risultarmi alcuna divisione naturale, e solo per convenzione avrei riferita la zona a due epoche distinte. Così quello che è chiamato *titonico* nella Memoria, comprende il *titonico* ed il *neocomiano* secondo il profilo citato.

3° Ho abbracciato in un piano le zone (*e*), (*f*). Queste formazioni sono distinte l'una dall'altra per struttura, e per distribuzione di fossili. Nella zona (*f*) abbondano le Ammoniti, e sono scarsi gli Aptichi; nella zona (*e*) sono più scarse le Ammoniti e più fitti gli Aptichi. Però le specie delle Ammoniti sono eguali nelle due zone. Partendo dal dato, che è convenuto chiamare lias superiore la zona (*f*), non mi parve logico portare la zona (*e*) ad altra epoca, in quantochè mi sembra che completi un periodo di evoluzione delle oscillazioni dei mari mesozoici, terminando la oscillazione ascendente, incominciata durante la deposizione dei calcari superiori del lias medio. La diminuzione sempre crescente delle Ammoniti, la presenza sempre crescente delle Ammoniti frammentate, l'aumento degli Aptichi mi pare che indichino un fondo marino che diveniva sempre più soggetto all'azione dell'onda, per la quale erano distrutti i gusci delle Ammoniti, ed isolate le loro parti organiche.

4° Quando presentai la Memoria non m'era occorso di notare la distinzione della zona triasica; nella correzione delle stampe ho curato accennare le masse più presumibilmente triasiche, perchè il lettore possa formarsi l'idea del loro affioramento.

Riguardo al modo come è disegnata la carta, devo avvertire che, affine di adattarla allo scopo speciale della Memoria, cioè a dimostrare le trasformazioni oro-idrografiche del territorio studiato, a somiglianza del modo come si regola il pittore di paesaggi, ho cercato di evitare il tritume, e far risaltare le linee caratteristiche delle formazioni.

1. I rilievi mesozoici non solamente decrescono di altitudine procedendo dalla cresta dell'Apennino verso la valle del Tevere, dove si perdono sotto i depositi terziari e quaternari, ma tracciato un asse dalla cresta dell'Apennino alla valle del Tevere, che passi per l'altipiano di Rieti, al nord-ovest dell'asse si vedono i monti secondari, seppellirsi sotto le roccie terziarie; al sud-est delle masse secondarie si trovano le più recenti, cioè le cretacee: invece al centro, sulle anticlinali, prevalgono le roccie liasiche.

2. Nella regione superiore dell'Apennino due grandi sinclinali, colla proiezione orizzontale curvilinea, la cui concavità è volta verso oriente, fasciano il sistema dal nord al sud. La prima di quelle sinclinali (che chiamerò longitudinali) è chiusa dai monti della Sibilla e del Gran Sasso ad oriente, ad occidente dai monti Femma, Aspro, Coscerno, della Pelosa, Terminillo, Velino: si estende da Visso a Norcia, Leonessa, la Posta, Borbona, alla Valle dell'Aterno. La seconda sinclinale è compresa tra i monti ultimi nominati ad oriente, e tra i monti Pennino, Maggiore, Fionchi, S. Angelo, Gennaro, Autore, Viglio ad occidente. Dall'altipiano di Colfiorito passa per la Valnerina tra Triponzo e Ferentillo, dipoi per la forca dell'Arrone (543^m) entra nell'altipiano di Rieti, da dove prosegue al bacino del Fucino (tav. III) (1).

3. La catena mesozoica, la quale termina il sistema dalla parte della valle del Tevere, formata dai monti Umbri di Orvieto, Amelia, Narni; dai monti Sabini, Porco Morto, Acuto, Gennaro, nel rilievo presenta una grande anticlinale longitudinale colle roccie liasiche al centro, le cretacee alle estremità (monti di Civitella de' Pazzi e Peglia al nord, monte Spaccato presso Tivoli al sud): nella proiezione orizzontale disegna una curva colla concavità verso occidente, ossia in senso opposto alla concavità delle altre anticlinali a proiezione orizzontale curvilinea.

4. Da questa disposizione di anticlinali, le cui proiezioni orizzontali sono incurvate in senso opposto, nascono varie sinclinali coniche, i cui vertici si raggruppano al centro di curvatura dei rilievi, e precisamente tra le conche di Rieti e di Terni. Le principali sono: la sinclinale conica, la quale nasce a Rocca S. Zenone nella valle del torrente Serra, tra il monte Fionchi ed il monte di Appecano, e si allarga verso la pianura di Spoleto; la sinclinale conica, la quale nasce tra i monti Porco Morto e Cascia, e si allarga tra i monti Martani e gli Amerini.

5. Oltre alle sinclinali longitudinali, ne abbiamo altre trasversali, irradianti dalla cresta dell'Apennino verso il perimetro. Tra le principali noto: quella che comprende l'altipiano di Colfiorito tra i monti Pennino e Cavallo, passa tra il monte Subasio ed il monte Maggiore, tra il monte Malbe ed il monte Peglia; la sinclinale tra i monti Aspro e Coscerno, la quale, dopo le selle tra i monti Maggiore e Fionchi, tra i monti Martano e Torre Maggiore s' incrocia colle altre nella valle Umbra e nella Tiberina sopra alla stretta di Todi; la sinclinale tra la vetta della Pelosa e Cima d'Arme, la quale passa per la conca di Terni e per la gola di Narni; la sinclinale

(1) La prima delle sinclinali longitudinali seguita al di là di Visso, colla valle di Fabriano, compresa tra i monti Pennino, della Penna, Cucco, Catria ad occidente ed i monti San Vicino, Serra S. Quirico, della Rossa ad oriente. A Visso la sinclinale cambia direzione, e si allinea verso nord-ovest.

tra Cima d'Arme ed il Terminillo, la quale, traversando la conca di Rieti prosegue a Nerola.

I fatti sopra riepilogati presentano adunque la massa secondaria dell'Apennino umbro ed abruzzese increspata in una serie di anticlinali e di sinclinali longitudinali e trasversali; disposta secondo una grande anticlinale il cui asse passa per il territorio di Terni e di Rieti; inclinata da oriente verso occidente; infine incurvata in senso opposto ad oriente e ad occidente, in modo da restarne come schiacciata la porzione centrale. Vedremo adesso come, per tante piegature, sono disposti gli strati mesozoici nel territorio che è il soggetto di questa Memoria [1].

Catena di Narni e di Amelia.

(Prof. I-X)

Le montagne di Narni incominciano al sud con due acute anticlinali di calcari corallini del lias inferiore, disposte colle curvature normali alla direzione della catena, le quali colle volte spezzate costituiscono le creste del monte s. Benedetto (642) e del monte Cascia (1118). Il ramo ovest dell' anticlinale di s. Benedetto si perde sotto le colline della valle del Tevere; quello est del monte Cascia presenta una testata tronca all'estremità sud-ovest; dopo quella testata al basso, presso Configni, è coperto da una stretta zona composta dagli strati del lias medio e superiore (535), del titonico, della creta. Tra le due anticlinali una sinclinale conica, col vertice al monte s. Pancrazio e la base al monte delle Rocchette, mostra, sopra alla concavità degli strati del lias inferiore, i calcari bigi marnosi del lias medio, i calcari e gli schisti rossi e verdi del lias superiore, i giallicci del titonico, gli schisti varicolori ed i calcari rosati della creta.

Riunite le anticlinali di s. Benedetto e del monte Cascia al monte s. Pancrazio (1026), gli strati del lias inferiore abbracciano la montagna con una sola curva, e la massa, increspandosi di tratto in tratto, s' inclina verso il nord. Il vertice della curva all'altezza di s. Urbano (636) perde le asperità prodotte dalle spezzature degli strati estradossali del lias inferiore, il suo dorso si spiana. Da quel punto fino a Narni, ad ovest generalmente rimangono scoperte le roccie del lias inferiore, mentre ad est si distende una zona di strati del lias medio, con saltuari lembi di rosso ammonitico e di schisti selciosi verdi con aptichi del lias superiore a Vasciano, s. Urbano, s. Niccolò, Moretti, Caprile, Rocca di Narni. Gli schisti varicolori ed i calcari rosati della creta, sotto ai quali di tratto in tratto si mostra il gialliccio titonico, da Configni a Narni, formano la pendice orientale cogli strati inclinati verso

[1] Nella lettura sulle *Valli antiche e moderne dell'Umbria* fatta l'agosto del 1879 al XII Congresso Alpino in Perugia, e pubblicata il 1880 nei numeri 1-2 del Bollettino del r. Comitato geologico, non avendo ancora studiata la disposizione stratigrafica dei terreni secondari, e basando le induzioni sulle manifestazioni vulcaniche, supposi che le catene montuose del subapennino umbro fossero dovute alla fratturazione della crosta terrestre secondo linee parallele all' Apennino. Adesso ad esame completo mi risulta che le catene mesozoiche sono tante anticlinali d' un sistema di ondulazioni, le cui sinclinali sono rappresentate dalle valli. Questa condizione però mi pare che non si verifichi egualmente sempre nelle catene formate dalle roccie terziarie.

la valle di Lugnola. Invece ad ovest il lias inferiore seguita a perdersi sotto il terziario, eccettuate alcune increspature tra il Poggiolo e Schifanoia, nei cui seni troviamo i calcari bigi con selci, i calcari e gli schisti marnosi con fucoidi del lias medio.

La Nera divide le montagne di Narni da quelle di Amelia con una stretta gola, della quale è necessario descrivere minutamente le particolarità stratigrafiche perchè di molta importanza negli avvenimenti storici del territorio. La gola incomincia all'altitudine di 93^{m} tra le rupi di Narni (232), e di s. Casciano, composte dai calcari del lias inferiore, con davanti pochi strati di lias medio. Dopo s. Casciano, a destra del fiume, una zona di schisti e calcari della creta si prolunga fino a Stifone, interrotta per breve tratto dalle rupi liasiche del Santuario. Sulla sinistra abbiamo prima il gialliccio titonico molto sgretolato, poi (in corrispondenza delle rupi del Santuario) altre rupi di lias inferiore, davanti alle quali una scarpata di detrito di sassi e terre. Dopo quella interruzione si ritrova il gialliccio imbasato su schisti verdi selciosi contenenti Aptichi, poi una seconda scarpa di detriti eguali alla prima, appoggiata ad altre rupi liasiche fino al torrente di Recentino. Dopo il torrente le roccie cretacee coprono la pendice del monte di Taizzano fino a Stifone. Gli strati del lias superiore, del titonico, della creta sono incurvati secondo la concavità della valle. La valle è chiusa a Stifone tra le rupi di lias inferiore del monte di Taizzano (417) e di Santa Croce (457). Quei calcari, dopo aver formata a Stifone un'erta anticlinale, col piano della curva parallelo alla direzione del fiume, si ripiegano, ed in una corta increspatura sono coperti dai calcari bigi e rossicci del lias medio, per rialzarsi poco dopo a formare altre rupi a destra e sinistra all'altezza di Labriano.

Il torrente, che sbocca sulla Nera a Recentino, divide il monte di Taizzano dalla catena di Narni con una gola aperta tra gli strati del lias inferiore, la quale nel punto di displuvio, alla Madonna Scoperta ha l'altitudine di 240 metri.

A Recentino surgono fonti minerali. Tre grosse sorgenti d'acqua, adoperate per forza motrice, escono dal monte di Taizzano tra Recentino e Stifone: l'ultima, quella di Stifone, surge tra gli strati raddrizzati del lias inferiore.

Sopra agli schisti ed ai calcari della creta, a destra della Nera, spiccano le rupi liasiche del monte Santa Croce. Dietro quelle rupi gli strati del lias inferiore piegano a nord, ed in una increspatura tra il detto monte e colle Rosetto, sono coperti dal lias medio e superiore, dal titonico e da poco cretaceo inclinati verso nord-ovest. Diviso dal monte Arnata dalla gola, per la quale passa la strada provinciale Narni-Amelia (276), coperta da sabbie terziarie, colle Rosetto presenta il collegamento delle roccie del lias inferiore del monte Santa Croce colla catena di Amelia. In quella gola difatti a destra e sinistra si hanno le testate tronche di quei calcari, i quali, salendo il monte Arnata, si trovano fino alla altitudine di 519^{m} piegati a destra e sinistra, e da tutte due le parti coperti dal lias medio. Come si vede, per lo più nelle anticlinali dove è scoperto il lias inferiore, gli strati superiori della curva sono spezzati. Dopo quella cresta il monte Arnata è coperto dal lias medio fino alla cima (549), e là mostra a nord una testata di lias inferiore. Scendendo verso la Foce, una corta increspatura contiene il lias superiore, e qualche poco di titonico e di creta.

La Foce è su una scogliera di lias inferiore, gli strati del quale sono scoperti per un gran tratto ad occidente della catena. Lungo la strada tra Amelia e Narni si vedono quegli strati inclinati verso sud-ovest, perdersi sotto le formazioni terziarie.

Le masse del lias inferiore e del medio, col monte Piano Napi da una parte, e col monte Piglio ed il monte Arnata dall'altra, formano due anticlinali, le quali si riuniscono al monte Arnata, dove cogli strati interni delle anticlinali è generata, mediante una curva conica concava, la valle del torrente delle Macchie. In questa valle si completa la serie mesozoica col lias superiore, col titonico e col cretaceo. Oltre alla gola tra il colle Rosetto ed il monte Arnata, il sistema è tagliato trasversalmente dalle gole della Foce e del Fiume grande.

Monte Gennaro — Monte di Fara — Catena da Poggio Mirteto alle Marmore. (Prof. I)

La direzione della catena dei monti di Narni ed Amelia converge con angolo inferiore ai 45° verso quella, che da Poggio Mirteto si prolunga al monte delle Marmore, e questa si allinea al sud col monte di Fara e col monte Gennaro.

La pendice ovest del monte Gennaro è composta dagli strati del lias inferiore, i quali da Moricone ascendono verso la cima del monte, e poi discendono verso Tivoli. La massa del monte Gennaro ha di più inclinazione generale verso oriente; perciò nel versante orientale e nelle pendici al nord e al sud si trovano i calcari del lias medio, il rosso ammonitico e gli schisti selciosi con aptichi del lias superiore, il gialliccio del titonico, gli schisti varicolori, i calcari rosati e cristallini, i calcari ippuritici della creta. Nella porzione di territorio di quella montagna, la quale è disegnata sulla carta, tra Montorio Romano e Nerola, abbiamo il lias medio e superiore, il titonico, il cretaceo formanti una anticlinale tra la valle del Tevere e la valletta interposta tra Nerola e Scandriglia, mentre la massa da Montorio inclina verso Nerola. Dopo questa anticlinale, una seconda è presentata dal monte Sara Popolo, sopra Scandriglia, composta da un nucleo titonico, con ai fianchi gli schisti della creta, e davanti nel monte Calvo (661) questi schisti ed i calcari rosati e cristallini. Una terza ondulazione delle stesse masse dà la sinclinale della valle del Turano.

Davanti Nerola, dopo un tratto di alluvioni terziarie imbasate sul titonico, s'alza il gruppo di Fara colle masse inclinate verso sud-est e formanti un' anticlinale sul dorso del monte. Per tale disposizione, dal nord verso il sud, si ha prima una curva di lias inferiore, e sopra questa una di lias medio; poi, una zona di lias superiore, ed infine una di titonico, la quale alla Toffia presenta gli strati fortissimamente raddrizzati. Un increspamento della massa titonica dopo Carpiglione fa affiorare gli schisti selciosi del lias superiore, a' piedi dei calcari cretacei del monte Calvo ([1]).

([1]) Il Prof. Tuccimei ha descritto il monte di Fara (Bollettino della Soc. Geol. It. Anno II, fasc. I). Mi sembra che il lias superiore, esistente sul versante dalla parte del Tevere, sia un piccolo lembo rimasto compreso nell'accartocciamento degli strati; lembo che a mio parere doveva riunirsi, passando sopra al monte alla zona del lias superiore esistente nel versante opposto. Mi pare tanto più probabile un profilo tracciato in questo senso, in quantochè la stratificazione dei calcari della Toffia collegata con quella dei calcari del monte degli Elci e di Nerola me li fa ritenere titonici, essendo sottoposti a Nerola direttamente ai calcari rosati. Per evitare complicazioni di linee, ho ommesso sulla carta il lembo sopra indicato.

La valle del Farfa, riempita di detriti terziari, separa per 5 chilometri il gruppo isolato di Fara dai monti di Poggio Mirteto. In complesso la catena da Poggio Mirteto alle Marmore è costituita da una anticlinale; nei particolari le formazioni si presentano coll'ordine seguente. Da Poggio Mirteto a Contigliano, sul dorso del monte abbiamo il lias superiore ed il titonico, il quale, sulla vetta di Costa Marchigiana o monte Acuto, si eleva all'altitudine di 1308^{m}. Ad est nella pendice il titonico è coperto dagli schisti varicolori e dai calcari rosati della creta. Ad occidente invece resta scoperta una grande estensione di calcari del lias medio, i quali in alcune increspature convesse, tra Rocca Antica ed Aspra, mostrano sottoposto il lias inferiore. In questo tratto, la catena è tagliata dal torrente che passa sotto la Rocca di Tancia e Rocca Antica. Copiose sorgenti scaturiscono dagli strati piegati col piano della curva parallelo alla direzione del torrente.

La curva, colla quale gli strati da ovest salgono il monte, per discenderlo ad est, è disturbata nel monte Porco Morto (1271). In quel monte ad occidente gli strati sono disposti secondo una curva avente il piano parallelo alla direzione della catena, sicchè tra Montasola e Cottanello presentano un'ampia testata tronca di calcari del lias inferiore e medio. Quella testata, avendo di fronte l'altra del monte Cascia, accenna un'antica unione tra le due catene oggi scomparsa.

Da Contigliano, o meglio dal monte Porco Morto alle Marmore, sembra quasi che s'inverta la disposizione delle roccie superiori al lias medio. Ad occidente si spiega una lunga zona di lias superiore, di titonico e di schisti e calcari della creta, i quali inclinano verso la valle di Lugnola, a compiere la sinclinale di quella valle, riunendosi agli strati cretacei dei monti di Narni. I calcari rosati si trovano in alto sulle pendici, particolarmente dalla parte dei monti di Stroncone, ed al basso della valle si hanno gli schisti varicolori superiori. Ad oriente la zona del lias superiore, del titonico e del cretaceo si trova molto più in basso che non a Contigliano, e termina a Repasto. Dopo Repasto fino alle Marmore la pendice è costituita dagli strati del lias medio, fortemente inclinati verso la valle del Velino. Oltre alle frequenti increspature, per le quali le masse sono continuamente pieghettate, tra Moggio e Stroncone l'anticlinale della montagna mostra l'estradosso della volta spaccato. Il punto culminante degli strati estradossali del lias inferiore spezzati è sulla divisione tra i due prati di Cimitelle, alla quota di 924^{m}. Diverse vallette, le quali per un certo periodo devono essere rimaste lacustri, sono racchiuse tra quelle spezzature di strati, cioè i prati di Cimitelle, Canepine, Stroncone [1]. Abbiamo poi altre vallette (prati di Cottanello) generate invece dalla corrosione delle testate degli schisti del lias superiore. L'altitudine delle vallette è in media di 800 metri. In conseguenza della grande ripidità della curva anticlinale, il lias inferiore affiora con strati spezzati da sotto al lias medio in diversi altri punti, cioè ai prati di Cottanello, dove le spezzature creano altre vallette adiacenti a quelle generate dalla causa precedentemente indicata; sulla cima dei monti di Greccia (1234^{m}), su quella del monte davanti Piediluco (772^{m}). Sulla pendice dei poggi di Miranda si trova anche scoperta una considerevole massa di lias inferiore,

[1] Sopra Stroncone tra gli strati liasici si trovano concrezioni limonitiche.

i cui strati inclinano verso la valle della Nera, probabilmente per scivolamento delle masse che lo coprivano. Infine il lias inferiore si vede sulle rupi del monte Sant'Angelo, delle quali si parlerà più particolarmente discorrendo del sistema della Cascata. Nel tratto tra la spezzatura trasversale ed il monte delle Marmore, cioè tra i prati di Cimitelle ed il detto monte, si trova scoperta una grande quantità di lias superiore.

Monte Varrone — Collinette isolate nell'altipiano di Rieti, Poggi di Piediluco.

(Prof. XI, XII)

Il monte Varrone, tra le valli del Turano e del Salto, è costrutto dal gialliccio titonico. Gli strati di questa formazione, sepolti davanti il monte Varrone dalle alluvioni terziarie, riaffiorano da sotto le alluvioni sulle ripe del Salto alle Grotte (500^{m}), alle Casette a' piedi del monte Belvedere, e s. Giovanni Reatino. Per l'allineamento, sembra che agl' increspamenti di quella massa appartengano le collinette isolate nell'altipiano di Rieti presso la confluenza del Salto e del Velino.

Nei poggi del sistema lacustre di Piediluco, separati dalla catena occidentale di Rieti per la valle del Velino, dalla parte del fiume gli strati hanno leggera tendenza a scendere nella valle, e mostrano le testate tronche. La massa è inclinata dal nord al sud; ad un suo insellamento è dovuta l'insenatura del lago di Ventina. Gli strati titonici, che compongono per la più gran parte i poggi di Piediluco, sono altresì inclinati verso oriente, e da quel lato la pendice est è coperta dagli schisti varicolori e dai calcari rosati della creta, i quali scendono nel lago, per risalire dipoi sulla catena opposta. Nella insenatura di Ventina il titonico si perde sotto quel laghettto, ed il cretaceo costituisce un piccolo argine di divisione tra i due laghi, elevato circa 11 metri sul loro livello.

Dopo il lago di Ventina gli strati del gialliccio salgono il monte Restano (605^{m}), il quale, per la disposizione delle masse ad innalzarsi verso il nord, è traversato da una fascia di lias superiore, e termina con una troncatura di strati del lias medio. Al di là del lago appare l'altra testata tronca delle formazioni, le quali dopo essersi ancora increspate, salgono sui poggi che chiudono al nord il sistema lacustre, per discendere poi nella valle della Nera. Ad est del monte Restano vi ha una insellatura coperta dalle roccie cretacee, e poi gli strati del titonico si ripiegano a costrurre con altra anticlinale il monte Caperno (538^{m}). Il monte Caperno, tronco al nord, al di là del lago si riallaccia col monte della Rocca di Piediluco (566^{m}), formando con quello una curva concentrica al sistema esterno, la quale oltre all'essere costrutta da una anticlinale di titonico (nel cui centro appaiono le roccie del lias superiore) tende a piegarsi verso le estremità, ossia dalla parte del lago di Ventina e dietro Piediluco, scendendo sotto gli schisti cretacei. Questi schisti, con i calcari della stessa epoca, chiudono il lago ad oriente, fino presso Madonna di Luce. Al sud una massa di roccie detritiche divide il monte Lungo dal sistema opposto, fasciando due alture mesozoiche, le quali si collegano con questo sistema.

Il Terminillo tra la valle del Velino e la valle Gelata.

Per poter mantenere il filo in un laberinto di curve, le quali, quanto più ci si accosta alla conca di Terni, tanto maggiormente si piegano, si contorcono, si raggrinzano, prima di parlare del come i monti sulla sinistra della Nera si riannodano ai monti della destra, mi sembra opportuno completare la descrizione delle montagne della valle del Velino. In queste montagne non si trova la semplicità di struttura delle due catene occidentali. La potenza delle pressioni laterali ha costrette le masse a tali piegature, da far sparire l'unità dell'anticlinale, interposta tra le sinclinali longitudinali degli altipiani di Rieti e di Leonessa.

Topograficamente il gruppo del Terminillo si può considerare per tre lati come isolato: dalla valle reatina ad ovest, dalla valle che dall'altipiano di Leonessa va alla Posta ad est, dal corso del Velino al sud: mentre al nord si collega alle adiacenti montagne del Corno, dalle quali è diviso per una sella elevata a 1556 metri. Considerata però la disposizione delle roccie, il Terminillo si stacca anche al nord dal gruppo adiacente per una gran sinclinale, ed in complesso si presenta come una grande cupola di lias inferiore, sulla quale, attorno attorno, il lias medio si dispone a guisa di mantello, scendendo rapidamente da tutte le parti. Il gialliccio titonico con selci rosee copre le regioni più elevate del gruppo, e sembra, almeno verso il culmine, addossato direttamente al lias inferiore e medio. Alla Posta ed a Sigillo si sovrappongono al titonico gli schisti ed i calcari rosati della creta, i quali proseguono verso la valle aquilana. Tra Città Ducale ed Antrodoco i terreni terziari nascondono la falda mesozoica, ed impediscono di conoscere quali rapporti passano tra quella e le masse ippuritiche al di là del Velino; però tutto concorre a far credere che, lungo la valle di Antrodoco, nelle formazioni si abbia un salto, salto che accenna a proseguire sulla valle del Farfa. Dal Terminillo sgorgano copiose fonti, le quali nelle magre alimentano quasi esclusivamente il Velino. Le fonti che surgono ad Antrodoco e Città Ducale sono solforose e ferruginose.

Lo sperone sopra Città Ducale presenta un declivio regolare, nel quale gli strati del lias medio scendono fino a perdersi nella valle del Velino: sul versante est si vede il titonico ed il lias superiore sopra al lias medio. Invece tra Lugnano e Lisciano, verso la fine della montagna, gli strati del lias medio cambiano inclinazione, e formano un'anticlinale, che si profonda coll'altro ramo rapidamente nella valle di Villa Traiana. In questo tratto, sotto al lias medio, appaiono scogliere di lias inferiore.

Il lias inferiore è al nudo nelle scogliere, le quali dominano la valle della Meta, e nelle scogliere lungo il Velino tra i monti di Campetto e di Cogito, le quali per la direzione degli strati, disposti in anticlinale parallela al corso del fiume, fanno indurre un antico legame tra il Terminillo ed il gruppo opposto, tagliato dalla corrosione dell'acqua, nelle vicende delle diverse oscillazioni del territorio.

Sullo sperone di Cantalice il lias medio, il lias superiore, il titonico s'inclinano rapidamente verso la valle Gelata, ossia verso il gruppo adiacente.

Larghi e profondi valloni solcano il gruppo del Terminillo in tutte le direzioni, e m'è sembrato che in genere taglino la massa, invece di essere generati dai suoi increspamenti.

Monti del Cicolano a sinistra del Velino.

A sinistra della valle del Velino, senza transazione che geologicamente lo leghi alle pendici del Terminillo, si eleva il gruppo del Cicolano composto di calcari a rudiste, sopraposti a strati sottili di calcari marmorei rossi e bigi. Questo gruppo compreso tra la gola della strada aquilana, la quale nel punto di displuvio a Rocca di Corno ha la quota di 1014 metri, e le formazioni terziarie della valle del Salto, presenta sopra quasi un altipiano con scogliere ed increspamenti, dai quali sono generate alcune vallette. La valletta del piano dei Rascini, quella dietro il monte Serra sono ancora in parte allo stato lacustre. La formazione ippuritica alla Serra di Vigliano, al colle Coppa, al monte Torrecane è inclinata verso la gola della strada aquilana; dalla parte del Velino gli strati sono inclinati verso questa valle. L'altitudine del piano dei Rascini e del Cornino è 1283 metri, quella dei poggi adiacenti è di circa 1400 metri. Sopra ai monti del Cicolano, tra Brusciano ed il lago dei Rascini, si trovano roccie bituminose.

Montagne del Corno e della Pelosa tra la valle Gelata e la Nera.
(Prof. III)

Sul contraforte del Terminillo, che da Cantalice sale al monte Leprino (1750), si vede il lias medio colla zona dei calcari a fossili limonitici scendere fortemente verso la valle Gelata. Giunti alla sella di displuvio (1556), sulla strada di Leonessa, appie' del monte Leprino, si trova il rosso ammonitico del lias superiore sovrapposto al lias medio con inclinazione verso nord, ed al lias superiore sovrapposto il titonico colla stessa inclinazione.

Da Cantalice a Leonessa gli schisti cretacei s'accartocciano nella sinclinale, che divide il Terminillo dalle montagne del Corno. Dopo la sinclinale, coperta dal cretaceo di Colle Vaia, le formazioni assumono una disposizione, della quale non appaiono facili i rapporti colla massa del Terminillo. Sopra all' altipiano di Rieti, tra Rivodutri e Poggio Bustone, s'alza una gibbosità di lias inferiore fasciata dal lias medio, e poi dal gialliccio con selci rosee. Il punto più elevato di quella gibbosità (Cima d'Arme) si trova all'altitudine di 1626 metri. Di fronte ai poggi di Cima d'Arme, al di là del rio Fuscella, il lias medio sale alla vetta della Pelosa (1677), nella quale inclina a sud, ad est, ad ovest. Così avviene, che in questo tratto il lias medio formi una sinclinale inclinata a sua volta parte verso est e parte verso ovest. Sulla linea dove la sinclinale cambia pendenza masse di schisti e di calcari della creta, tra i quali prevalgono i calcari di struttura cristallina, costituiscono la vetta delle montagne del Corno, dove si elevano a 1738 metri, e da là scendono a formare la sinclinale dell'altipiano di Leonessa ([1]).

Il lias medio, dopo il rio Fuscella, salito alla vetta della Pelosa (1677), costruisce tra questa ed il Carpelone una grande anticlinale, spaccata dalla gola per dove passa la via detta degli Sbirri (1022), che da Ferentillo conduce a Leonessa. Nella spaccatura appare il lias inferiore, la cui massa curvata secondo la direzione

([1]) Nel monte della Pelosa al sud si trovano lembi di lias superiore fino alla quota di 1511^{m}.

della catena, e piegata ad arco nel senso trasversale, costituisce il monte delle Sportelle (1127), il monte di Valle Piana (1261), il monte della Cicuta (1360), nei quali gli strati contorti, raddrizzati, spezzati generano vari imbuti e vallette.

Davanti a quella volta spaccata e fratturata in mille guise, si stende la valletta del Salto del Cieco, scavata nella testata dei calcari rossi ammonitici del lias superiore, e cinta al nord da una zona di gialliccio titonico, la quale, a sinistra del monte Petano (1256), si unisce al titonico di Polino e delle montagne del Corno; a destra al titonico di s. Egidio, e di Castellone sulle pendici del Carpelone e dell' Aspra. Dopo il titonico gli schisti varicolori ed i calcari rosati e cristallini della creta, da Piediluco a colle Oliva, inclinano verso la valle della Nera, e verso il lago Velino ([1]).

Il sistema delle montagne del Corno è ricco di acqua, tanto sul versante di Leonessa che su quello occidentale. Oltre alle sorgenti del Corno e del rio Fuscella, vi abbiamo il fiume di s. Susanna, il quale surge improvvisamente sull' arido alveo del torrente di Rivodutri, all'altura di Apuleggia ([2]).

Sistema della Valnerina dalla pianura di Terni a Ferentillo.

(Prof. II, XIII, XIV)

Entrati nella valle della Nera, dopo la pianura di Terni, s' incontrano interrotti da nuclei di tufi quaternarî, alcuni frammenti di calcari giallicci del titonico, i cui strati inclinano e verso ovest e verso nord, increspandosi di tratto in tratto, e per la inclinazione verso ovest mostrando sottoposti gli schisti selciosi verdi con aptichi del lias superiore. La pendenza di quegli schisti si rende molto più forte nella pendice del Pennarossa (476), nella quale troviamo anche il rosso ammonitico. Gli strati liasici del Pennarossa, dopo essersi rialzati alla verticale, si ripiegano con altrettanta rapidità, e si perdono sotto una massa di tufi calcarei. Pochi passi più avanti il lias medio riappare sulla strada della Valnerina, e con varie increspature s' innalza a formare il monte di Valle (504). Pertanto tra il monte di Valle ed il Pennarossa esiste un' ardita sinclinale di lias medio, nella quale il fondo della concavità si trova più basso del piano del terreno attuale: questa sinclinale corrisponde al di là della

([1]) Salendo dall'Arrone le alture a sinistra del torrente, si vede il gialliccio titonico scendere dal monte Petano, e salire sulla scogliera di Arrone, formando una gran sinclinale. Sopra si vedono i calcari rosati e cristallini, i quali scendono alla sella di S. Silvestro (711), poi con piega ardita costruiscono la vetta del monte di Tripozzo (885[a]), e da là con altra piegatura sinclinale vengono a schiacciarsi contro il titonico dell'Arrone. Sopra sta una gran massa degli schisti varicolori superiori ai calcari rosati.

Si trova anche sopra Polino un lembo di quegli schisti cretacei: ho ommesso disegnarlo sulla carta, per mantenere la semplicità delle linee principali dell'andamento delle formazioni.

Ho notato pure sopra Polino, appie' del versante ovest del monte della Pelosa, una massa considerevole di dolomite: probabilmente appartiene alla formazione del trias, sottostante al lias inferiore del monte della Cicuta. L'asprezza di quella contrada, la difficoltà di percorrerla, la complicazione delle innumerevoli piegature degli strati, rendono assai difficile di rilevarne i particolari. Dall'insieme delle osservazioni mi sembra che ad est dei monti della Cicuta e della Pelosa si abbia un salto, somigliante a quello del versante sud del monte di Appecano.

([2]) L'acqua di S. Susanna è ricca di gesso, ed accenna perciò a provenienza dalle formazioni del trias.

Nera ad altra insenatura, la quale presenta identiche circostanze, come vedremo in seguito. I rami della sinclinale, tra il Pennarossa ed il monte di Valle, la quale forma la valletta chiamata di Campolagno, convergono verso nord, ed alla quota di 284 metri, ossia ad 84 metri sopra al livello della Nera, si uniscono, mostrando ivi colle loro piegature un insellamento delle roccie che compongono quei due monti, e la nascenza di una sinclinale conica diretta verso sud.

Il lias medio, salito il monte di Valle, scende nuovamente a nord-est del poggio con altra increspatura, e quindi risale verso Collestatte. Tra Collestatte e Torre Orsina, sopra al lias medio si trova il lias superiore, poi il titonico sino a Montefranco, e poi sovraposto a questo il cretaceo fino presso Ferentillo. Sicchè le masse a sud-ovest del monte di Valle, e le masse a nord-est sono disposte con opposta pendenza, ma tanto le une che le altre s' inclinano verso il nord, diminuendosi però l' inclinazione man mano che si avvicinano a Ferentillo.

In corrispondenza delle testate che formano la ripa destra della Valnerina, le formazioni mesozoiche sulla sinistra del fiume presentano altre testate identiche, a sud-ovest ed a nord-est del monte Sant'Angelo. Difatti dalla valle Caprina a Papigno troviamo il titonico in parte coperto dagli schisti della creta; a Papigno gli schisti selciosi con aptichi, il calcare rosso ammonitico del lias superiore; il calcare marnoso e gli schisti con fucoidi, i calcari con fossili limonitici, i calcari con brachiopodi del lias medio; presso al monte gli strati più gagliardamente si raddrizzano, e si appoggiano ai calcari del lias inferiore, gli strati dei quali completamente raddrizzati e spezzati fino alla cima (626), formano altre rupi davanti quelle del Pennarossa. Dopo quelle rupi la inclinazione degli strati cambia direzione, e si ritrova il lias medio pieghettato con una stretta curva sinclinale, il cui fondo è più basso dell'alveo della Nera, riempita dai tufi della cascata fino al ciglione delle Marmore. Dopo la sinclinale il lias medio sale con qualche increspamento verso l'altipiano delle Marmore. Da questo altipiano la stessa formazione, elevandosi a 618 metri di altitudine, forma il monte a destra del Velino, sopra il quale il lias medio è coperto dal lias superiore e dal titonico. Nella Valnerina il lias superiore scende fino all'altezza di Torre Orsina; il titonico sovrapposto prosegue a vedersi fino al di là di Arrone, ossia presso a poco fino all'altezza di Montefranco, ed il cretaceo fino a Ferentillo. Tutte le masse oltre ad essere ripiegate come ho indicato, inclinano accennando ad una insellatura tra il sistema delle Marmore e quello di Battiferro. Per tale disposizione delle masse mesozoiche, abbondanti sorgenti scaturiscono nel territorio tra Torre Orsina e Ferentillo. Ad Arrone si hanno pure sorgenti solfuree [1].

Al di là dei colli terziarî, interposti tra la Nera ed il torrente Tescino, nella valle di questo torrente, dopo la pianura di Terni, si cammina tra masse di lias medio inclinate verso ovest e verso sud. Presso la Castagna, gli strati che discendevano a sud-ovest, cambiano direzione e piegano verso nord-est. Presso al Molinaccio

[1] Verri, *Relazione sulle condizioni del territorio di Terni per riguardo alle acque potabili.* Terni, novembre, 1883.

Le sorgenti solfuree dell'Arrone sono spiegate dalla stretta sinclinale che vi si vede costrutta dal titonico il quale scende fino ad Arrone per risalire il dirupo di Ferentillo.

ed all'osteria dell'Arma al lias medio si sovrappone il lias superiore, poi più avanti il titonico, ed infine verso Strettura il cretaceo.

Nella disposizione delle roccie tra la valle della Nera e quella del Tescino esiste pertanto, tra il monte di Valle e la Castagna, un incurvamento anticlinale, coi rami della curva verso nord-est e verso sud-ovest, ripiegato sinclinalmente tra nord e sud. Questa insellatura è coperta da materiale detritico posteriore, il quale impedisce di vedere a quanta altezza sta la soglia degli strati liasici.

Nell' una e nell' altra valle, della Nera e del Tescino, gli strati sempre sono estremamente pieghettati, e fratturati.

Ferentillo — Monte di Sollene — Monte Fionchi.
(Porf. IV, V)

Nell' indicare le zone delle formazioni, le quali fasciano i monti della Pelosa e del Carpelone nel versante della Valnerina, fu detto che le roccie cretacee scendono a colle Oliva sopra Ferentillo, e là sono fermate da altri incurvamenti riferibili ai sistemi adiacenti. Infatti, dopo un breve insellamento (703), coperto dagli schisti e dai calcari rosati della creta, i calcari giallicci titonici del contraforte del monte Aspra si ripiegano a costrurre la cresta del dirupo di Ferentillo. Le masse, così insellate, sopra Ferentillo sono piegate altresì secondo un' anticlinale, nella quale i rami discendenti del titonico al nord toccano la Valnerina presso Umbriano, al sud a Ferentillo, modellandosi secondo la superficie di un cono che fosse coricato, ed avesse il vertice a colle Oliva, e la base sulla ripa della Nera. Concentricamente agli strati titonici, nella base del cono s' incurvano quelli del lias superiore e del lias medio.

Sulla destra della valle si ripete la testata degli strati con eguale disposizione, meno che la parte dell' involucro, costituito dal lias superiore e dal titonico, ad ovest presso Gabbio è troncata. Così davanti Ferentillo gli strati del lias medio formano per un certo tratto un dorso scoperto (441), dopo del quale loro si sovrappone il ramo della curva del lias superiore e del titonico che sale dalla Valnerina verso Loreno. La massa, seguitando incurvata ad anticlinale da est ad ovest, sopra Nicciano s' insella, e la insellatura è coperta dal cretaceo, che costituisce la cima piramidale del monte Sollene. Dopo la sella di Nicciano, le rupi di Schiopponi, Ancaiano, Saluri presentano la testata tronca di tre increspamenti del titonico: gli strati cretacei accompagnano quelle ondulazioni, e coll' ultimo ramo discendente sono schiacciati contro la serra liasica di Belvedere. Per questa disposizione delle roccie, le acque che inzuppano le masse cretacee di parte del Fionchi, sono costrette ad incanalarsi nel condotto naturale, generato dall' incurvamento del titonico e del cretaceo compressi contro le rupi di Belvedere, e quindi la grande ricchezza delle sorgenti in quella valle. Dalle rupi di Saluri alla cima (1355), il monte Fionchi è coperto dagli schisti varicolori, e dai calcari rosati della creta, i quali colle loro gibbosità si adattano sugl' increspamenti delle masse sottoposte, increspamenti che in parte abbiamo veduti disegnati nelle rupi di Saluri.

Tra la valle del torrente di Belvedere, e la valle del Serra — Il monte Somma.
(Prof V, VI)

Nella valle del Tescino abbiamo trovate le masse mesozoiche inclinate verso sud, colle testate estremamente pieghettate. Fu notato che, oltre ai moltiplicati increspamenti, quelle masse prima presentano in massima una inclinazione verso ovest, poi si ripiegano verso est, in corrispondenza alle masse che costeggiano la Valnerina. Nella Valnerina fu eziandio notato che le masse, oltre al piegarsi verso est, discendevano verso il nord, diminuendo però il pendio della seconda inclinazione quanto più si accostavano a Ferentillo, dove, oltre al cambiamento di curvatura nella curva parallela alla valle, la quale si ripiega in alto verso Ampugnano, si ha pure un cambiamento di direzione nella linea di pendenza trasversale, la quale prende ad inclinare verso il sud. Per conoscere la causa di quelle ondulazioni, bisogna esaminare la ripa destra del torrente che dal monte Fionchi passa per Belvedere, e sbocca nella Nera presso Ferentillo, e la ripa sinistra della valle del Serra.

Non lontano dalla cima del monte Fionchi, dalla parte dove si dividono le acque del Tissino e del Tescino, spunta una scogliera (1087) di strati arricciati e spezzati del lias inferiore. La scogliera forma la ripa del torrente a contatto dei calcari cretacei a destra, e degli strati del lias medio a sinistra. Dopo il monte di Belvedere (924), gli strati del lias inferiore si perdono sotto quelli del lias medio, i quali continuano a destra la ripa del torrente fino a Ferentillo.

Nella valle del Serra, dopo breve tratto di rupi titoniche allo sbocco, cioè alla Rocca di S. Zenone, si vedono gli strati del lias medio salire rapidamente verso Battiferro, e sotto quelli, gli strati raddrizzati e spezzati del lias inferiore costituiscono le scogliere di cui è irta la ripa sinistra del Serra, tra il castello detto dei Santi di Battiferro (767) ed il villaggio di Schioppo. Come il piede delle rupi di Belvedere, così il piede delle scogliere liasiche di Battiferro è coperto da una zona di schisti varicolori e di calcari rosati della creta, cogli strati inclinati a destra e sinistra verso la valle del Serra, ed estremamente schiacciati. Anche la valle del Serra per tale disposizione stratigrafica abbonda di fonti, tra le quali copiosissima è quella di Poggio Lavarino. Il fondo della valle è scavato tra gli schisti varicolori superiori, ed i calcari rosati si trovano in alto sulle pendici.

Tra gli strati del lias inferiore di Battiferro e quelli di Belvedere, si stende in alto, sulla linea di displuvio, una larga zona di lias medio, e sopra quella zona, alquanto incurvata in senso sinclinale, da Battiferro (755), da S. Martino in Valle, ecc. le masse del lias superiore, del titonico, della creta, si estendono fino alla valle del Tescino con inclinazione verso sud ([1]).

Il lias medio dietro il monte di Bibico (913) confina direttamente col rosato della creta, mentre avvicinandosi al monte Somma, e nel monte Somma (869) è coperto dal rosso ammonitico e dagli schisti selciosi con aptichi del lias superiore, dai calcari

([1]) Sopra Battiferro tra gli strati del lias medio si hanno concrezioni limonitiche, come sopra Stroncone.

giallicci del titonico inclinati verso il nord, cioè in senso opposto alle identiche masse di Battiferro, San Martino in Valle, Casigliano. La zona del lias superiore, coperta dal titonico, dal monte di Somma sale fino a 1150 metri di altitudine sul monte Fionchi, dove forma una gibbosità presso la penna già notata del lias inferiore, e nella sella (1117) tra quella gibbosità e la cima del monte si vede un bizzarro miscuglio di roccie, per l'intrecciarsi del rosso liasico con quello della creta.

Sistema del Pizzo di Appecano e di Torre Maggiore.
(Prof. VII, VIII, IX, X, XV)

Le pendici esterne di queste montagne, tra la gola del Serra ed i Cappuccini di Porteria, presentano testate tronche, le quali mostrano al nudo le variate piegature degli strati.

Fu già notato che, allo sbocco della valle del Serra nella conca di Terni, le ripe del torrente sono formate da scogliere di titonico. Segue quelle scogliere una sottile lista di cretaceo, poi, poco più avanti della Rocca S. Zenone, sulla destra e sulla sinistra del Serra, abbiamo una testata tronca di lias inferiore. Dopo quella testata il lias medio sale rapidamente i poggi di Battiferro, coprendo il fianco delle rupi di lias inferiore, le quali coronano colle teste degli strati raddrizzati e spezzati la ripa sinistra della valle. Invece sulla destra scendono inclinati verso la valle gli schisti varicolori ed i calcari rosati della creta, i quali dopo il torrente risalgono a sinistra e si schiacciano contro le scogliere liasiche. Sicchè il secondo tratto della valle, dalla Rocca S. Zenone fino al di là della galleria dei Balduini, è costituito da una sinclinale di cretaceo inclinata verso il nord, ossia contro corrente del Serra.

Gli strati spezzati di una anticlinale di lias inferiore, avente il ramo destro della curva inclinato non molto fortemente, ed il ramo sinistro contorto e raddrizzato, formano la cima del Pizzo di Appecano (1054) [1]. La testata di destra mostra sopra al lias inferiore la rimanente serie inclinata verso est e verso nord. Nella testata di sinistra si compie la sinclinale col rialzarsi degli strati inferiori sulla penna di S. Giovanni di Piedimonte, ed anche in questa curva sopra al lias inferiore e medio si sovrappone regolarmente la série. La penna di S. Giovanni di Piedimonte è formata da un' anticlinale del lias inferiore e del lias medio, i cui strati mentre al sud mostrano la testata tronca della curva, al nord si accartocciano dietro la penna, e scendono rapidamente. Gli schisti varicolori della creta coprono il cartoccio, lasciando appena intravedere un piccolo lembo del titonico. Segue una profonda sinclinale, riempita in tutta la parte visibile dalle roccie cretacee, poi il lias inferiore e medio si raddrizzano fortemente a costrurre l' anticlinale della penna detta della Grotta del miele (707) [2]. Sul dorso di quella penna si trova la serie completa, e più specialmente visibile nella sinclinale successiva di colle Zannuto. In questa sinclinale gli strati del lias superiore e del titonico inclinano verso la conca di Terni. Dopo

[1] Una sella profonda 24 metri scavata negli schisti varicolori della creta, divide la cima liasica del monte di Appecano dal cono composto di calcari rosati. Le due vette hanno quasi la stessa elevazione.

[2] Quella scogliera è così chiamata perchè le api costruiscono alveari in una cavità del dirupo, e da quella scola il miele.

la sinclinale di Colle Zannuto, nuovo rialzarsi degli strati con rapidissimo pendio a costrurre l'anticlinale di S. Erasmo (767), e là rimane troncata la faccia della montagna parallela alla Nera.

Se voltiamo al nord, nella parte più elevata delle scogliere, vediamo disegnarsi una grande anticlinale tra la penna di S. Erasmo e la penna di S. Andrea (700), con leggiero increspamento nel punto dove il torrente del Sasso grosso taglia la massa del lias inferiore. Le ondulazioni delle Caldarelle e della valle Mandorla seguono l'anticlinale di S. Andrea, e poi gli strati del lias medio si rialzano fortemente, e sotto quelli il lias inferiore cogli strati estradossali spezzati forma la penna della cresta del Chicchirichì (913). La spaccatura del Sasso grosso ci fa vedere la penna di S. Erasmo e di S. Andrea costrutte da un'altra anticlinale, la quale è parallela al torrente e perciò normale alla prima. Nel ramo nord-est della curva gli strati di tutta la serie mesozoica scendono sul letto del torrente, e dopo poco cambiano direzione e si rialzano verso Torre Maggiore; nel ramo sud-ovest gli strati del lias inferiore e medio sono troncati, ed a quella testata più in basso si appoggiano gli strati del lias medio e delle formazioni superiori fortemente inclinate verso ponente. Eguale disposizione degli strati appare risalendo il torrente delle Caldarelle. Invece lo sperone della cresta del Chicchirichì presenta gli strati con pendenza verso ponente.

Dopo quello sperone, voltando ancora verso nord, si presenta la falda della montagna fino ai Cappuccini di Porteria. Su quella falda si vedono gli strati salire alla cresta del Chicchirichì, presentando la testata tronca di una gran massa di lias inferiore. Nelle ripe del torrente dell'Eremita si vede il lias inferiore discendere, e così completarsi l'anticlinale della cresta del Chicchirichì. Dopo il torrente dell'Eremita il lias medio si piega in una lunga sinclinale fino alla rupe dei Cappuccini di S. Pietro, costrutta da una stretta anticlinale, nel cui nucleo figurano gli strati del lias inferiore. Al centro della sinclinale di Porteria il lias medio scompare sotto le masse del lias superiore, del titonico, della creta.

Nella falda sud del sistema esaminato, tra la Rocca San Zenone e Cesi, è scomparsa ogni traccia del legame, che quella testata tronca delle formazioni mesozoiche doveva avere colle masse, dalle quali si trova disgiunta. Invece nella falda ovest, da S. Erasmo alla cresta del Chicchirichì, abbiamo notato disegnarsi anche un'anticlinale normale al piano della falda, coi rami della curva discendenti verso levante e verso ponente. Oltre agli strati di lias medio che, inclinati fortemente verso ponente, si addossano alle rupi del lias inferiore di S. Erasmo, dentro Cesi si trova un lembo di gialliccio titonico; poco dopo il torrente del Sasso grosso agli strati di lias medio, addossati alle testate tronche del lias inferiore della penna di S. Andrea, si sovrappone un poco di lias superiore, di titonico ed una lista di cretaceo, la quale, sempre fortemente inclinata ad ovest, da là fascia al basso tutta la falda. Allo sbocco del torrente di valle Mandorla si osserva quella fascia appoggiata al lias medio (zona con fossili limonitici), i cui strati inclinano leggermente verso est. Sicchè lungo la falda le masse, addossate alle testate tronche del Torre Maggiore, segnano il lembo estremo della grande sinclinale tra i monti di Amelia ed i monti di Cesi, sulla quale sono raccolti i depositi terziarî delle colline di S. Gemini, monte Castrilli ecc. Da sotto quei depositi, tra Cesi e S. Gemini, scaturiscono acque solforose e ferruginose.

Ad eccezione di Torre Maggiore, un gran lenzuolo di cretaceo copre tutta la parte superiore della montagna. Nel cono dietro al Pizzo di Appecano, che è il punto più elevato dopo Torre Maggiore, giunge alla quota di 1054^{m}. Si è veduto che tra la penna di Grotta del miele e quella di S. Andrea, gli strati del lias medio, dopo essersi alquanto inflessi verso nord, si rialzano verso la cima di Torre Maggiore. È perciò che salendo il monte ritroviamo il lias medio e superiore, ed infine sulla cima (1118) il titonico. Al sud della vetta affiorano alcuni scogli di lias inferiore (1081), e poi, cinto da ogni parte dal cretaceo, il lias inferiore sbuca fuori colle rupi di Pennecchia (1003) [1].

È facile comprendere come, con tanti ripiegamenti in varî sensi degli strati, debbano trovarsi nell' interno dei monti molte cavità. Tra le diverse grotte sono nominate specialmente quelle di Cesi, dalle quali l'aria, entrata per invisibili comunicazioni, esce con forte corrente. Quelle grotte, come le altre, sono tappezzate di belle incrostazioni dallo stillicidio delle acque filtranti per tante masse calcaree.

3. Disposizione stratigrafica delle formazioni eoceniche, oligoceniche, plioceniche [2].

Eocene — Nei monti dell'Apennino e subapennino del bacino del Tevere, fino a circa 42°,50′ di latitudine, sotto alle breccie di serpentina, ed alle arenarie psammitiche, sempre ho trovato calcari nummolitici e brecciole ricche di nummoliti con strati di schisti e calcari bigi, rossi, verdi. Però tra Norcia e Visso ho veduti i calcari nummolitici sovrapporsi alle formazioni mesozoiche, senza il coperchio di roccie arenacee. Nel territorio di Terni e di Rieti, ho trovati lembi di nummolitico solamente nel piccolo bacino del Farfa, anche là mancanti delle arenarie. Ad oriente dei monti di Fara i colli di Carpiglione e Schiazze sono coperti da schisti rossi, verdi e bigi alternati con strati di breccie nummolitiche. Sopra al cretaceo del monte Calvo sono disseminati alcuni frammenti di calcare nummolitico (525^{m}). Probabilmente appartengono alla stessa epoca gli strati di calcare bigio screziato presso Scandriglia.

[1] Dalla parte del torrente si trovano addossati alle rupi di Pennecchia anche i calcari giallicci titonici.

Nel profilo X ho curato disegnare il Torre Maggiore come m' è apparso risalendo il torrente ad est di Cesi. La sezione sul vero allineamento del profilo è molto più semplice: dalla Penna di S. Erasmo gli strati cretacei salgono fino a circa 200 metri sotto al cono terminale del monte, e da là alla cima si hanno scoperti i calcari giallicci titonici con inclinazione ascendente verso il monte.

[2] Sulle formazioni terziarie dei territorî adiacenti, le quali occorre citare per i confronti, vedansi le note: *Avvenimenti nell' interno del bacino del Tevere antico, durante e dopo il periodo pliocenico* (Atti Soc. it. di scienze naturali di Milano vol. XXI). *Alcune note sui terreni terziarî e quaternarî del bacino del Tevere* (csª vol. XXII). *Seguito delle note* csa (csª vol. XXIII). *Appunti sui bacini del Chiascio e del Topino.* Bollettino della Soc. Geol. n. 1883.

Oligocene — Nel bacino del Tevere, eccettuate le giaciture nummolitiche di Norcia e della valle del Farfa, tutta la formazione eocenica è coperta, o ha segni d'essere stata coperta da breccie, da calcari screziati, e da arenarie composte con elementi di serpentina. Questa massa di roccie aggregate, la quale nel monte di Caprese si eleva fino a 1400^m sul livello del mare, prosegue continua fino al sud di Todi, nella grande sinclinale tra i monti Martani ed i monti di Amelia. Da quel punto, dopo una interruzione di parecchi chilometri, nel qual tratto la sinclinale è riempita da depositi più recenti, là dove i fianchi della sinclinale si ristringono tra il monte S. Pancrazio ed i monti di Greccia, ritroviamo nei colli di Aguzzo (360^m) un piccolo gruppo di schisti bigi, di aggregati di ghiaiette di serpentina grossi qualche millimetro, di calcari screziati gialli e bigi con radioli di echino e qualche piccola ostrica, somiglianti ai calcari screziati fossiliferi di Prepo presso Perugia.

Nella valle del Velino, oltre alle arenarie di S^ta^ Croce presso Civita Reale, tra Antrodoco e Città Ducale si ha un nucleo di schisti bigi, di conglomerati con piccoli elementi serpentinosi, di calcari screziati eguali a quelli fossiliferi di Città di Castello e del bacino del Chiascio, e di arenarie psammitiche compatte e schistose elevate fino all' altitudine di 958^m.

Le arenarie di Antrodoco, per i poggi di Pendenza e Capradosso, si collegano con quelle del bacino del Salto, le quali a Fiammignano sono elevate a 913^m di altitudine, ed a 1066 tra Tagliacozzo e Carsoli. Le arenarie di Tagliacozzo per la sella di Tufo si uniscono alle arenarie della valle del Turano; per Oricola passano alla valle dell'Aniene, dove sono elevate alla quota di 700^m ad Affile e Civitella; e da Civitella passano nella valle del Sacco.

Le arenarie delle valli del Salto, del Turano, dell'Aniene sono di molto minore potenza, e composte di elementi molto più minuti delle corrispondenti masse dell'alto Tevere. Però, a compenso, sotto le arenarie abbiamo nelle valli del Salto e del Turano una considerevole massa di schisti bigi, di calcari color caffè chiaro con fucoidi, e nel bacino dell'Aniene una massa di calcari color bianco sporco ricchi di pettini.

Gli strati del terziario antico inclinano in direzioni diverse. Ommetto di notare le singole piegature, perchè in quelle formazioni poco estese non hanno grande importanza per documentare la storia fisica del territorio.

Prima di descrivere le formazioni dell' ultimo periodo terziario, dirò dell' importantissima lava che per primo scoprii nell'interno del subapennino, e precisamente nella sinclinale reatina presso Coppaeli, l'anno 1879, e ne resi conto alla Società di scienze naturali di Milano. La lava non ha correnti nè scorie: apparisce come un masso isolato nel recinto della conca, alla quota di 722 metri; tende a decomporsi con clivaggio sferoidale. Il detrito del monte impedisce di vederne il piano di contatto colle formazioni mesozoiche; dalla parte dove è a contatto coi sedimenti vallivi pliocenici non appare in questi segno di metamorfismo. Per riguardo alle condizioni petrografiche riferisco quanto mi comunicava in proposito il ch. prof. d'Acchiardi con lettera del 14 nov. 1882 da una risposta avuta dallo Zirkel. « La roccia

esteriormente ha la massima analogia colle Fonoliti boemiche, ma lo studio delle sezioni al microscopio mi è riescito sorprendente ed interessante. Essa consiste in massima parte di un minerale che per null'altro posso determinare che per *Melilite*, di cui sono evidenti le parti diventate fibrose e giallo-verdastre pallide. Vi ha inoltre un del tutto limpido *Pirosseno* e bellissimi cristalli ed aggregati di *Perowskite* brunastro-pallida e trasparente. Egli è molto notevole l'associazione della Melilite colla Perowskite. *Leucite* non ne scorsi, *Nefelina* con dubbio, così anche il *Peridoto* ». Soggiunge il nominato prof. che si tratta di una roccia importante per la sua non comune composizione, la limpidezza non abituale del Pirosseno e la presenza della Perowskite.— È probabile che appartenga ad un periodo vulcanico intermedio tra l'eocene ed il miocene, al pari dei basalti delle Alpi venete e del Trentino ([1]).

Pliocene — La povertà dei documenti rimasti, tra l'epoca secondaria ed i periodi del terziario antico, è largamente compensata colle formazioni del terziario recente. Le masse plioceniche non solamente occupano una superficie molto estesa, ma anche si presentano di più facile studio, perchè, salve poche eccezioni, sono per lo più rimaste in posto come furono composte nella loro origine.

Nelle Note precedenti ho dimostrato, che alle falde occidentali delle montagne, le quali si allineano sulla destra del Tevere, sono appoggiati i depositi di una formazione marina, composta di marne, sabbie, ghiaie: la quale, per la fauna studiata dal dott. Foresti, e per la flora studiata dal prof. Sordelli, fu riconosciuto appartenere al periodo del pliocene antico. Che quella massa nella zona dei vulcani affiora di tratto in tratto da sotto le materie eruttate, e si estende fino alla spiaggia del Mediterraneo, cingendo diversi nuclei di formazioni anteriori, i quali ci rappresentano le isole e le scogliere dell'arcipelago pliocenico. Ho accennata l'ipotesi che in quel periodo il Tevere avesse la foce nella Valdichiana, dove acque correnti hanno costruita la deltazione di Città della Pieve. Ho detto che la Nera doveva avere la foce nella gola di Configni, tra i monti di Narni e quelli di Rieti; che il Velino, il Salto, il Turano si riunivano nella valle del Farfa, e presso Poggio Mirteto costruirono un delta in comune colla vicina Nera. Ho dimostrato pel bacino dell'alto Tevere, che la conseguenza inevitabile di tale sistema idrografico unito ad una oscillazione discendente, la quale portò il livello marino a molta maggior elevazione del fondo delle valli continentali, doveva essere l'interrimento di quelle valli; pel quale interrimento i fiumi poterono impedire al mare l'ingresso nell'interno dell'Umbria. Da questo logicamente risultava, che le masse di marne, sabbie, ghiaie, con fossili terrestri e d'acqua dolce delle valli umbre, devono essere considerate contemporanee ai depositi esterni delle stesse materie contenenti organismi marini. Meglio che il territorio dell'alto Tevere, quello delle conche di Terni e di Rieti dimostra la giustezza della ipotesi enunciata.

([1]) Nella nota sui bacini del Chiascio e del Topino ho riferito, che le ofioliti dei monti di Gubbio sono superiori alle formazioni oligoceniche, e probabilmente anteriori alle plioceniche. Forse la lava di Rieti potrebbe appartenere allo stesso periodo di vulcanismo.

I depositi pliocenici marini, i quali lungo le montagne di Amelia, Narni, Poggio Mirteto ecc., continuano senza interruzione il pliocene della Valdichiana, nelle varie zone offrono le seguenti particolarità:

1. *Zona a destra e sinistra dello sbocco della Nera dai monti di Narni.* — Quando la Nera, traversati i monti di Narni, sbocca dalla stretta delle rupi liasiche di Labriano (63), per pochi metri, ha l'alveo scavato in una massa di puddinga composta di ghiaie liasiche e titoniche, un frammento della quale costituisce un isolotto nel mezzo del fiume. Quella massa però è fortemente inclinata verso il fiume e secondo il di lui corso, e non accenna a continuarsi sulle ripe; sembra perciò piuttosto il frammento di una formazione, franato al fondo della valle, per la corrosione operata dalla Nera sugli strati che le erano sottoposti. Invece e sul letto del fiume, dopo la puddinga, e sulle ripe, a fianco della puddinga, sta in posto un deposito di sabbie cementate, le quali danno una buona arenaria da lavoro di colore gialliccio e grigio chiaro. Quell'arenaria contiene sparse delle minute ghiaiette, ed all'azione meteorica si decompone con clivaggio sferoidale. L'arenaria compone il piede della ripa destra fino dopo S. Liberato, dove si trova elevata alla quota di 84^{m}. Da S. Liberato al Tevere la falda della collina è composta da marne con veneri, alternate a sabbie cementate, ed abbondantissimi letti di ghiaie e ciottoli composti di calcari liasici, titonici, cretacei. A S. Liberato comincia altro grosso nucleo di ghiaie e ciottoli (84^{m}), il quale raggiunge la potenza massima a Montoro. Salendo dalla Nera verso Montoro, sopra alle arenarie si vede disegnato, parallelamente al corso della Nera, un alveo di torrente pieno di ghiaie e grossi ciottoli, nei quali abbonda il calcare rosato della creta. Quell'alveo indica un corso d'acqua normale alla valle della Nera. Nel piano superiore dell'alveo (108^{m}) si presenta un terrazzo. Proseguendo la salita di Montoro si vede uno strato di marna azzurra con veneri, e poi letti ghiaiosi e ciottolosi alternati con sabbie fino al paese (148^{m}). Nelle ghiaie e nei ciottoli prevalgono elementi liasici e titonici. Infine, tra Amelia e Montoro, copre le formazioni descritte grossa massa di sabbie gialle, ricche di laminette di mica, alternate a strati di marne con concrezioni calcaree. Nelle sabbie e nelle marne si hanno straterelli e nuclei cavi di limonite; in alcuni punti le marne sono piene di *Cardium edule*, *Cerithium tricinctum*, *C. doliolum*. Questa massa sopra Montoro si eleva alla quota di 256^{m} [1].

Appena passato il fiume sui due ponti appoggiati agli scogli di puddinga, si vede anche la ripa sinistra formata dalla molassa fino ad una certa altezza, e poi

[1] Per mantenere l'unità in questa importante massa, credo più opportuno rammentare in nota le altre osservazioni fatte sulla zona a destra della Nera, già riferite nella Nota sugli *avvenimenti nell' interno del bacino del Tevere antico durante e dopo il periodo pliocenico.* Passata la gola del monte Arnata, lungo la strada che da Narni va ad Amelia, a 6 chilometri circa da questa città, alla quota di 270 metri si vede il calcare in posto crivellato dai litofagi; i dintorni di Amelia contengono delle marne e delle sabbie con *Cardium edule* L., traverso le quali spuntano vette rocciose di calcare compatto. La elevazione delle marne con Cardi è di 332 metri...... Da Amelia andando verso Orte trovai il terreno marino con *Ostrea*...., *Pecten varius* L., *Cardium edule* L..... Presso Giove ho trovato altro affioramento calcareo perforato da litofagi (300); a Giove ho osservate le sabbie marine con *Ostrea*..., *Pecten varius* alla quota di 300 metri.

la prosecuzione dell'alveo di torrente, notato sulla destra, con molte ghiaie e ciottoli di calcare rosato. La ripa sinistra presenta pur essa alla quota di 108^m un terrazzo sopra il deposito ghiaioso. Sotto questo ho notato un certo strato di marne colle specie

Natica elicina Broc.	*Ostrea* . . . .
Venus multilamella Lk.	*Pecten varius* L.
Cardium hians Broc.	

Ho osservato che gli strati pliocenici e quaternarî sotto Borgaria sono dislogati. Più volte gli strati si presentano spezzati ed inclinati verso sud e verso ovest. Una considerevole quantità di sabbie e marne sabbiose grigie forma le colline ad occidente di Borgaria. Inviati i fossili delle marne al dott. De Stefani, egli vi riscontrò le specie

Cardium edule L.	*Melanopsis flammulata* De Stef.
Cerithium tricinctum Broc.	*Hydrobia procera* Mayer
Trochus Brocchii Mayer	*Neritina* affine per forma alla *Neritina sena* Contraine

Nelle marne ho veduta anche l'*Ostrea edulis*, però le ostriche si trovano più specialmente nelle sabbie. Gli altri molluschi citati sono mescolati insieme negli strati delle marne. La raccolta fu fatta in un solo strato.

Nel torrente sotto Borgaria si vedono i depositi salmastri posare sopra marne turchine con frammenti di *Venus islandicoides*, alla quota di 148^m; alla stessa quota nel torrente appresso, sotto le Vigne, si vedono posare sopra uno strato di ghiaie rotolate ed appiattite composte di calcari liasici e titonici. In quelle ghiaie è notevole la quantità dei pezzi improntati. Le ghiaie posano su molasse perfettamente identiche a quelle delle ripe della Nera. Come sulla destra della Nera, anche sulla sinistra, verso il Tevere si trovano in basso marne con veneri ed altri molluschi della zona coralligena. Citerò i fossili segnalati dal sig. Terrenzi di Narni nel complesso della formazione pliocenica tra Guadamello, S. Vito, Otricoli (¹).

Cardium edule L.	*Nucula nucleus* L.
» *hians* Broc.	*Arca barbata* L.
» *multicostatum* Broc.	» *diluvii* Lk.
» *aculeatum* L.	» *pectinata* Broc.
» *Deshayesii* Pair	» *scabra* Poli
» *papillosum* Poli	» *Noae* L.
» *tuberculatum* L.	*Mactra triangula* Ren.
» *oblongum* Chemnitz	*Venus excentrica* Agas.
Cardita intermedia Broc.	» *islandicoides* Lk.
» *trapezia* Brug.	» *senilis* Broc.
Chama griphoides L.	» *verrucosa* L.
» *griphina* Lk.	*Cytherea multilamella* Lk.
Corbula gibba Ol.	*Dosinia lincta* Lk.
Tellina pulchella Lk.	*Lucina leucoma* Turton
Pectunculus violascescens Lk.	*Psammosolen antiquatus* Pultn.

(¹) *Sui dintorni di S. Vito.* Rivista scientifico industriale di Firenze, 1881.

Pecten Jacobeus L.
» *varius* L.
» *pusio* L.
» *opercularis* L.
» *polymorphus* Bron.
Ostrea lamellosa Broc.
» *cornucopiae* L.
Spondylus gaederodopus L.
Anomia patelliformis L.
» *ephippium* L.
» *squamula* L.
» *polymorpha* Phil.
Pinna . . . .
Crepidula unguiformis Lk.
Melanopsis nodosa Ferus.
» *buccinoidea* Ferus.
Rissoina decussata Montagu.
Natica millepunctata Lk.
» *helicina* Broc.
Neverita Josephinia Risso
Vermetus intortus Lk.
Scalaria comunis Lk.
Trocus fanulum Gml.
» *Brocchii* Mayer
Turritella tornata Broc.
Turritella vermicularis Broc.
» *tricarinata* Broc.
» *imbricataria* Lk.
Cerithium vulgatum Brug.
» *doliolum* Broc.
» *tricinctum* Broc.
» *scabrum* Oliv.
Fasciolaria etrusca D'Arc.
Cancellaria varicosa Broc.
Euthria cornea L.
Fusus craticulatus Broc.
Pollia plicata Broc.
Murex pseudo-brandaris D'Acc.
» *Pecchiolianus* D'Arc.
» *trunculus* L.
» *rudis* (?) Borson
Chenopus pes-pelecani L.
Nassa semistriata Broc.
» *Basterotii* Mich.
» *incrassata* Müll.
Conus striatulus Broc.
Dentalium octagonum Reynw.
Serpula . . . .
Balanus . . . .
Cladocora caespitosa L.

Sicchè riepilogando, abbiamo al basso marne di mare più profondo, sopra quelle quantità di sabbie cementate, e sopra una formazione salmastra. Interpolati su limitata estensione, a 108^m di altitudine un banco di ghiaie e ciottoli con molti elementi di calcare rosato; a 148^m un altro banco con poco o nessun elemento di quel calcare, ed alcuni nuclei di marne azzurre con veneri.

Nello sperone tra le Vigne ed Otricoli i depositi salmastri sono elevati fino alla quota di 278^m, e presso l'ultima salita della strada provinciale sono coperti da ghiaie e ciottoli. Qui comincia a spiegarsi una massa potente di materiali alluvionali, con parecchie ghiaie appiattite, nella quale i ciottoli raggiungono fino le dimensioni di 20 centimetri nell'asse maggiore e 10 nell'asse minore. Molti ciottoli sono di calcari rosati. A S. Vito questa formazione ha oltre 100 metri di potenza.

2. *Zona di fronte alla confluenza della Nera nel Tevere.*— Meglio delle due ripe le quali incassano l'ultimo tronco della valle della Nera, la costa destra della valle del Tevere completa l'orizzonte della formazione pliocenica.

Poco a valle della barca di S. Francesco, al piano della ferrovia, si hanno marne con *Venus multilamella* coperte da sabbie con ostriche, sopra alle quali ghiaie con ostriche. A destra e sinistra della barca di S. Francesco, cioè in corrispondenza di San Vito, la ripa è formata da una gran massa di puddinga alta un centinaio di

metri (¹). In quella puddinga si trovano ghiaie di calcari rosati e titonici con impronte come quelli notati sotto Borgaria, ma abbondano specialmente gli elementi liasici. Il materiale è generalmente più piccolo che non a S. Vito, però abbiamo ciottoli di selce con assi di 10 e 20 centimetri. Poco frutto si può trarre dalle note sulla disposizione della puddinga rispetto agli altri depositi al sud, perchè la formazione è disturbata da un salto prima del fosso di Rustico. Al nord però si vedono le masse ghiaiose assottigliarsi man mano e coronare la cima della costa, fino verso Bassano. Presso la stazione di Orte sotto la puddinga abbiamo sabbie, ed al basso marne. In queste tra la stazione ed Orte alla quota di 55 metri abbondano le specie:

Natica helicina Brocc.
» *millepunctata* Lk.
Neverita Josephinia Riss.
Chenopus pes-pelicani Lin.
Turritella tornata Brocc.
Vermetus intortus Lk.
Scalaria communis Lk.
Serpula . . . .
Venus islandicoides Lk.
Venus multilamella Lk.
Cardita intermedia Brocc.
Cardium hians Brocc.
Chama gryphoides Lk.
Arca Noae Lin.
Ostrea . . . . .
Pecten varius L.
Cladocora caespitosa D'Orb.

Sulle marne, sotto il tufo vulcanico sul quale è costrutto Orte (elevazione 90^{m}), ho trovate le specie:

Venus islandicoides Lk.
» *multilamella* Lk.
Cardita intermedia Brocc.
Chama griphoides Lk.
Pinna tetragona Brocc.
Ostrea . . . . .
Pecten varius Lin.
Spondylus gaederodopus Lin.

Da là salendo sulla strada di Viterbo, alla quota di 146^{m}, ho veduto sabbie con letti marnosi contenenti filliti, tra le quali potei riconoscere il *Platanus deperdita*, abbondante nel pliocene di Città della Pieve; a 174 metri uno strato zeppo di *Cardium edule* Lin.; a 225^{m} altre marne con *Ostriche*, e sopra un piccolo letto di ghiaie; a 247^{m} la *Cladocora caespitosa*, il *Pecten varius*, *Ostriche* con letti ghiaiosi; a 258^{m} abbondanti *Cladocore* ed *Ostriche*. Le poche marne sotto il tufo vulcanico di Orte inclinano verso il Tevere, il rimanente della formazione sembra orizzontale.

Tra Orte e Bassano le ripe dei torrenti fanno vedere al basso marne, sopra sabbie, e sopra un banco di ghiaie di poca grossezza con qualche frammento di *Ostrica*. Il gialliccio del titonico, il rosato della creta concorrono abbondantemente nei materiali di quelle ghiaie. Sotto al Castello di Bassano (275) si vedono le sabbie e le marne plioceniche inclinate verso il Tevere, e tanto là che sulle rive del fiume Vezza, quasi scompaiono le ghiaie.

Le eruzioni sottomarine dei tufi trachitici attestano, che sopra Orte il banco ghiaioso non è stato dilavato dalle acque dei torrenti posteriori, per cui ad Orte vi sarebbe come una interruzione tra il grosso banco di ghiaie e ciottoli della barca di S. Francesco, e quello anche abbastanza considerevole tra Orte e Bassano.

(¹) Ad ovest della macchia di Ruffo, il letto del torrente di Bagnola è alla quota di 90m., e mostra alte ripe di ghiaie. La elevazione dei colli è 196 m.; sopra le ghiaie sta solo poco materiale di ceneri vulcaniche.

3. *Seguito della zona pliocenica sulla sinistra della Nera fino alla Laia di Vacone.* — I depositi salmastri con *Cardium edule*, *Cerithium tricinctum*, *Melanopsis nodosa* ecc. proseguono al di là del villaggio delle Vigne (323); però sotto Schifanoia si trovano anche specie della fauna coralligena, colla *Cladocora caespitosa*, la quale fauna ho indicata nel paragrafo precedente sulla costa di Orte. Il sig. Terrenzi, in una Nota sui fossili pliocenici trovati nelle vicinanze delle Vigne, di Shifanoia e Montoro, inserita nella Rivista scientifica-industriale di Firenze l'anno 1880, scrive di aver raccolto presso S. Egidio sotto Schifanoia le specie:

Murex Pecchiolanus D'Anc.
Fusus lignarius Lin.
Nassa Basterotii Mich.
Conus striatulus Brocc.
Natica millepunctata Lk.
Turritella vermicularis Brocc.
Trochus striatus Lin.
» *obliquatus* var. Brocc.
Venus senilis Brocc.
Lucina lactea Lk.
Cardium rusticum Lin.
Chama gryphina Lk.
Arca pectinata Brocc.
Pecten flabelliformis Brocc.
» *Jacobeus* Lin.
» *varius* Lin.
Spondylus crassicosta Lk.
Cladocora caespitosa D'Orb.

Salendo dal piano del Tevere a Magliano, si trovano prima marne sabbiose colle specie:

Murex trunculus Lin.
Nassa semistriata Brocc.
» *bufo* Dod.
Cerithium doliolum Broc.
» *vulgatum* Brug.
Turritella tricarinata Broc.
Trocus cingulatus Broc.
Corbula gibba Oliv.
Venus multilamella Lk.
Cardita intermedia Broc.
Cardium edule Lin.
» *hians* Broc.
» *echinatum* Lin.
Pectunculus violascescens Lk.
Pinna tetragona Broc.

Sopra queste, sabbie con poche ghiaiette contenenti ostriche, sulle quali sabbie è costrutto il paese (254). Nelle marne si vede pure qualche piccolo letto di ghiaiette, ed alcuni strati di lignite. La stratificazione appare orizzontale.

4. *Zona corrispondente sulla destra del Tevere.* — Sulla destra del Tevere, dal salto della formazione pliocenica prima del fosso di Rustico, fino alla confluenza della Treia, dei depositi terziarî si vedono solamente alcuni letti di ghiaia, i quali sono sottoposti ad altri letti di ghiaie e ciottoli con mescolati materiali vulcanici, a marne quaternarie, a tufi vulcanici.

5. *Zona tra la Laia di Vacone ed il fiume di Correse.* — Nella gola tra il monte Cascia ed i monti di Cottanello, poco dopo Lugnola, si ha una lista di depositi ghiaiosi, elevata davanta Finocchieto alla quota di 420 metri, ed a 409 metri sullo spartiacqua tra la laia di Finocchieto e quella di Vacone; le ghiaie alternano con qualche piccolo strato di marne e sabbie. L'alveo del fosso sotto Vacone essendo alla quota di 250 metri, la potenza visibile del banco di ghiaia in quel punto è di 170 metri. Salite dal fosso le colline di Torri, si trova che il banco ghiaioso è coperto

da marne sabbiose con *Cerithium tricinctum*, *Cardium edule*, *Venus multilamella* fino alla quota di 344 metri. Marne con abbondanti *Cardium edule* si trovano sotto Selci, ed a destra e sinistra della laia s'incontrano banchi di *Cladocora caespitosa.* Questi banchi presso S. Polo sono alla altitudine di 152^{m}, e sotto Stimigliano alla quota di 119 metri. Stimigliano (208) è su una collina composta di marne, sabbie e letti di ghiaia. Nelle marne inferiori, elevate fino alla quota di 62^{m}, essendo il piano del Tevere a 40^{m}, ho notato le specie:

Murex Pecchiolanus D'Anc.
Natica helicina Broc.
» *millepunctata* Lk.
Neverita Josephinia Riss.
Nassa semistriata Broc.
Cerithium doliolum Broc.
» *vulgatum* Brug.
» *tricinctum* Broc.
Vermetus intortus Lk.
Trochus cingulatus (?) Broc.
Serpula . . . . .
Solen vagina Lin.
Abra alba Wood
Venus islandicoides Lk.
Cardita intermedia Broc.
Loripes lacteus Lin.
Cardium echinatum Lin.
Pectunculus violascescens Lk.
Pecten flexuosus Poli

Quelle marne contengono pezzetti di lignite, e qualche strato di lignite si vede sotto Stimigliano, vicino al ponte sulla laia, alla quota di 102^{m}.

Presso Aspra alla quota di 372^{m} è un copioso deposito di lignite con marne ricche di:

Cerithium doliolum Broc.
» *tricintum* Broc.
Melanopsis nodosa Ferus.
Cardium edule Lin.

Ad Aspra i depositi pliocenici, a contatto dei terreni più antichi, si presentano fortemente sconvolti ed inclinati, mentre lungo la pianura del Tevere appaiono orizzontali.

Tra Poggio Mirteto ed il fiume di Corese le marne e le sabbie plioceniche quasi scompaiono, sostituite da una enorme massa di ghiaie. La quale, nel tratto tra la stazione ferroviaria di Poggio Mirteto e lo sbocco del fiume Farfa, costituisce tutta l'altezza della collina fino al piano del Tevere, e si rilega alle due masse di alluvione, che passano a destra e sinistra del gruppo di Fara, e s'internano nelle montagne della Sabina, come vedremo in seguito. Sotto il monte degli Elci la puddinga è ricca di ostriche.

Sotto Fara si trovano marne con *Unio* e con *Neritine.* Il dott. Foresti, al quale inviai le *Neritine* raccolte anni indietro in quelle marne, mi scrisse sembrargli appartenere alla *Neritina Sena* Contraine; che quella specie non è più vivente e si riscontra spessissimo fossile nei depositi marini, benchè il genere nell' attualità viva nelle acque dolci. Si ricordi che, tra i molluschi delle marne salmastre di Borgaria, è compresa anche una *Neritina*, la quale il De Stefani ritiene per forma affine alla *Neritina Sena.*

6. *Zona corrispondente sulla destra del Tevere.* — Dissi già che dal fosso di Rustico alla Treia, per una depressione delle masse plioceniche, di queste rimanevano visibili solamente alcuni banchi ghiaiosi superiori. Dopo la confluenza della Treia nel

Tevere, ricominciano a svilupparsi i depositi marnosi e sabbiosi. Sul monte Cipriano le marne e le sabbie con *Venus islandicoides*, *Pecten varius*, *Ostrea* ..... giungono fino a 188 metri, e sopra non hanno ghiaie. Nella salita di Ponzano a 119^m di altitudine si vedono marne con *Cerithium doliolum*, *Cardium edule;* a 130^m marne con *Venus islandicoides;* a Ponzano (208^m) si hanno sabbie con banchi di *Ostriche.* Da Ponzano andando a Filacciano si cammina sempre sulle sabbie con leggieri strati di ghiaiette; a 242^m si trovano marne con *Cardium edule;* a 203^m sabbie e ghiaie; a 112^m marne e sabbie con *Cardium edule;* a 40^m marne con *Mactra subtruncata* da Costa, *Turbo rugosus* Lin. A Torrita e Nazzano, cioè di faccia alla stazione di Poggio Mirteto, prosegue sulla destra del Tevere la gran massa di ghiaia, che fu notata sulla sinistra.

7. *Zona dopo il fiume di Corese.* — La massa delle ghiaie, la cui massima potenza fu notata presso la stazione di Poggio Mirteto, procedendo verso il sud si assottiglia, e da sotto ricompaiono le marne e le sabbie plioceniche marine. Presso monte Libretti si trovano marne con *Cardium edule.* Vicino Palombara marne con *Venus multilamella* coperte da poche sabbie. Abbondanti depositi di ceneri vulcaniche coprono generalmente le formazioni plioceniche. Queste a Monterotondo si mostrano fino alla quota di 148 metri con marne, nelle quali ho raccolte le specie:

Nassa semistriata Broc. *Nucula placentina* Lk.
Turritella subangulata Broc.

Al piede del monte S. Angelo (170^m) ho anche notato il calcare mesozoico forato dai litofagi, ed una brecciola con organismi marini.

Esaminate le condizioni delle masse di marne, sabbie, ghiaie con organismi marini pliocenici, le quali si appoggiano alle catene che chiudono ad occidente le conche di Terni e di Rieti, restano a visitarsi le masse di identica composizione, ma con organismi terrestri e d'acqua dolce del territorio interno, e vedere quali rapporti esistano tra le une e le altre.

Quando avviai gli studi sulla struttura fisica del bacino del Tevere, seguendo le denominazioni preesistenti, chiamai lacustri quelle masse di sedimentazione detritica che incontrava in Valdichiana e nell'Umbria, mancanti di fossili marini. Accortomi che quel nome era improprio, perchè nelle formazioni così dette lacustri trovava eziandio molluschi terrestri, e perchè, limitando la genesi dei depositi, male si prestava a trarne le deduzioni per la storia degli avvenimenti idrografici, adottai il nome di *formazione valliva.* Questo nome comprende tutte le fasi possibili del riempimento d'una valle: conoidi alluvionali, interrimenti sabbiosi, anse melmose, paludi, stagni, laghi.

1. *Zona a destra e sinistra della Nera nella conca di Terni.* — Dal tronco della valle del Tevere, tra Todi e Deruta, alla conca di Terni, si distende senza interruzione una zona, larga almeno 12 chilometri, di marne, sabbie, letti di ghiaie e ciottoli. Nella zona tra S. Gemini e Todi prevalgono le marne, coperte in qualche luogo da cucuzzoli di sabbia, e nelle sabbie si vedono frequenti vene e nuclei

di ferro limonitico. Come ho dimostrato altrove, quella zona al nord, al di là del Tevere, si allaccia colle formazioni del territorio Perugino; ad est per la gola di monte Falco, tra il monte di Deruta ed il monte Martano, si unisce alle analoghe formazioni del territorio Spoletino. Le altimetrie che ho segnate nella zona, lungo lo spartiacqua tra la Naia ed i torrenti di Amelia, sono: a Dunarobba 416^{m}, a monte Castrilli 414^{m}, a S. Gemini 367^{m}. A Massa Martana le marne sono ricche di molluschi d'acqua dolce, a monte Castrilli contengono una giacitura di ligniti, coperta da marne, nelle quali ho trovato delle valve di *Cyrena* ([1]). Al quadrivio dell'acqua acidula presso San Gemini nelle sabbie sono intercalati piccoli letti marnosi con *Neritine*, ed altri molluschi, e con filliti. A San Gemini le marne sono attraversate da un banco di ghiaie. Non di rado la stratificazione appare disturbata lungo la pendice dei monti. A San Gemini si vedono gli strati ghiaiosi inclinati a 45° verso nord-est; sotto S. Damiano (Carsoli diruta), gli strati pliocenici appaiono inclinati verso sud-ovest, e nel torrente che scende dalle Caldarelle e quello che scende dalla fornace di S. Andrea ho veduto il pliocene composto di strati ciottolosi, sabbie, marne, ligniti con strati contorti ed anche raddrizzati alla verticale. La formazione entra colle sabbie nella stretta gola tra il monte Arnata ed il monte Santa Croce, dove si vede elevata alla quota di 343^{m}, ed ivi si fonde colle sabbie e colle marne marine di Amelia e Montoro. Anzi di fronte alla gola stessa abbiamo mescolati ai depositi vallivi quelli marini con ostriche e cerizî presso il luogo detto la Quercia ([2]).

Interrotta dalla pianura di Terni, la massa valliva, colle sabbie e colle marne, seguita a destra della Nera, appiè del Torre Maggiore e del Pizzo di Appecano ([3]). In questo tratto presenta una depressione: a Colle Luna si trova elevata alla quota di 170^{m}, al colle dell'Oro a 300 metri. In corrispondenza dello sbocco del torrente Serra si ritrovano abbondanti letti di ghiaie e ciottoli, alquanto spostati dai movimenti posteriori. La formazione si compone quasi totalmente di quest'ultimo materiale dallo sbocco del Serra fino vicino ad Ampugnano, nelle colline interposte tra la valle del Tescino e la valle della Nera, con elevazione crescente quanto più si risale il corso della Nera, finchè alla fine si trova alla altitudine di 611 metri ([4]). Sulla destra del Tescino i detriti pliocenici sono sovraposti alle roccie mesozoiche a S. Bartolomeo e Colle Licino. Sulla sinistra della Nera, salendo da Castel di Lago alla Forca dell'Arrone, si ha un banco di conglomerato pliocenico, il quale dalla B. V. dello Scoglio (498^{m}) si eleva fino a 600 metri di altitudine. Interrotto per breve tratto da un cucuzzolo mesozoico, si ritrova alla quota di 656 metri sul poggio sopra alla Forca dell'Arrone, a testimoniare il collegamento delle formazioni vallive delle conche di Terni e di Rieti. È stato ommesso sulla carta questo lembo, per evitare la confusione, che poteva derivare dal soverchio dettaglio.

([1]) Il dott. Foresti cui inviai quelle conchiglie mi disse appartenere al genere *Cyrena* e più specialmente al sottogenere *Corbicula*, ed assomigliare perfettamente alla *Corbicula consobrina* vivente in Egitto e che trovasi fossile in diversi depositi pliocenici.

([2]) Devo al signor Terrenzi l'avermi avvertito di quell'importante lembo marino, il quale dimostra la contemporaneità delle formazioni plioceniche.

([3]) Nei colli appie' dei monti nominati abbiamo anche qualche saltuario lembo di ghiaje.

([4]) Nei letti di ghiaja si vedono ciottoli improntati, come nei depositi al di là del Tevere.

Nei colli dell'Oro alla quota di 160 metri è contenuta tra le marne una giacitura abbondante di ligniti cogli strati inclinati verso nord-ovest. Le marne che accompagnano le ligniti sono ricche di fossili. Il signor De Stefani nella raccolta inviatagli vi ha distinte le seguenti specie:

Nerita Pantanelli De Stef.
Valvata piscinalis Müller var. *minor* De Stef.
Melanopsis flammulata De Stef.
Emmericia Umbra De Stef.
Goniochilus Zitteli Schwartz
Bythinia Verrii De Stef.
Vivipara Neumayri Brusina
Ancylus parmophorus De Stef.
Planorbis sp.

La formazione valliva termina con una lunata sulla sinistra della Nera. Ad est della lunata, ossia tra Stroncone e Collescipoli abbondano specialmente i depositi ghiaiosi. Però i banchi di ghiaie quasi da per tutto sono mescolati agli strati di marne e sabbie, come ad indicare il divagamento del corso d'acqua che rotolava quei materiali. Le altimetrie di questa massa sono 334^m a Stroncone, 267^m al centro della lunata. La stratificazione vi appare conservata in posto, senza i dislogamenti che si vedono dirimpetto a San Gemini, e nelle ligniti dell'Oro.

Tra le masse vallive di Collescipoli e quelle di Finocchieto-Vacone, si ha una interruzione di circa cinque chilometri e mezzo. In quel tratto si nota un'ampia valle percorsa dalla laia di Finocchieto. La parte piana al fondo della valle è larga 100 a 200 metri, la elevazione della pianura è di 191 metri.

2. *Zona dalla falda occidentale del Terminillo ai monti di Poggio Mirteto, Fara, Nerola.* — Nella descrizione delle zone plioceniche marine fu detto che la massa di puddinga, tra il Farfa e Poggio Mirteto, si rilega alle due masse di materie alluvionali, le quali passano a destra e sinistra del gruppo di Fara. Al sud del gruppo, tra il monte degli Elci e Nerola, i depositi di marne, sabbie e ciottoli dopo la gola di Nerola larga circa 130^m, si slargano tra Nerola e Scandriglia, e per la stretta tra il monte Calvo e Carpiglione si fondono con quelli situati al nord del gruppo di Fara. La potenza visibile dei depositi ghiaiosi misurata sotto il paese di Toffia è di più che 100 metri, nè si vede nel letto del Farfa su quali formazioni sono appoggiati.

Le masse vallive della Sabina, che continuano senza interruzione quelle marine di Poggio Mirteto, occupano una zona lunga 29 chilometri, larga otto a nove chilometri, non tenuto conto delle insenature laterali, una delle quali si spinge fino a Poggio Fidoni. Il Turano, il Salto, il Velino traversano la massa con profonde solcature. Le altimetrie della zona crescono coll'avvicinarsi alla catena del Terminillo. A Poggio Mirteto il punto di contatto tra i depositi sabbiosi pliocenici e le roccie liasiche è alla quota di 428 metri; sulla linea di displuvio tra le acque del Farfa, e quelle della Lariana e del Turano abbiamo 680^m; nei poggi tra il Turano ed il Salto 830^m; nei poggi tra il Salto ed il Velino 725^m. Gli elementi delle alluvioni presentano i materiali tanto più grossi, quanto più ci si avvicina alla montagna. Così in massima per un certo tratto, fino al Turano, vi abbondano anche le marne e le sabbie; le ripe del Salto e del Turano mostrano potenti masse di puddinga; le ripe del Velino masse più irregolari e con grossi blocchi.

La formazione, sulle ripe del Salto, si vede per un certo tratto sovrapposta ai calcari titonici, alla quota di circa 500 metri. La sua potenza nelle ripe del Salto e del Velino si mostra di 300 a 400 metri.

I depositi vallivi, da S. Giovanni Reatino e da Città Ducale, entrano nella conca di Rieti per un'apertura larga più di 7 chilometri, e vi formano i colli di Santa Rufina, il monte Està, i colli dei Cappuccini, di S. Antonio del Monte, il colle Stefano. Interrotti per breve tratto della valletta di Villa Traiana, costruiscono poi le colline di Castel Franco, e Cantalice, nei quali si elevano alla quota di 645 metri. Dai colli di Cantalice proseguono formando le colline sotto Poggio Bustone e sopra Rivodutri, dove salgono fino alla quota di 760 metri. Da là scendono fino al lago di Piediluco, e sbarrano quella conca coi colli di Labro, dove si elevano a 465 metri. Un frammento di quei depositi copre la collinetta detta Lama de' Santi.

La stratificazione dei depositi vallivi è orizzontale. Generalmente vi prevalgono le puddinghe: nelle puddinghe presso al lago Velino sono mescolate ghiaie e ciottoli rotolati e frammenti angolosi. Sono intercalati colle puddinghe strati di sabbie e marne. Abbondano le marne nelle masse vallive tra il lago Velino e quello di Cantalice. Presso i casali della Sfera, sopra al lago di Cantalice, alla quota di 398 metri, si ha un tufo vallivo con impronte di filliti e di unio, coperto da puddinghe. Presso Bonacquisto si trova anche un deposito di Lignite [1]

4. Disposizione stratigrafica delle formazioni quaternarie.

Nelle terre o roccie quaternarie del territorio di Terni e di Rieti si distinguono per differenza di origine tre categorie di formazioni:

1ª Prodotti vulcanici, 3ª Formazioni detritiche.
2ª Roccie concrezionari,

Di ciascuna di queste masse procurerò riferire le note prese sulle loro distribuzioni, sulle scambievoli loro relazioni, e su quanto altro possa interessare nell'apprezzamento delle vicende cui furono soggetti i territorî studiati.

1. *Prodotti vulcanici* [2]. — Copiosissimi depositi di ceneri vulcaniche sono sparsi su tutto il territorio, ed abbondano specialmente sopra le colline plioceniche. Ad Attigliano si hanno cave di pozzolane grigie leucitiche; al di là di Giove, alla quota di 292 metri, fino ai monti di Amelia, si stende una spianata lunga circa 4 chilometri, coperta da terre vulcaniche con scorie e cristalli farinosi di amfigene.

Sotto Borgaria, dalla quota di 148 metri a quella di 267 metri e più, si ha un grande ammasso di terre leucitiche con interclusi letti ghiaiosi, strati di sabbie e marne, tufi calcarei concrezionari. Questa massa si presenta spostata ed inclinata a

[1] Anche l'altipiano di Leonessa ha depositi pliocenici con lignite.

[2] *Cronologia dei vulcani tirreni* (Rendiconti del r. Ist. lomb. di scienze e lettere, febbr. 1878). *Alcune note sui terreni terziarî e quaternarî del bacino del Tevere* (Atti Soc. it. scienze nat. di Milano, vol. XXII). *Seguito delle note sui terreni terziarî e quaternarî del bacino del Tevere* (Atti csa. vol. XXIII). *I vulcani Cimini* (R. Ac. Lincei, anno 1879). *Due parole sui tufi leucitici dei vulcani tirreni* (Bullettino della Soc. geol. it. 1883).

circa 45° verso sud e verso ovest. Proseguendo nello sperone, tra Gualdo e S. Vito, s'incontrano molte ceneri leucitiche grigie, terre rosse e letti alluvionali con i ciottoli mescolati alle terre rosse. Noto che, nelle terre rosse, si trovano mescolate molte selci dei calcari mesozoici, le quali tendono a decomporsi in scaglie. Eguale fenomeno osservai nelle terre rosse con pisoliti ferruginose dell'altipiano di Città della Pieve, colla sola differenza che quelle selci provenivano dai calcari eocenici.

Sulla sinistra del Tevere il castello di Faglia è costrutto su un lembo di tufo leucitico.

Alle falde del monte Cascia e dei monti occidentali della conca di Rieti, nei colli di Montebuono, Tarano, Montasola, Aspra, Rocca Antica, Poggio Catino, Poggio Mirteto, il pliocene è coperto da grosso banco di terre vulcaniche con pirosseni e leuciti, con interposti strati di piccole pomici, ed interclusi letti alluvionali con materiali poco rotolati.

Identici materiali coprono le colline di pliocene marino sotto Fara, Nerola, da monte Libretti a Mentana ecc. Ho notati strati di ghiaie calcari, mescolati ad elementi vulcanici, sopra alle ghiaie plioceniche sulla strada dall'osteria di Passo Corese a Fara.

Anche nell'interno delle conche sono sparse molte materie vulcaniche. I colli di Cesi e Piedimonte sono coperti da terre color caffè con pirosseni e minuti elementi di sanidino, più o meno mescolate al detrito scaglioso staccato dalla montagna. Nelle pozzolane presso Cesi ho raccolti cristalli di sanidino larghi 10 millimetri. Quei materiali a Cesi si elevano fino alla quota di circa 400 metri. Le stesse terre abbondano allo sbocco della valle del Tescino, e presso Papigno, dove coprono gli alabastri della Valnerina. Se ne vedono qua e là, anche negli altri colli, giaciture più o meno estese, e più o meno pure da mescolanze di detriti locali. Ad Arrone ho trovate abbondanti ceneri leucitiche grigie, e quel che più importa notare un ciottolo di leucitoforo. Sulle prime non detti importanza a quel ciottolo, raccolto isolato sull'alveo del torrente, perchè lo supposi portato dai pastori di ritorno dalla maremma. Però la presenza del banco di ceneri leucitiche, scoperto in seguito, mi fa dubitare che anche quel ciottolo possa provenire direttamente da proiezioni vulcaniche.

Anche la conca di Rieti ed il bacino del Farfa contengono sparsi gli stessi materiali: tra Nerola a Scandriglia abbondano pozzolane grigie con leuciti.

Infine ho raccolte ceneri color caffè sui monti di Narni, e ceneri grigie con laminette di mica e cristallini di pirosseno sul Terminillo.

2. *Roccie concrezionari.* — La gran formazione dei travertini di Orte si estende per un certo tratto anche sulla sinistra del Tevere. Appiè della falda occidentale dei monti Martani, da Massa Martana ad Acquasparta [1], fino all'antica Carsoli, le formazioni vallive plioceniche sono coperte da un mantello di concrezioni calcaree più o meno indurite, cioè da travertini e da tufi calcarei. La stratificazione di quel

[1] Acquasparta fu patria del Duca Federico Cesi fondatore dell'Accademia de' Lincei. Nel palazzo Cesi albergò Galileo Galilei che fu compagno negli studi del Duca Federico.

mantello è inclinata con pendenza dal monte verso la valle, ed increspata in curve, non per effetto di dislocamenti, ma per disposizione naturale ([1]). Tuttora scaturiscono sorgenti solforose e ferruginose a Massa Martana, Acquasparta, tra S. Gemini e Carsoli ([2]). Gli strati di puddinga pliocenica sotto S. Gemini, inclinati a 45° verso nord-est contengono venature limonitiche, forse ad indicare il passaggio di sorgenti ricche di ferro.

A Piedimonte, sotto il monte di Appecano, il pliocene vallivo è coperto da estesa crosta di travertini, pur essa inclinata per disposizione naturale verso la pianura di Terni. I travertini di quel luogo contengono moltissimi nuclei di elici.

A Recentino, nella gola di Narni, si hanno sorgenti minerali ed un piccolo stabilimento balneario. Il fondo della valle, e le falde dei monti sono coperte fino ad una certa altezza da travertini. Oltre alle impronte di filliti, interessa notare in quella formazione delle ghiaie intercluse nel travertino, talchè a volte assume l'aspetto d'una roccia brecciata ([3]).

Il travertino abbonda tra Città Ducale ed Antrodoco. In quel tratto della valle del Velino surgono appie' del Terminillo copiose fonti solforose e ferruginose. Ho notato nelle sorgenti di Città Ducale la temperatura di 14 centigradi. L'altipiano di Rieti è coperto da una lastra di travertino.

Riassunte succintamente le giaciture dei banchi di roccia concrezionare, alla quale è dato il nome di travertino, e la cui formazione appare dovuta a copioso scorrimento sul terreno di acque incrostanti, fenomeno che tuttora ho veduto molto attivo alle terme di S. Filippo e di Vignoni in Toscana, devo occuparmi più specialmente delle roccie concrezionari speciali, esistenti in masse di forte potenza lungo la Valnerina, tra Terni e la cascata delle Marmore.

La roccia è costituita da zone concentriche grosse da 5 a 20 millimetri. Ciascuna zona in parte è tinta di bianco più o meno sporco, ed in parte color miele. In alcune zone il passaggio tra le due tinte si effettua per sfumature, in altre le sfumature sono appena accennate nella lista color miele. Vario lo spessore delle due liste. Talvolta prevale il color bianco, e si ha appena uno o due millimetri color miele pallido: questo avviene di preferenza nelle zone più grosse. Talvolta il color miele è intenso, occupa quasi tutto lo spessore della zona. Diversa pur anche si manifesta la struttura delle zone. A volte la roccia, nella frattura trasversale, mostra quasi un tessuto cellulare, ed il piano di divisione tra le zone ha aspetto meandriforme, accennando ad una composizione per sovrapposizione di pellicole sottili increspate: questa varietà è molto friabile. Altre volte le zone, nella frattura trasversale, appaiono composte di fibre ora parallele ora raggiate; altre, nella frattura trasversale, si presentano come composte di scaglie vitree, e nel piano di divisione appare una superficie d'aspetto resinoso. Questa varietà prevale quando il color miele è intenso ed occupa quasi tutta la zona, ed è la varietà più dura della specie.

([1]) La inclinazione dei travertini di Carsoli in qualche luogo fa dubitare che vi siano stati movimenti nel terreno.

([2]) Per le acque di S. Gemini. V. Analisi del prof. E. Purgotti (Tip. Bartelli, Perugia 1873).

([3]) Devo rettificare una inesattezza commessa nel disegnare la Carta geologica dei vulcani Cimini, segnando i travertini di Narni ad ovest della gola della Nera, invece che dentro la detta gola.

Sono notevoli sopra tutto degli alveoli disposti obliquamente al piano di divisione delle zone. Quegli alveoli sono abbondantissimi nella varietà a struttura fibrosa, ed anzi in questi si vedono le fibre raggiate sopra gli alveoli, ed anche intrecciate nei piani d'intersezione. Benchè più rari, si vedono alveoli anche nelle altre due varietà. Gli alveoli hanno forma ellissoidale coll'asse maggiore lungo 9 millimetri, e coll'asse minore lungo 3 millimetri. L'ellissoide è sempre aperto su un lato con taglio ellittico, e mostra l'interno dell'alveolo largo circa 2 millimetri. Dentro l'alveolo si vede una pellicola a guisa di sacchetto, piena di calce. Appena m'avvidi di tale fatto, mi sembrò che quegli alveoli dovessero essere di origine animale. I professori Taramelli e Stoppani convennero in tal giudizio, ed allo Stoppani sembrò che l'animale potesse essere la *Friganea Major*. Inviato un saggio della roccia al Museo civico di Milano, il prof. Sordelli mi scrisse ritenere poco probabile che si tratti di friganee, sebbene potesse darsi che le impronte siano dovute a larve d'insetti.

La concrezione alabastrina si dispone in zone concentriche attorno oggetti diversi: ciottoli, rami e tronchi di piante; in questi è distrutta la materia legnosa, e nel posto del legno rimangono cilindri cavi, disposti con inclinazioni differenti. Negli scavi della Fabbrica d'Armi, di cui parlerò distesamente in seguito, ho notato un cilindro cavo orizzontale avente il diametro di 20 centimetri, lungo 5 metri con residui di sostanza legnosa infradiciata; poco sopra al cilindro ho trovato altra cavità piena di cilindretti cavi di vario spessore e di impronte di foglie. Allorchè le zone, circuenti due oggetti vicini, vengono a toccarsi, le zone allargano la curvatura ed abbracciano le incrostazioni parziali: sicchè via via ne aumenta l'ampiezza, fino ad acquistare raggi di qualche metro, e dare alla roccia forma mammellonare. Diverse cavità più o meno grandi sono interposte tra i mammelloni, non dipendenti da corruzione della materia interposta, ma da impedita prosecuzione della formazione delle zone concentriche. Quelle cavità generalmente sono tappezzate da cristalli di calcite: qualche volta contengono concrezioni staslattitiche. Alcune delle cavità sono piene di pisoliti, le più grandi con diametro di meno che un centimetro; per lo più sono riempite da sabbie, ghiaie e ciottoli, senza cementazione alcuna, e senza distribuzione regolare, nè per volume e peso dei materiali, nè per disposizione di ciascuno di quelli. Vi si vedono confuse sabbie di detrito di roccie concrezionari, ghiaie e ciottoli di queste roccie, e delle roccie secondarie. È notevole che i ciottoli generalmente hanno forma discoidale perfettamente arrotondata e molto appiattita, e spesso nelle masse di riempimento si trovano raddrizzati. Lungo la strada della Valnerina si vedono anche, interposte tra i mammelloni, masse di marna ricca di calce e perciò di colore bianco sporco, senza traccie di zonatura, e qualche volta si vedono i materiali di riempimento più o meno cementati con traccie limonitiche (¹).

Il masso alabastrino trovato negli scavi della Fabbrica d'Armi, contiene molti blocchi di roccia alabastrina della più dura, molti di una varietà di travertino durissimo giallognolo somigliante, per colore, alla pietra spugna delle Marmore. Nel materiale sciolto, che riempie le cavità interposte tra i mammelloni, ho trovate alcune ossa, e

(¹) Nella Valnerina, pochi chilometri a monte della confluenza del Velino, si hanno tuttora ad Arrone piccole sorgenti minerali.

dei frammenti di terraglie lavorate. Questi oggetti di mano dell'uomo sono stati trascinati nelle cavità durante la formazione del masso, perchè le incrostazioni superiori avevano chiuso assolutamente quelle cavità, da non lasciare dubbio alcuno che il trasporto sia dovuto a tempi posteriori.

La formazione alabastrina raggiunge la potenza massima alle Marmore, dove si eleva fino alla quota di 360 metri: ivi, in corrispondenza alla valletta di Campolagno, s'incunea fin sotto alla Nera tra i calcari mesozoici dei monti di destra e di sinistra del Velino, mostrando un'antica e profonda gola per la quale le acque di questo fiume confluivano nella Nera. Si vede da per tutto lungo la Valnerina, dalla cascata alla pianura di Terni, costituire la ripe della valle con altezza di 60 a 70 metri. Sulla sinistra della Nera se ne trova sul terrazzo delle Grazie, da dove scende fino al ponte detto del Sesto: non si può vedere però se quella massa sia isolata, oppure collegata colla rimanente formazione. Sulla destra della Nera sembra troncata a S. Paolo, ad un chilometro circa dalla Fabbrica d'Armi. Forse il masso trovato alla Fabbrica d'Armi è isolato, poichè mi si dice che non ne fu trovata traccia in scavi vicini, portati alla stessa profondità. Parrebbe che quel masso abbia una base di una ventina di metri circa di diametro. Il suo vertice sta alla quota di circa 120 metri, e si può credere che la sua altezza sia circa undici metri.

La Nera dalla cascata alla pianura di Terni ha l'alveo scavato nella roccia alabastrina, e la costruzione mammellonare di questa, le sue cavità sono le cause delle bizzarrie, che presenta il corso del fiume in quel tronco, nel quale le acque ora si ristringono in gorghi profondi, ora si perdono in sifoni. L'acqua della Nera, dotata tuttora di considerevole potenza incrostante, spalma d'una vernice calcarea la superficie dei massi sollevati dal fondo, ma spingendo ed agitando vorticosamente le sabbie e le ghiaie nelle cavità, interposte tra i mammelloni, ne corrode la base, finchè i massi si spezzano e sono rotolati sull'alveo.

Lungo le ripe del fiume, dove è fitta la boscaglia, le acque seguitano ancora nella composizione dei tufi alabastrini. Nelle zone di questi tufi la tinta miele è sostituita dal seppia pallido, la grossezza della zona generalmente è minore, minore la durezza della roccia, ma la struttura è identica a quella degli alabastri più antichi. Si vedono piante di pioppo e di ontano, coricate ed in parte ricoperte dai tufi, proseguire nella vegetazione. Non ho potuto notarvi gli alveoli caratteristici dei tufi antichi. Guardando straterelli melmosi di recente deposito sopra agli scogli, ho osservato che la loro struttura è identica ai tufi a struttura cellulare, e che dopo qualche giorno si ricoprono d'una pellicola color rosa d'una certa tenacità, sulla quale vegetano muschi.

Alle Marmore la parete della cascata è coperta da altra roccia concrezionare, chiamata per la sua leggerezza pietra spugna, e costrutta da incrostazioni, le quali avvolgono erbe, foglie e fuscelli di piante. Il ciglione delle Marmore infine presenta una corona di staslattiti variamente disposte, dalle staslattiti colonnari alle staslattiti panniformi.

3° *Formazioni detritiche.* — Comprendo in questa classe tutte le formazioni, sia marnose che sabbiose e ghiaiose, alle quali non si può assegnare altra genesi se

non il trasporto e la sedimentazione meccanica per mezzo delle acque correnti e stagnanti. Incominciando dall'altipiano di Rieti, si vede il soprassuolo fino alle Marmore composto di letti ghiaiosi e ciottolosi e di terre rosse.

Sul piano delle Marmore sono scavate fosse, nelle quali l'acqua si disperde per vie sotterranee. Ad eccezione di alcune fosse, le quali rappresentano i varî tentativi d'inalveazione del Velino, di altre non si conosce l'origine. Si crede anche che siano scavi artificiali per moderare le escrescenze del fiume. Le fosse sulla destra del Velino sono scavate nella formazione concrezionare; la fossa di sinistra appiè del monte S. Angelo, chiamata Cor delle fosse, è profonda 15 a 16 metri, ha le ripe composte di sabbia calcarea finissima, indurita all'esterno da una specie di efflorescenza di cristallini di calce. Quella sabbia è zeppa di molluschi. Il sig. De Stefani nella raccolta inviatagli ha riconosciute le specie:

Bytinia tentaculata L.	*Valvata piscinalis* Müll.
Limnaea auricularia L.	*Neritina fluviatilis* L.
» *stagnalis* L.	*Planorbis complanatus* L. var.
» *palustris* Müll.	*Unio* . . . . . .

Il fondo del lago di Piediluco, presso la spiaggia, è formato dalla stessa sabbia finissima ricca di identici molluschi. La parte di pianura adiacente al lago è pure ricca di molluschi eguali, ma è coperta da uno strato di terriccio vegetale.

Nella porzione della Valnerina, tra Ferentillo e la cascata, stanno masse di marne, per rapporti stratigrafici discordanti dalle formazioni plioceniche vicine, ed addossate a queste ed alle roccie mesozoiche. Presso la cascata, in un lembo composto di straterelli di marne alternate colle sabbie, raccolsi dei molluschi, nei quali il De Stefani mi segnalò le specie stesse sopra citate, ad eccezione del *Planorbis* e della *Unio*, e con più

Helix adspersa Müll.	*Bulimus decollatus* L.

Vicino alla cascata si vedono per varî metri sopra al fiume masse caotiche composte di frantumi di pietra spugna e di alabastri.

Venendo alla conca di Terni, dagli scavi per le opere della Fabbrica d'Armi, ossia sul principio della valle, ho tratte le note seguenti:

Scavo per una nuova turbina dei fabbri. — Terra vegetale argillosa color rossiccio, intramezzata da uno strato di sabbia gialla fino a $2^m,20$ sotto al piano di campagna; da 2,20 a 4,90 sabbione giallo di detrito delle roccie concrezionari, con grossi erratici di alabastri e di travertino gialliccio. La massa è zeppa di rottami di stoviglie grossolane e mal cotte, di color nero. Nell'alluvione alcuni pezzi di ossa, dei denti di porco e di bove. Poi uno straterello di spessore variabile, e neanche esteso da per tutto, di terra color caffè scuro, somigliante alle pozzolane locali, zeppo di piccole elici, di bulimi e di altri molluschi. Segue, fino a metri 8 sotto il piano di campagna, sabbia calcarea bianca finissima, la quale passa ad una marna, con qualche nucleo di detrito delle roccie concrezionari. In questa zona ho trovato *unio*, ed alcuni pezzetti di terraglie lavorate. Poi incomincia la concrezione alabastrina già descritta.

Altri scavi nell' interno dello stabilimento. — Su questi riferisco i dati raccolti dagli scavatori. Fino ad una certa profondità stessa composizione del precedente. Ne

ebbi una fusajola, delle armi di bronzo, le quali il prof. Bellucci ritiene che appartengano all' epoca del ferro, denti di mammifero che il dott. Foresti riconobbe di *Equus* e di *Bos*. Segue il sabbione la sabbia calcarea bianca finissima, e la marna fino ad uno strato di ghiaia mesozoica, che costituisce lo strato impermeabile delle acque sorgive (108,65). Mi si riferisce che si trovavano spesso cavità di qualche metro cubo, e questo fatto mi fa dubitare, che sia stata incontrata la formazione alabastrina anche negli altri scavi,

Scavo per il canale di scarico. — Le ripe del canale di scarico mostrano da per tutto sabbione giallo, ciottoli e blocchi erratici. Dovendo spingermi fin sotto l'alveo del fiume, per le fondazioni dello sbocco, incontrai sabbione giallo sciolto, e blocchi grossissimi erratici di alabastro. In questa circostanza più specialmente dovei notare l' impermeabilità dell'alveo della Nera. Scavando nel sabbione sciolto fin sotto l'alveo a distanza di solo uno o due metri dal fiume, non penetrò nel cavo una stilla d'acqua. Anzi inondatosi il cavo per accidentalità, appena ristabilita la separazione tra l'acqua del fiume e quella che aveva riempito il cavo, questa immediatamente si perdè per vie sotterranee (1).

Il sottosuolo di Terni pur esso è formato dalla sabbia bianca finissima e dalla marna; il piano impermeabile delle acque sorgive è costituito da un banco di ghiaia mesozoica ora cementata, ora sciolta.

Da Terni, fino a metà della pianura tra Terni e Narni, la valle presenta sulla sinistra un terrazzo corroso dal fiume. Questo terrazzo, elevato pochi metri sotto lo strato di terra vegetale, è composto dalle sabbie calcaree finissime, provenienti dal detrito delle roccie concrezionari. In quelle sabbie ho raccolto delle *Neritine*, delle *Limnee* e la *Cyclostoma elegans*. Il fiume corre vicino al terrazzo e lo rasenta davanti Collescipoli. In quel punto notai che le sabbie di detrito concrezionare posano su strati di marna macchiata di bianco e di grigio, o meglio su marna male impastata, per forma litologica somigliante a quella che si vede nei colli pliocenici.

Nella parte bassa della valle (sempre pel tratto specificato) ho veduto un grosso strato di terra argillosa rossiccia zeppa di grosse elici e di ciclostome. Nella circostanza dei lavori pel ponte della nuova ferrovia Terni-Rieti, ho osservato sotto allo strato di terra argillosa sabbia grossolana con ghiaie e ciottoli insudiciati da incrostazioni nere, grossi blocchi di alabastro e di travertino giallognolo fin sotto l'alveo del fiume; poi circa m. 1,50 di materie alluvionali con sabbie e marne ricche di calce. In questo scavo vidi estrarre mattoni, un frammento di leucitoforo lavorato, e presso al fondo due chiodi di ferro ed un piede di vaso laterizio. Sotto si trovò lo strato impermeabile costituito da ghiaie mesozoiche. Anche qui notai che il piano delle sorgive è assolutamente indipendente dal fiume.

All' altezza dell' osteria di Montechiaro cessa sulla sinistra il terrazzo, e cessa

(1) Le acque sorgive della pianura di Terni non solamente sono indipendenti da quelle del fiume, ma sono anche diverse per proprietà chimiche. Le acque della Nera filtrate danno circa $^1/_4$ di meno di sali in soluzione delle acque dei pozzi. Venuto a Terni nel 1878, tra gli altri progetti trovai da studiare lo scavo di pozzi per provvedere i laboratori della Fabbrica d'Armi d'acqua potabile. Le osservazioni avendomi dato il risultato esposto, proposi di adoperare invece l'acqua del canale della forza motrice filtrata.

la formazione sabbiosa. Invece ho veduto sopra alle marne macchiate, fino a Narni, altre marne grigio-scure le quali si disgregano facilmente, zeppe di bulimi, di elici, di ciclostome. Fra le due formazioni sgorgano copiose sorgive.

Da notizie chieste sulle condizioni del sottosuolo presso la gola di Narni, mi risulta, che in quel punto i pozzi sono poco profondi, e la loro acqua si alza e si abbassa colle variazioni idrometriche del fiume; che gli edifici della stazione ferroviaria sono costrutti su palafitte e platea di calcestruzzo, perchè il sottosuolo presenta uno strato di marne poco stabile.

Allo sbocco della Nera dalla gola di Narni si vede un riempimento, formato da terre rosse miste a ghiaie rotolate ed a grossi blocchi di calcare del lias inferiore. La pianura quasi fino al Tevere è composta da terre rosse e ghiaie mesozoiche; presso al Tevere da terre rosse, ciottoli e ghiaie di calcari eocenici e di arenarie oligoceniche.

Le pendici dei monti sono coperte generalmente da masse di detriti scagliosi, mescolati a terriccio rosso proveniente dalla decomposizione dei calcari liasici. Ho osservato in varii luoghi, e più specialmente nei monti di Cesi e di Appecano, che le scaglie, disposte a mantello sulla falda del monte, sono fortemente cementate. Ho trovato un considerevole banco di quelle scaglie cementate anche sopra le colline presso Cesi. Su quelle colline, vicino al paese, si trovano sopra ai detriti vulcanici carboni, monete romane, vasi, laterizi ben cotti. Questi oggetti sono coperti da terre rosse e da scaglie rocciose. Sono piene di questi materiali le vallette situate sopra alle montagne, cioè il piano dei Rascini e del Cornino nel Cicolano; i prati di Stroncone, Cimitelle, Canepine, Cottanello, sulla catena occidentale della conca di Rieti, ed altre vallette nelle montagne di Narni, di Battiferro ecc. È notevole il fatto che, tra i colli di Cesi e quelli di Piedimonte e dell'Oro, si trova una profonda e larga depressione, nella quale scompare il materiale pliocenico, ed il terreno è tutto composto dal detrito quaternario. Il centro dell'avvallamento corrisponde al torrente che divide Torre Maggiore dai monti di Appecano.

In più luoghi della valle del Tevere s' incontrano materiali ciottolosi e terrosi delle formazioni plioceniche rimaneggiati, formare scarpata appiè delle colline. Ho già detto delle ghiaie di passo Corese mescolate ad elementi vulcanici. Ho detto che alla confluenza della Nera nel Tevere si hanno ghiaie eoceniche ed oligoceniche; queste si estendono fin sopra la stazione ferroviaria di Orte mescolate a terre rosse e bigie. Interessa ricordare che le ghiaie della formazione pliocenica dei colli soprastanti appartengono alle roccie mesozoiche. Da Orte in giù il piano e quindi le ripe del fiume sono composte da sabbia grigia finissima, e da strati di ghiaia.

Per il processo storico sono importanti gli strati di marne fossilifere di s. Lorenzo presso Amelia. Ad occidente della gola della Foce (una di quelle che tagliano trasversalmente la catena dei monti di Amelia), alla quota di 348 metri, si trova un grosso deposito di marne ricco di molluschi: nella raccolta inviatagli il sig. De Stefani notava le specie:

Helix cinctella Drap.	*Bythinia tentaculata* Lin.
» *ligata* Müll.	*Vivipara contecta* Müll.
» *profuga* Schm.	*Planorbis corneus* Lin.
Limnaea palustris Müll.	*Succinea putris* Lin.

aggiungendo che per le specie, pel loro insieme, per la mancanza delle forme plioceniche, non potevano appartenere che al post-pliocene, anzi alla sua parte più recente.

Una crosta di travertino copre gli strati marnosi; è scomparsa la chiusa per la quale avvenne colà quel ristagno di acque, ed il terreno discende da pertutto rapidamente, verso il fiume di Amelia e verso la Nera.

Il prof. Ponzi nel 1857 trovò presso Montoro le reliquie d'un *Mastodon arvernensis* Croix et Job in un sabbione calcare giallastro con elici, limnei ed altre conchiglie palustri e terrestri, sovrapposto immediatamente alla sabbia gialla pliocenica [1].

CAPO III.

SINTESI GEOLOGICA.

1. Mari mesozoici e riflessioni sulla disposizione stratigrafica attuale delle loro formazioni.

Quando principiai a riordinare le note sulla disposizione stratigrafica delle roccie mesozoiche, pensai di copiare tutti gli appunti presi nei viaggi: postomi all'opera, m'accorsi però che da tale metodo risultava un'analisi troppo trita e tediosa, disadatta a fermare l'attenzione sul complesso dei fenomeni. Allora preferii raggruppare le osservazioni, ommettendo molte minutezze di dettaglio: ma per quanto abbia curato l'ordine delle idee, la precisione delle parole, l'arruffamento delle masse è tale, che non può riescire facile il comprendere con chiarezza la condizione delle cose, anche coll'aiuto della carta e dei profili.

È un fatto certo che gli strati secondarî sono tutti composti di formazioni marine, e quindi si può asserire con sicurezza, che per tutto quel tempo il mare coprì il territorio esplorato. Però la differenza di composizione chimica e meccanica dei sedimenti, le varietà delle faune attestano che il fondo marino fu soggetto a diverse vicende.

Così i cerizi, le neritine e gli altri molluschi del lias inferiore, avviluppati da straterelli calcarei e ridotti a concrezioni pisolitiche, potrebbero indicare bacini salmastri di poca profondità, sotto ai quali scaturissero sorgenti ricche di carbonati alcalini. Le zone coralline dello stesso piano indicano bacini con acque alquanto più profonde, ricche di sali calcari, ma con i sali meglio distribuiti nella massa fluida. Aggiunta a tali osservazioni la mancanza di depositi detritici, e di rocce marnose; la presenza di strati di pura calcarea bianca priva di fossili, la quale, salve le cavernosità, assomiglia ad un travertino, mi sembra che il letto marino del lias inferiore si presenti generalmente poco profondo, variato per irregolarità prodotte dalle costruzioni coralline e dalle concrezioni calcaree, lontano dalla terra.

L'estendersi dei banchi corallini, lo sviluppo dei brachiopodi nella prima zona del lias medio, mi sembra che accusi un profondamento maggiore nel mare. Noto che la roccia di quel piano colorata più intensamente è vicina al banco pisolitico

[1] *Cronaca subapennina.*

a cerizi e neritine ([1]). Le brecciole della zona potrebbero forse attestare scogli madreporici demoliti dall'azione meccanica delle onde.

Procedendo agli strati superiori del lias medio, scompaiono i coralli; i calcari divengono marnosi; tra i brachiopodi appare qualche rara reliquia di ammoniti: poi quasi spariscono i brachiopedi, ed i sedimenti sono pieni di ammoniti, di belemmiti, di fucoidi. In questa zona il fondo marino mostra stràti di calcari marnosi bigi alternati con straterelli di schisti marnosi del colore medesimo. Le spoglie dei cefalopodi, le fucoidi sono trasformate in limonite. Tanto quegli strati, che gl'inferiori del lias medio contengono cristalli di pirite. La trasformazione delle reliquie dei cefalopodi in limonite però non è generale: vi sono spazî, sui quali gli avanzi di quegli organismi conservano il colore della roccia, sulla quale sono improntati. A Battiferro, sopra Stroncone ho veduti depositi limonitici tra gli strati calcarei del lias medio ([2]).

Gli schisti marnosi, disposti in piccoli straterelli tra i calcari, aumentano di potenza, e s'invertono le proporzioni: tra grossi banchi di schisti sono interposti piccoli strati di calcari molto marnosi. I calcari e più gli schisti sono pieni d'impronte di fucoidi. La massa da prima del colore naturale dei fanghi, si tinge poi di rosso e di verde, prevalendo secondo luoghi l'uno o l'altro colore, e spesso l'uno macchiando l'altro con pezze irregolari: i pochi calcari sono anch'essi per lo più pezzati, ma qualche volta conservano colore bigio uniforme. Le reliquie delle ammoniti, delle belemmiti, delle fucoidi non sono più trasformate in limonite, ma hanno il colore della roccia che le contiene.

Un fatto di cui è necessario tener conto è, che *spessissimo gli schisti ammonitici del lias superiore racchiudono soltanto frammenti di ammonite*, mentre nei calcari del lias medio sempre ho trovate intere le impronte delle conchiglie di quei cefalopodi. Altri fatti che credo interessante notare sono, che non ho potuto vedere alcuna reliquia di *Aptichi* nei banchi Ammonitiferi del lias medio; che negli strati del rosso Ammonitico del lias superiore, oltre al trovarsi frequenti le Ammoniti frammentate, si trova anche qualche Aptico; che negli schisti selciosi verdi sopraposti sono ancora più rare le Ammoniti intere, e sono abbondantissimi gli Aptichi. Ed infine devo ricordare la piccola zona di brecciole notate sopra gli schisti verdi ad aptichi sulla strada della Valnerina prima della Cascata.

Mi pare adunque che tutto il complesso delle osservazioni concorra ad indicare che, durante il lias medio si manifestò una oscillazione ascensionale, per la quale alla fine del lias superiore il letto marino si trovò soggetto all'azione meccanica delle onde.

I sedimenti sopra la poca brecciola della Valnerina indicano una trasformazione radicale del fondo marino. Tenuissime particelle calcaree vi compongono i calcari giallicci, senza alternanza di schisti marnosi. In questa massa appena qualche impronta

([1]) Presso lo stesso luogo si trovano i travertini quaternari di Carsoli diruta, e le acque ferruginose e solforose di San Gemini.

([2]) Potrei citare anche la ricchissima miniera di limonite e manganese del monte Penna; però i caratteri che presenta quella miniera, e specialmente il metamorfismo operato nelle roccie che contengono i filoni, mi fanno sempre dubitare che si tratti d'un fenomeno endogeno posteriore al sollevamento.

di piccole ammoniti. Però se esciamo dal territorio di Terni e Rieti, nei monti del bacino del Chiascio, sopra agli schisti selciosi del lias superiore, troviamo schisti marnosi di colore bianco sporco ricchi di ammoniti. Ma sembra che l'ambiente divenga sempre meno adatto alla loro vita: diminuiscono di numero, di dimensioni. Secondo il mio modo di vedere in questi fatti si avrebbe indizio di oscillazione discendente.

Ad un certo punto i calcari intercludono numerose fucoidi, le quali loro danno l'aspetto d'un bardiglio; di nuovo s'incontrano frequenti impronte di ammoniti, e di belemmiti. Dopo, i calcari si trasformano in veri schisti calcarei zeppi di fucoidi. Questa zona è più potentemente rappresentata nell'Apennino al nord: nel subapennino di Terni e Rieti se ne trovano pochi strati, ed in quelli non ho potuto vedere alcuna traccia di cefalopodi. Parrebbe adunque che in quel tempo la massa delle roccie, che compongono l'Apennino secondario, tendesse a sollevarsi maggiormente al nord del nostro territorio (1).

Schisti marnosi bigi, bruni, rossi, verdi coprono da per tutto i calcari. Abbondano in alcuni luoghi noccioli grossi di pirite cristallizzata. Nessuna traccia di molluschi.

Banchi di ippuriti costruiscono scogli nelle regioni sud-est; miliardi di foraminifere costruiscono i calcari bianchi cristallini, e le masse di calcari rosati della creta, tanto più potenti quanto più si procede verso il nord. Infine i calcari rosati sono coperti da una massa considerevole di schisti marnosi bigi, rosei e verdicci. Sicchè sull'ultimo periodo dei mari mesozoici, mi pare che il letto marino sia rimasto disposto con inclinazione discendente dal sud verso il nord.

Da tutte le osservazioni sopra esposte mi sembra di poter concludere:

1. Che il letto dei mari mesozoici (nel territorio), dal lias inferiore alla creta oscillò più volte ed in sensi diversi.

2. Che in complesso si può ritenere, che sempre fu coperto dalle acque, per cui da per tutto potè depositarsi la serie delle formazioni.

3. L'uniformità litologica e biologica, che si nota in ciascun piano della serie, testifica che, nonostante le oscillazioni, il letto marino si manteneva su tutto il territorio con proporzione relativamente costante di profondità. Il periodo della creta accusa la più notevole differenza di altimetria; non però divisione saltuaria di fondi alti e bassi, ma soltanto inclinazione uniforme del fondo marino.

4. Perciò le regioni, le quali si vedono prive di talune delle formazioni, o che appaiono presentare dei salti nella serie, non rappresentano isole, attorno cui si siano depositati i sedimenti dei mari successivi. Invece si devono ricercare le ragioni dell'anomalia negli avvenimenti posteriori.

Per rendersi ragione della maniera, come è risultata la disposizione stratigrafica nell'ossatura delle montagne, in seguito al sollevamento che seguì l'epoca secondaria, prima di tutto bisogna tener conto della differenza di proprietà delle zone della serie

(1) Bisognerebbe esaminare anche le formazioni del gruppo sibillino. Se queste concordassero colle osservazioni sul Penna e sul Catria, la inclinazione sarebbe da est verso ovest.

mesozoica. I calcari rigidi del lias inferiore, i calcari durissimi del lias medio hanno sopra gli schisti marnosi del lias superiore. Sopra questi sono altri calcari compatti, e sopra schisti selciosi. Agli schisti selciosi si sovrappongono i calcari compatti titonici; a questi gli schisti marnosi della creta, ed a questi i calcari compatti e cristallini della medesima epoca. La massa così composta non solamente è incurvata in un seguito di anticlinali e di sinclinali, ma quelle anticlinali e sinclinali sono costrette a disporsi secondo altre curvature sinclinali ed anticlinali, con direzione trasversa al piano della prima curva; mentre la massa già pochissimo elastica per la sua composizione e la enorme potenza di più migliaia di metri di altezza, deve riescire estremamente rigida dopo un primo ripiegamento. Per lenta e continua che sia l'applicazione delle forze, sembra impossibile che la natura abbia potuto giungere a tale risultato senza rotture: eppure in alcuni luoghi si vedono curve arditissime cogli strati interi. Però si può dire che questa è una eccezione, perchè generalmente gli strati sono spezzati e spesso addirittura frantumati.

Le formazioni degli schisti marnosi hanno dovuto recare grande aiuto nei movimenti delle roccie mesozoiche. Gli schisti per la maggiore facilità di potersi distendere ed adattare alle piegature, assottigliandosi nelle convessità, e rigonfiando nelle concavità delle curve, hanno moderati gl'increspamenti dei calcari compatti sovrapposti: di più, per la proprietà delle marne, hanno diminuito l' attrito delle masse dure, colla interposizione di materie lubricanti. Quel che accadeva in grande tra la serie delle formazioni, si doveva ripetere tra i diversi strati calcarei, quando si alternavano con straterelli schistosi. Si presenta simile circostanza specialmente nella zona del lias medio: ritengo anzi che, per questo motivo, si veda in quella zona molto minore sgretolamento, che non nei calcari titonici, abbenchè gli strati del lias medio si siano trovati in condizione più sfavorevole ed abbiano dovuto contorcersi estremamente, perchè molto più profondi, e perchè a contatto immediato coi calcari duri del lias inferiore.

La carta geologica ci presenta i vertici delle grandi anticlinali quasi sempre mancanti di qualche formazione, e di tante più quanto più forte è la piegatura. Invece nelle sinclinali spesso si vede la formazione superiore a contatto immediato di alcuna delle più profonde, senza la gradazione della serie. Se le sinclinali sono coniche, ed il vertice del cono corrisponde all'insellamento d'una anticlinale disposta traversalmente alla direzione della sinclinale, verso quel vertice la massa superiore è talmente schiacciata contro le inferiori, da sembrare che a loro sia sottoposta. Simile circostanza si presenta particolarmente nella gola di Narni, allo sbocco del torrente Serra, nelle ripe del torrente che da Belvedere confluisce nella Nera a Ferentillo. In quei luoghi pare che il lias inferiore si sovrapponga ai calcari rosati ed agli schisti della creta. Sui dorsi di alcune anticlinali si vedono tutte le formazioni; ma qualcuna così assottigliata, da accennare appena con una linea sottile la sua presenza: questo caso capita sovente pel lias superiore, e tra gli altri esempî citerò la cima delle penne di S. Andrea, di S. Erasmo e della Grotta del Miele nei monti di Cesi.

La ragione di questi e di altri fatti si ha nell'esame degli effetti meccanici, che devono risultare nei ripiegamenti delle masse.

Quando, nella anticlinale, la tensione è giunta al punto da vincere la resistenza

della elasticità, ed alcune masse sono costrette a spezzarsi sull'estradosso, i piani di rottura tendono a disporsi normalmente alle faccie dell'anticlinale, ed anzi, se lo sforzo, che piega gli strati continua dopo la spezzatura dell'estradosso, i piani di rottura possono anche formare colle faccie dell'anticlinale un angolo più o meno ottuso. L'angolo diedro dei due piani di rottura è eguale all'angolo dell'anticlinale oppostogli al vertice, più il doppio del complemento di quell'angolo. Pertanto una anticlinale, piegata con angolo di 50 gradi, avrà i piani di rottura estradossali divergenti con angolo di $50 + 2 \times 40 = 130^0$; una anticlinale piegata con angolo di 80 gradi, avrà i piani di rottura divergenti con angolo di $80 + 2 \times 10 = 100^0$. Quindi quanto più serrata è l'anticlinale, tanto più tende a risultare larga la spaccatura estradossale. Incominciata la rottura negli strati superiori, questi, dovendosi incurvare nella sinclinale adiacente sul punto dove presenta maggiore larghezza, dovranno scostarsi dal vertice dell'anticlinale più di quelli che li seguono: così via via, sinchè la salita delle anticlinali risulterà costituita da tanti scaglioni, ognuno composto dalle testate di una serie. È appunto quello che si vede su tutte le catene del sistema.

Nelle sinclinali, le masse comprese subiscono uno sforzo laterale tanto più potente, quanto più acuto è l'angolo della sinclinale. Questo sforzo può determinare degl'increspamenti al centro della massa, e facilmente produrre l'effetto che gli strati superiori si dispongano secondo una anticlinale, e coi loro lembi vadano a coprire le testate delle formazioni intermedie tra le due curve opposte. Oltre a ciò, si deve considerare che, quanto più si sale nella serie degli strati, tanto più ampio diviene il raggio di curvatura, perchè diminuisce lo sforzo comprimente; quindi in una sinclinale molto serrata, le cui anticlinali laterali siano state spezzate, molto facilmente accadrà che la formazione superiore copra le intermedie.

L'assottigliamento di alcune formazioni, sui vertici delle anticlinali, trova facile spiegazione nella composizione delle roccie, perchè si presenta negli strati schistosi, più compressibili e laminabili degli altri: talvolta l'assottigliamento dipende da parziale rottura della massa, e scivolamento di parte di essa nelle sinclinali adiacenti; talvolta quell'assottigliamento è solo apparente, perchè parte della formazione è coperta da altre scivolate dalle zone superiori. Indefinite sono le combinazioni stratigrafiche in relazione alle proprietà delle masse, all'ampiezza delle sinclinali, alla maggiore o minore ripidezza delle anticlinali; quindi le differenze di livello delle formazioni sulle pendici delle diverse catene ed anche di una medesima catena.

A moltiplicare la varietà delle combinazioni, risultanti dall'azione delle forze interne contro le proprietà intrinseche delle masse, s'aggiunge una potente forza esterna, l'acqua: o corra nelle sinclinali, o s'infiltri nelle anticlinali, e più specialmente ne inzuppi gli strati schistosi.

L'effetto naturale dell'acqua corrente nelle sinclinali è di scavare gli strati, finchè la pendenza dell'alveo glie lo permette. Così le ripe dei torrenti presentano le testate degli strati di una formazione disgiunti dalla corrosione. Tolto il contrasto della chiave nella concavità della curva, per conservare a posto gli strati sulla pendice del monte, non rimane che la resistenza opposta dell'attrito. Allorchè l'inzuppamento degli schisti marnosi produce una lubricità, la quale diminuisce l'attrito, le masse sovrapposte

scivolano verso il fondo della valle, lasciando sempre più scoperte, nel dorso del monte le formazioni sottoposte. Perciò nella costruzione dei monti hanno sempre grande importanza le zone degli schisti, le quali per le loro proprietà si possono chiamare piani di scorrimento.

Sembra che i piani di scorrimento abbiano agito in larga proporzione sul versante della valle del Tevere, nella concavità della zona tra il torrente Serra ed il monte Fionchi, nella pendice a levante delle montagne di Greccia, nella catena del Terminillo. In proporzioni minori se ne vedono gli effetti quasi dapertutto.

Oltre all'essere causa diretta degli effetti riassunti, l'acqua unita agli altri agenti meteorici disgrega le masse. Tale azione deve intaccare più specialmente le testate tronche delle formazioni addossate alle pendici del monte, e particolarmente di quelle più facili a disgregarsi. Così la valletta dei prati di Cottanello nei monti a ponente di Rieti, la valletta del Salto del Cieco nei monti tra Ferentillo e Leonessa, furono scavate nelle testate del lias superiore. Per lo stesso motivo si trovano frequentemente cariate e cavernose le testate raddrizzate del lias inferiore e medio.

Come nelle anticlinali così nelle sinclinali, quando la tensione supera la resistenza, si spezzano gli strati estradossali e quanto più l'incurvatura delle masse è forte, tanto più aperto deve riescire l'angolo diedro dei piani di rottura. La scienza ha dimostrato che per quelle rotture si fanno strada le manifestazioni del vulcanismo.

Ho già al principio enumerate le principali sinclinali longitudinali e trasversali. Caratteristica delle sinclinali trasversali doveva essere il trovarsi di tratto in tratto sbarrate dagli insellamenti delle anticlinali longitudinali, in modo che le acque non potevano stabilirvi un corso continuo, ma dovevano rimanere intercettate e costituire conche lacustri. Quindi la ragione del taglio di alcune serre prodotto dagli emissari di quei laghi.

Gl'increspamenti parziali abbondano da per tutto, e ne sono stati notati molti man mano nel processo della descrizione, come sono stati indicati gli effetti meccanici di sgretolamento delle roccie, prodotti da quegli sforzi e dall'azione dei piani di scorrimento.

Generalmente gli speroni delle montagne sono disegnati sulle curve delle increspature. Accade però di vedere acque che solcano una valle con direzione opposta alla inclinazione degli strati, come in alcuni torrenti del gruppo di Torre Maggiore e del Pizzo di Appecano; recise nelle dighe di displuvio le insellature delle anticlinali, si vedono congiungersi le acque di due valli opposte, ed esempî ne sono il fiume di Corese tra Nerola ed il monte degli Elci, il Farfa tra Fara e Poggio Mirteto, il Velino tra Sigillo ed Antrodoco, tra Repasto e la cascata; la Nera a Narni, ed a levante della valle di Terni; il Serra tra le sorgenti e la Rocca San Zenone. Anzi i bacini attuali dei torrenti Serra e Maroggia presentano ai Balduini lo spartiacqua nel mezzo della sinclinale. A volte uno sperone è segato lungo la linea di pendenza e normalmente alla medesima come si vede sul corso della Nera a Ferentillo, al monte di Pennarossa; sul corso del Tescino alla Castagna. Infine qualche

volta uno sperone è tagliato in due secondo la linea di pendenza, come m'è sembrato che accada generalmente nel Terminillo fino alla sinclinale del colle di Vaia.

Per i torrenti dei monti di Cesi, di Appecano ed anche del Terminillo è facile comprendere come si vedano le acque correre in certi tratti con direzione opposta alla inclinazione degli strati, perchè tra lo sbocco del torrente dalla montagna e le sue sorgenti stanno dei corrugamenti: perciò le acque hanno dovuto corrodere il ramo estremo della curva che sbarrava loro il libero deflusso.

Distrutta la barriera che divideva due valli opposte, secondo le condizioni reciproche delle due valli, le acque correranno tutte verso una delle valli, oppure si divideranno nuovamente in due displuvî, creando uno spartiacqua nella valle più elevata. Vedremo in seguito da quali cause si può presumere che sia stata prodotta la recisione trasversale delle catene, o degli speroni d'una montagna normalmente alle loro linee di pendenza.

2. Sistema oro-idrografico dopo il sollevamento dei terreni mesozoici.

Se ristabiliamo tutti i tratti di unione tra le catene mesozoiche, troncati man mano dalle vicende posteriori del territorio; cioè se riuniamo Nerola al gruppo di Fara, e questo alle montagne di Poggio Mirteto; il monte Porco Morto al monte Cascia, i monti di Narni a quelli di Amelia; se ricomponiamo la insellatura della Rocca S. Zenone allo sbocco del torrente Serra, e quella della Valnerina tra le Marmore ed i monti di Battiferro; se chiudiamo l'ultimo tronco del Velino, e ricordiamo che le valli del Salto e del Turano sono costruite da sinclinali; infine se ristabiliamo l'unione tra il Terminillo ed il monte di Cogito nella valle del Velino sopra Antrodoco, avremo sbozzate le linee generali del sistema oroidrografico che nel territorio di Rieti e Terni seguì il sollevamento dei terreni mesozoici.

Una gran sinclinale conica col vertice tra i monti Cascia e Porco Morto si estende verso il nord, le cui anticlinali laterali ad un dato punto si perdono sotto i depositi terziarî. Questa disposizione farebbe credere che sorgesse un fiume tra i monti di Narni e quelli di Cottanello, e dirigesse il suo corso verso settentrione.

Sul punto della Rocca S. Zenone aveva origine un'altra sinclinale conica, la quale si prolungava verso la valle di Spoleto e Foligno; sicchè un altro fiume per quella sinclinale poteva dirigersi al nord, per la via oggi solcata in senso opposto dai torrenti Serra e Maroggia.

Forse le acque tra il monte di Valle e Ferentillo, passando per la sella di Colle Oliva si dirigevano verso nord, e, congiunte alla Nera, sboccavano sopra Spoleto per la insellatura della forca di Cerro composta di roccie cretacee, tra il monte Fionchi ed il monte Maggiore. Nella insellatura di Colle Oliva ho notata l'altitudine di 703 metri, nella forca di Cerro 674 metri. Forse parte si dirigevano verso nord, e parte verso sud a confluire nella sinclinale di Rieti, passando per la forca dell'Arrone. La insellatura della forca dell'Arrone è alla quota di 543 metri: tra Colle Oliva, e

la forca dell'Arrone sta un'altra insellatura, quella di S. Silvestro, compresa tra il monte di Tripozzo ed il monte Petano, ed elevata alla quota di 711 metri.

Se sbarazziamo la massa alluvionale che sbarra al sud il lago di Piediluco; se rimettiamo a posto il lias superiore, il titonico, la creta sulla sinclinale, la quale dalla valletta di Campolagno, tra il monte di Valle ed il Pennarossa, prosegue per le Marmore, troveremo al nord dell'altipiano di Rieti le probabili sorgenti di un fiume, le cui acque, dirette al sud, avrebbero ricevuto all'altezza di Città Ducale il Velino, allora torrente di piccolo corso. A quel punto abbiamo verso sud le due sinclinali del Salto e del Turano: la prima si prolunga al bacino del Fucino; la seconda dal piano del Cavaliere, per Arsoli e Civitella, presenta un canale (oggi riempito dal terziario antico) fino alla valle del Sacco.

All'esterno delle conche si vedono chiaramente disegnate due sinclinali coniche e quindi probabilmente due antichi corsi: l'uno percorrente la valle delle Macchie al nord di Amelia, l'altro inalveato nella sinclinale dei monti di Narni tra il monte di San Benedetto ed il monte Cascia.

3. Le conche di Terni e di Rieti nei periodi eocenico ed oligocenico.

Dalla costituzione del primo sistema continentale che abbiamo accennato alla fine dei mari eocenici, per apprezzare gli avvenimenti geologici, sole traccie restano i lembi nummulitici di Schiazze presso Toffia e del vicino monte Calvo, nel quale quei residui sono elevati alla quota di 525 metri. Qualora si volesse tener conto dei frammenti di strati nummolitici, che trovai sopra Norcia alla quota di circa 960 metri, sovrapposti immediatamente agli schisti della creta (come quelli del monte Calvo), si potrebbe supporre che, alla fine dell'eocene, gran parte dei monti di Rieti e di Terni fosse coperta dalle acque. Però, accordata pure tutta la potenza che si vuole alla corrosione meteorica, non mi sembra possibile un denudamento così assoluto. Almeno si dovrebbero trovare indizi di formazioni eoceniche nelle vallette chiuse, esistenti sopra le montagne, dove potevano conservarsi meglio che non sul dorso del monte Calvo. Credo perciò che sul finire del periodo eocenico il mare sia penetrato, fino ad un certo punto, solamente nelle grandi sinclinali.

Nelle note prese gli scorsi anni, mi sembrò che gli strati eocenici della Valdichiana, contemporanei a quelli di Schiazze, come lo mostrano i caratteri delle roccie e le specie, discordino dalla formazione oligocenica sovrapposta; e mi parve di poter concludere tra i due mari interpolata una oscillazione della crosta terrestre. Le recenti osservazioni mi fanno dubitare di tale conclusione, ma ancora non ho potuto formarmi un convincimento assoluto su tale problema [1]. In nessun punto

[1] Recenti osservazioni m'hanno mostrato in più luoghi concordanza tra i calcari e schisti varicolori, i calcari e le breccie nummulitiche e le arenarie. Da queste indurrei, che l'apparente discordanza, che aveva notata in altri luoghi dello stesso territorio esplorato (Valdichiana ed Umbria) dipende dai contorcimenti maggiori subìti dagli schisti eocenici, e per le loro proprietà di struttura, e perchè posti nel piano inferiore della formazione, alla quale formano cappello le dure breccie nummolitiche e le arenarie.

del territorio di Rieti e di Terni ho potuto vedere i depositi eocenici sotto agli oligocenici. Anzi, nella valle di Lugnola, questa ultima formazione posa immediatamente sugli schisti cretacei, alla quota di circa 190 metri. Sicchè a poca distanza abbiamo un punto, dove l'eocene si trova a 525^m di altitudine scoperto dall'oligocene, ed un altro, dove l'oligocene posa a 190^m su terreni secondari senza l'intermediario degli strati eocenici. Queste quote sono molto importanti per dimostrare le variazioni altimetriche avvenute nel territorio dopo il primo sollevamento.

Rilegando le masse oligoceniche sparse nel territorio, chiaramente risulta che questo mare penetrò per tutte le grandi sinclinali. Però neppure pel mare oligocenico si hanno dati di qualche approssimazione per valutarne il livello. Prescindendo dalle masse dei suoi depositi, le quali alle sorgenti del Tevere si elevano all'altitudine di più che 1600 metri, nelle conche di Terni e di Rieti le quote della formazione sono straordinariamente differenti. Nella valle di Lugnola abbiamo i calcari screziati e le arenarie oligoceniche alla quota di 360 metri, in quella di Antrodoco a 958^m, in quella del Salto a più di 900 metri. Mancano le roccie oligoceniche nella Valnerina. In questa i sedimenti di San Liberatore, Collestatte, Torre Orsina, Montefranco sono posati addirittura sugli strati mesozoici. Forse la sella di S. Liberatore, non ancora distrutta, impediva al mare oligocenico di estendersi verso oriente.

Il mare oligocenico avrebbe occupata la depressione interposta tra la catena di Narni e di Amelia, e la catena dei monti di Stroncone unita a quella dei monti Martani; avrebbe coperto il bacino del Farfa, e probabilmente la conca di Rieti; si sarebbe internato nella valle del Salto, estendendosi da là fino al bacino del Fucino ed alla valle del Liri; dalla valle del Turano, pel piano del Cavaliere, Oricola ed Arsoli, sarebbe penetrato nella valle dell'Aniene, e da questa per Civitella si sarebbe disteso nella valle del Sacco, dividendo l'Apennino mesozoico in un arcipelago pieno di golfi, di canali, di stretti; e colla distribuzione de'suoi depositi confermando le induzioni, tratte dai corrugamenti delle masse mesozoiche, sul probabile sistema idrografico preesistente.

Al di là della valle del Tevere ho trovate le arenarie oligoceniche nei dintorni di Viterbo, a Toscanella, presso Corneto, ad indicare che ad occidente tutto il paese era sepolto sotto quel mare, restando forse scoperte le isole del monte di Cetona, del gruppo Amiatino, dei monti di Capalbio e della Tolfa.

Nelle roccie componenti i depositi oligocenici si presenta un materiale non esistente più in posto sul territorio, cioè la serpentina, la quale a Lugnola, ad Antrodoco compone brecciole con elementi di qualche millimetro di grossezza.

Ho riferito altrove che tra gli strati delle arenarie psammitiche e dei calcari screziati di Città di Castello, di Gualdo Tadino, nell'Umbria settentrionale, ho trovate puddinghe di ciottoli di serpentina; che tra le arenarie psammitiche di Monterale e dei monti di Paciano, nella Valdichiana, ho trovato brecciole di serpentina con elementi grossi anche più di cinque millimetri [1]. Però presso Città di Castello

[1] Nelle breccie nummolitiche di Monterale ho trovati ultimamente pezzi di serpentina grossi anche più di cinque centimetri.

stanno le note giaciture di serpentina delle sorgenti del Tevere; nella Valdichiana davanti ai monti di Paciano e Monterale, a distanza di circa 15 chilometri, scoprii le roccie ofiolitiche di Castiglioncello del Trinoro, del Poderaccio, del fosso Gragnano, di Allerona, del monte Rufino; e sembra che durante il periodo oligocenico, la porzione della catena di Cetona, la quale contiene quelle roccie, siasi conservata emersa: per cui nel bacino dell'alto Tevere e nella Valdichiana si comprende la genesi delle brecciole. A Lugnola, ad Antrodoco, mentre abbiamo le brecciole come nella Valdichiana, ci troviamo distanti più di 100 chilometri da tutte le giaciture di serpentina visibili, e di più divisi da quelle giaciture per mezzo di catene montuose. Scrissi anni addietro: «Piuttosto che ricorrere alla ipotesi del trasporto di elementi, i quali a volte hanno 4 e 5 millimetri di diametro, per mezzo delle correnti marine, a me sembra più probabile la supposizione, che siano scomparse le formazioni di serpentina nel bacino di Terni, di Rieti, e forse del Farfa per gli avvenimenti, i quali dipoi hanno cambiata la faccia di quei luoghi ».

4. Trasformazioni oro-idrografiche nei periodi miocenico e pliocenico.

Se estendiamo l'orizzonte delle osservazioni a destra e sinistra del territorio, dalla Valdichiana Romana alla valle del Sacco; ad occidente sulla zona dei vulcani tirreni, si vede: 1° che sulla valle del Tevere, da Baschi all'Aniene, è scomparso l'oligocene ed è sostituito dal pliocene marino; 2° che, nel versante mediterraneo dei rilievi vulcanici, le roccie oligoceniche sono elevate solamente 200 a 300 metri; 3° che alla estremità della linea, la quale segna il limite dei monti subapennini, l'oligocene è elevato sul livello del mare da 700 ad 800 metri; 4° che nel centro stanno le grandi vallate del Farfa, di Rieti e di Terni, riempite con materiali pliocenici e quaternari, mentre l'oligocene è rappresentato appena dal lembo di Lugnola, posto su una insellatura del sistema montuoso, ed elevato alla quota di 360 metri.

Queste osservazioni, il profilo delle formazioni oligoceniche delle valli del Salto, del Turano, dell'Aniene, del Sacco con quote decrescenti verso occidente; il grande sviluppo del miocene marino nel versante adriatico, e la mancanza di quell'orizzonte nel versante mediterraneo [1], mi fanno supporre che, nella valle del Tevere, il terziario antico si trovi depresso per cause sismiche, ossia per inclinazione delle masse componenti il sistema apenninico verso occidente, avvenuta nelle oscillazioni posteriori al mare oligocenico. Colmate le sinclinali dell' ossatura mesozoica dalle formazioni eoceniche ed oligoceniche, e mancati perciò alle acque correnti i profondi valloni che ne dirigevano il corso; supposto nei tempi miocenici il territorio sull'asse di discesa ed ascesa alternata delle coste adriatiche e mediterranee, quelle oscillazioni poterono essere la causa delle variazioni di corso dei fiumi e dei torrenti; le quali variazioni ritengo che abbiano prodotti alcuni dei tagli trasversali delle anticlinali che chiudevano le valli interne. Oggi, scomparse le formazioni di riempimento antico

[1] Estendendo fino ai due mari i limiti laterali del territorio, dalla parte mediterranea ho trovati gessi eguali a quelli di Bologna, Ancona ecc. (messiniano medio) solamente a Corneto pochi metri sopra al livello del mare.

delle valli, ci troviamo in presenza dei rilievi, quali presso a poco erano nella prima costituzione orografica, e perciò siamo costretti ad andare tentoni, per comprendere come le acque abbiano potuto tagliare trasversalmente quelle catene. Nel riassumere gli avvenimenti post-terziarî, si potrà dimostrare meglio quanto influiscano i sedimenti che colmano le vallate, durante le oscillazioni discendenti, nel variare i sistemi idrografici continentali.

Però la inclinazione del territorio verso sud-ovest non basta da se sola a spiegare gli avvenimenti della regione centrale, e bisogna ricercare nella azione meteorica e delle acque correnti, le ragioni della scomparsa in quei luoghi dei terreni composti nei mari terziari antichi.

La denudazione straordinaria dei depositi marini del terziario antico, ci presenta adunque il miocene nel territorio di Rieti e Terni, coi caratteri di un periodo continentale di durata lunghissima. Da Città Ducale a Fara, vediamo le valli del Salto piene di materiali oligocenici fino ad una certa linea, sulla quale sono troncati; e davanti quella linea, si trova un' estesa e potente massa di ghiaie, ciottoli ed altri depositi vallivi. Le ripe del Salto e del Turano, scavate per più di 400 metri su questa massa, qualche volta ne mostrano l' imbasamento sulle roccie secondarie, mai sulle terziarie. Nulla di terziario antico nella sinclinale tra la conca di Terni e di Todi, mentre ne ritroviamo le formazioni da Todi in su al nord, ed a mezzogiorno tra Aguzzo e Lugnola. Al sud di Lugnola, appena una traccia di arenarie oligoceniche vicino alla montagna tra Aspra e Rocca Antica, ma nessun accenno di terziario antico nel fondo della laia di Vacone, e la valle è riempita di materie fluviali, le quali si fondono colle plioceniche marine. Nè si può credere che la seconda massa abbia in massima sepolte le prime, perchè dove qua e là queste formazioni sono conservate, si presentano come nuclei isolati e troncati, senza indizio che scendano a sottoporsi ai sedimenti posteriori. Nella valle di Aguzzo, prima e dopo il nucleo oligocenico, troviamo i materiali vallivi pliocenici sopra gli schisti cretacei.

Profonda dovè essere la corrosione delle valli, considerata la quantità di depositi fluviali, agglomerati sulle medesime nella oscillazione discendente successiva. Colle altimetrie del sistema continentale attuale, e colle pendenze de' suoi fiumi, ancora le acque non hanno scoperto l'imbasamento dei depositi pliocenici nella pianura di Terni, nella laia di Vacone, tra Fara e Poggio Mirteto. Adunque, essendo considerato costante il livello marino, o l' altitudine delle valli mioceniche, alla fine della oscillazione ascendente, era più elevata dell'altitudine delle valli attuali; oppure i fiumi avevano un corso minore, perchè si dirigevano al mare per via più diretta, o perchè i confini del mare erano più vicini alla montagna. Un fiume che, da Fara si dirigesse in linea retta al Mediterraneo, con un metro di pendenza chilometrica, dovrebbe avere a Fara l' alveo alla quota di circa 60 metri, mentre per la lunghezza del corso del Tevere, il letto del confluente Farfa ivi è elevato a 148 metri. Per cui la soglia antica potrebbe essere sepolta anche per 90 metri. Però, supposto anche nel periodo miocenico il mare vicino alla catena subapennina, le acque della conca di Terni dovendo volgersi al nord, avevano un lungo percorso prima della foce; considerato che la pianura di Terni all'altitudine di 90

metri non accenna punto a vicinanza dell'antico fondo della valle, ritengo che quel piano si trovi sotto al livello marino attuale, e perciò che il territorio fosse in quei tempi considerevolmente più sollevato.

Il sistema idrografico miocenico ci lascia aperta senza più dubbio la comunicazione della Valnerina colla conca di Terni; la grande abrasione del materiale terziario antico, ci indica che la Nera, dal luogo di Terni, si volgeva al nord, per la sinclinale tra i monti di Amelia ed i Martani. Tra i monti Martani e i monti di Deruta, la Nera incontrava il Topino ([1]), unito al fiume le cui sorgenti erano alla Rocca di S. Zenone (presso Terni); presso Perugia confluiva nel Tevere, il quale usciva dal sistema montuoso per la valle del Nestore, nel territorio di Città della Pieve in Valdichiana ([2]).

La stessa prova del denudamento tra Città Ducale e Fara, c' indica il Velino, il Salto, il Turano, riuniti alle acque della conca reatina, percorrere il bacino del Farfa e sboccare tra Fara e Poggio Mirteto nella gran sinclinale della valle del Tevere.

I sedimenti della oscillazione discendente pliocenica, oltre a mostrarci scomparse alcune selle, ci presentano un fatto ben più importante, e cioè il distacco e lo sprofondamento di una porzione dei monti Torre Maggiore e Pizzo d'Appecano. Come abbiamo veduto nella descrizione stratigrafica di quel sistema montuoso, la faccia sud, da Cesi alla gola del Serra, presenta la testata tronca di strati variamente increspati ed inclinati verso il nord. Quella faccia si alza ripidissima più centinaia di metri sopra il pliocene ed il quaternario; nè sotto queste formazioni appare traccia della massa, che doveva completare l' anticlinale, ripiegandosi sulla valle di Terni. Non si può certamente ricercarne la causa nella corrosione delle acque. Abbiamo un piano di rottura nella anticlinale, che costruiva il rilievo montuoso; un piano di rottura nella sinclinale trasversale parallelamente al rilievo, e questo piano di rottura s' interseca coll' altro piano della sinclinale longitudinale. Mi pare che questa condizione di cose spieghi abbastanza perchè la massa, distaccata da tutte le parti, sia scivolata fino a sprofondarsi sotto la conca di Terni. Non è facile precisare il quando; ma il complesso dei fatti dimostra che tale avvenimento ha preceduto il periodo pliocenico ([3]).

In questa condizione di cose incomincia la oscillazione discendente pliocenica, spinta al punto, che troviamo, sulla pendice occidentale della catena subapennina, i suoi depositi marini fino alla quota di 428 metri; molto più elevati delle soglie di

([1]) Il Topino ha le sorgenti tra i monti Penna e Pennino; escito dalle montagne davanti Montefalco, colla Maroggia e col Clitunno, solca da sud verso nord la valle Umbra, ed unitosi al Chiascio confluisce nel Tevere a Torgiano. Pel suo corso pliocenico V. note citate.

([2]) *Movimenti sismici della Valdichiana* (Rendiconti r. Ist. lombardo di scienze e lettere, nov. 1877).

([3]) La conca di Gubbio presenta un fatto eguale nei monti mesozoici dalla parte di Gubbio. Della anticlinale che costituiva quei monti è rimasta solamente la metà nord-est, ed è scomparsa la metà opposta.

sbocco delle valli interne, senza che in queste si abbia traccia di organismi marini. Perchè potesse accadere un fatto tale, era necessario che, in proporzione della discesa del terreno, fosse costrutta una diga di chiusa allo sbocco delle valli, ed effettivamente vediamo quella barriera formata dall' ammontamento dei depositi fluviali.

Quando un continente discende lentamente, fino a sommergersi sotto il livello delle acque salse, il mare non può penetrare nelle valli se non poco alla volta, e la potenza della sedimentazione detritica delle acque correnti nella valle contrasta con molta efficacia l'ingresso alle acque marine. Anzi, se la valle ha fiumi di lungo corso, questi potranno avere una certa prevalenza sul mare mediante le deltazioni, perchè fanno concorrere i detriti di una regione estesa a sbarrare il canale. Per larga che sia l' apertura tra Fara e Poggio Mirteto (è circa 4 chilometri *misurata sopra ai depositi pliocenici*), la superficie scolante dei bacini del Velino, del Salto e del Turano è tale, da poter accumulare annualmente in quel luogo qualche milione di metri cubi di materiale a rialzare lo sbocco; tanto più che bisogna considerare che la sezione, per la figura triangolare, al basso tende a restringersi.

Perchè i fiumi possano proseguire a sbarrare le foci, devono alzare continuamente il livello delle valli interne; così il fiume che era incassato in una forra finisce per serpeggiare a capriccio in larga pianura. Il fiume allora diminuisce di pendenza e quindi di velocità; i suoi confluenti, che scendono impetuosi dal monte, devono lasciare sul piano, a poca distanza dallo sbocco, i materiali fluitati: sicchè per ostacoli sempre variati, si vedranno negli alvei tortuosità e cambiamenti frequenti; nella valle dighe di ciottolame delle conoidi alluvionali parziali, letti di ghiaie rotolate dal fiume e sparse nelle esondazioni, zone acquitrinose, paludi e stagni. Così difatti vediamo i riempimenti delle valli interne, formati da un miscuglio di banchi di ghiaie, ciottoli e sabbie; così tra le reti delle dighe ciottolose e sabbiose troviamo marne con fossili di acqua dolce e ligniti.

Segni caratteristici della foce dei fiumi sono le materie fluitate, la interclusione di lagune e stagni, tra la costa ed i cordoni littoranei costrutti dalla deltazione. Ricordiamo che la massa di ghiaie e ciottoli delle colline, tra Terni e Ferentillo, si ripiega a sinistra tra Collescipoli e Stroncone; che a destra, nella formazione contemporanea, abbiamo le marne e le ligniti dei colli dell'Oro; che tra i monti di Amelia ed i Martani, stanno abbondantissimi depositi di marne e sabbie; che tra questi, solamente a S. Gemini, è interposto per breve tratto un banco ciottoloso. Ricordiamo infine che, dopo qualche chilometro d'interruzione, (nel qual tratto si ha attualmente una valle profonda e larga), le ghiaie di Collescipoli trovano riscontro in quelle incassate nella gola di Configni, e queste presso Torri si fondono nei depositi con organismi marini. Mi sembra che tali fatti necessariamente provino che, nel periodo pliocenico, la Nera, giunta nella conca di Terni, piegò a destra, ed ebbe foce nel mare presso Vacone [1]. Se ora si rammenta che, in corrispondenza della gola di Fara, il Velino ha spinto nel mare un potente banco di ghiaie e ciottoli, risulta che sulla spiaggia del mare pliocenico, in uno spazio lungo circa 15 chilometri, si

[1] Il banco di ghiaie isolato di San Gemini mi sembra il residuo d'un gomito del fiume.

aveva al sud la foce del Velino, con direzione normale alla costa, al nord la foce della Nera con direzione parallela alla costa, e perciò normale al corso del Velino. L'effetto immancabile d'una tale disposizione doveva essere la interclusione d'una zona lagunare tra le due deltazioni, ed una certa spinta alle acque del Velino verso sud; quindi la creazione di altre lagune o stagni alla sinistra della sua foce. Difatti, al nord della foce del Velino, accanto alla spiaggia abbiamo le ligniti e le marne salmastre di Aspra; al sud le marne con unio e neritine tra Fara e Nerola.

Forse la causa principale, che determinò la Nera verso Configni, si deve ricercare nelle condizioni idrografiche, stabilite dalla oscillazione discendente, nella sua prima valle tra i monti di Amelia ed i Martani. Come è stato già detto, confluiva in quella valle il Topino tra il monte di Deruta ed il monte Martano, con direzione normale alla valle. Finchè la sinclinale era in corrosione, nel punto di confluenza le acque della Nera e del Topino potevano spingere bene avanti i materiali fluitati: quando l'interrimento giunse ad un certo punto, per la pendenza diminuita, dovè rallentarsi la velocità delle acque, e così i detriti lasciati dal Topino doverono man mano crescere di volume, finchè intercettarono il passo alla Nera. Da allora il tratto di valle tra Todi e S. Gemini si trasformò in una zona palustre, la quale colmarono le materie dei torrenti locali, insieme alle esondazioni del Topino al nord, e della Nera al sud.

Altri depositi fluviali e salmastri occupano estensione considerevole in corrispondenza dell' uscita della Nera dalla gola di Stifone. Riassumendo le note stratigrafiche, abbiamo in quella zona una serie di letti fluviali tra Montoro e la pianura del Tevere, disposti in tanti cordoni quasi paralleli alla spiaggia; dalla falda delle montagne a San Liberato, le ripe della Nera mostrano sabbie, dopo San Liberato, marne con veneri. Tra la costa ed il cordone estremo fluviale, sopra le sabbie, le ghiaie, le marne con veneri, stanno marne sabbiose con organismi salmastri, e sabbie così distribuite: da Amelia alla Nera molte sabbie e poche marne, gli strati marnosi sono spesso privi di fossili, tanto le sabbie che le marne contengono noccioli cavi e straterelli di limonite; dopo la Nera diminuiscono le sabbie, ed aumentano di potenza le marne sabbiose, finchè allo sperone di Otricoli quasi compongono tutta la formazione, e quelle marne sono zeppe di fossili salmastri.

Dal complesso delle osservazioni sulle formazioni marine, esterne alla gola di Narni, mi sembra che debba essere esclusa l' ipotesi, che quella gola potesse, fino dal principio del periodo pliocenico, dare passaggio alle acque della Nera, e confermata la supposizione che quando questo fiume fu costretto a deviare dalla prima direzione, dovesse volgersi verso Configni. Però le quote della sella di Narni, le condizioni della vallata tra i monti Amerini ed i Martani fanno ritenere che, verso la fine del periodo pliocenico, la Nera prendesse a correre su quella insellatura, e che così inalveata ne eseguisse lo scavo nel successivo periodo ascensionale del territorio. Credo che il banco di ciottoli di S. Vito e delle colline opposte, sulla destra del Tevere, siano la prova dell'abbandono della gola di Configni, e della inalveazione della Nera nella insellatura di Narni, prima della fine del periodo pliocenico marino.

L' esame della idrografia pliocenica dimostra, che la conca di Rieti doveva

necessariamente impaludarsi. Difatti le acque della conca confluivano con direzione ortogonale nel Velino e, presso quella confluenza, il Velino riceveva alla sinistra il Turano ed il Salto. Questi tre grossi fiumi dovevano colmare la valle comune con quantità di materiali proporzionata all' ampiezza dei loro bacini; nè era possibile che i pochi torrenti reatini procedessero di pari passo nel lavoro d' interrimento. Il corso d'acqua più grosso della conca di Rieti è il Rio di Santa Susanna; ma questo esce improvviso da sotterra e non porta detrito. Perciò, dopo un certo periodo, le conoidi alluvionali dei fiumi sbarrarono il passaggio alle acque della conca, come si è veduto accadere per le alluvioni del Topino nella valle tra i monti di Amelia ed i Martani. Chiuso alle acque reatine l' efflusso al sud, sepolti sotto le materie alluvionali, almeno in parte, il monte di Valle ed i Poggi di Piediluco; ossia stabilita una pianura comunicante tra le conche di Rieti e di Terni, quelle acque, ad un certo punto del periodo pliocenico, doverono dirigersi al nord e confluire nella Nera sulla conca di Terni.

Riepilogando pertanto le condizioni idrografiche alla fine della oscillazione discendente pliocenica, ossia al chiudersi del periodo terziario, abbiamo all' esterno della catena subapennina il mare con una spiaggia piena di lagune e di stagni; nel continente il Velino, il Salto, il Turano che, percorsa la valle del Farfa, si versano nel mare per la sella di Nerola, e per la gola tra Fara e Poggio Mirteto; la Nera che giunta alla conca di Terni si dirige al mare da sopra ai monti di Narni. La conca di Rieti, postasi in comunicazione con quella di Terni fa confluire le sue acque nella Nera; la regione palustre o lacustre tra Todi e Narni versa le acque nel mare per le insellature della catena che la chiude a ponente.

5. Trasformazioni oro-idrografiche dopo il periodo pliocenico.

Le condizioni idrografiche erano giunte al punto, che le acque del mare pliocenico già incominciavano ad invadere la conca di Terni, penetrandovi per la gola tra monte Arnata e monte S. Croce, allorquando il territorio incominciò nuovamente a sollevarsi.

Ancora non era compiuto il ritiro del mare pliocenico dalla vallata del Tevere, quando eruttarono le trachiti del monte Amiata, di Bolsena, del Cimino, di Bracciano (¹).

È un fatto singolare, la cui osservazione non conosco che sia stata notata finora, che tutti i centri d'attività del vulcanismo tirreno coincidono con una troncatura della catena esterna del subapennino. Il monte Amiata e Radicofani sono sulla linea della valle del Nestore; sulla linea della stretta del Tevere (tra Todi e Corbara) s' incontrano Bolsena e Latera; sulla linea della stretta della Nera, ed anzi di tutta la Valnerina, sta il Cimino e Vico; la Tolfa e Bracciano si allineano colla valle del Farfa

(¹) Lotti, *Nota su monte Amiata.* — Verri, *I vulcani Cimini.* Negli appunti raccolti sul sistema vulcanico di Bolsena, il cui ordinamento sospesi per poter sollecitare questa Memoria, ho notati i tufi trachitici, tra Acquapendente e Torre Alfina, a Bolsena, a Toscanella.

ed il corso superiore del Velino; la valle dell'Aniene, tra il monte Gennaro ed il monte Costa Sole, si dirige verso i vulcani Laziali; la valle superiore del Liri allo sbocco delle montagne ha vicini i vulcani di Pofi e Ticchiena; davanti allo sbocco del Volturno dalla valle d'Isernia è costrutto il sistema di Rocca Monfina; sulla direzione della valle di Piedimonte d'Alife, solcata dallo stesso fiume, s'innalza il cono del Vesuvio.

Come fu notato, l'angolo di rottura dei piegamenti anticlinali e sinclinali deve risultare tanto più aperto quanto più serrato è il piegamento; ed è ovvio notare che quanto più è aperto quell'angolo nelle sinclinali, tanto più facile sarà la comunicazione tra le forze agenti nell'interno della corteccia terrestre e la superficie esterna.

Per riguardo all'ampiezza della rottura, la sinclinale della valle del Tevere si trova in condizioni meno favorevoli delle sinclinali interne dell'Umbria per lo stabilimento di un sistema eruttivo.

Se, per gl'increspamenti del sistema, altre sinclinali trasversali vengano a concorrere nella curva sinclinale longitudinale, s'incrocieranno le loro linee di rottura, e nel luogo della intersezione la massa dovrà trovarsi nelle circostanze più adatte per le eruzioni vulcaniche. È questo, mi sembra, il caso della zona dei vulcani tirreni. Non posso veramente dimostrare la esattezza dell'applicazione del principio esposto ai sistemi del monte Amiata, dei monti Laziali, di Pofi, di Rocca Monfina, del Vesuvio; ma pel sistema Cimino e pel sistema di Bracciano, come per Bolsena, la disposizione stratigrafica delle formazioni nel territorio di Rieti e Terni, e nel monte Peglia, evidentemente mostra che le sinclinali trasversali della Valnerina, della valle del Farfa, e del gruppo Orvietano, prolungate devono tagliare la sinclinale tiberina.

La via delle due sinclinali, prima che incontrino la valle del Tevere, è tracciata da fenomeni di vulcanicità primaria, e da indizî almeno di rotture per le quali si manifesta all'esterno la circolazione delle acque attraverso formazioni più profonde.

Sulla linea della sinclinale trasversale, la quale prolungata incontra il sistema di Bracciano abbiamo i travertini di Rieti, i travertini e le sorgenti minerali di Città Ducale e di Antrodoco; presso al nodo d'incontro colle sinclinali longitudinali che passano per la conca di Rieti abbiamo la lava di Coppaeli. Sulla linea della sinclinale trasversale, la quale prolungata incontra il sistema Cimino, abbiamo i travertini e le sorgenti minerali di Recentino, le sorgenti minerali di S. Gemini, i travertini di Carsoli e di Piedimonte, le sorgenti minerali di Arrone e di Triponzo. Ricordiamo ancora, che presso al nodo d'incontro colla sinclinale longitudinale, tra i monti di Amelia ed i Martani, manca il displuvio meridionale dell'anticlinale che costituiva i monti di Cesi e di Appecano.

Il quadro finale della oscillazione discendente pliocenica ci mostra sepolta sotto i depositi vallivi la conca di Rieti, compresi in tutto o in parte i poggi che separano la valle del Velino dal bacino di Piediluco; sepolta sotto gli stessi depositi la conca di Terni, compresi i monti di Valle e Pennarossa fino a Ferentillo; quelle due pianure unite insieme all'altezza delle Marmore. Le quote della formazione pliocenica mostrano ad evidenza un tale fatto. Dai depositi e dalle considerazioni idrauliche

fu dedotto che, su quella pianura, prima le acque della conca reatina trovarono scolo più facile volgendosi verso la Nera, perchè i fiumi Velino, Salto, Turano ne intercettarono il corso colle loro conoidi. Le circostanze locali dimostrano, che simile stato di cose non poteva durare lungamente. Difatti nel Velino, diretto da Città Ducale a Fara, confluivano a sinistra ortogonalmente il Salto ed il Turano. Finchè il fiume riceveva a destra le acque reatine, spinto da forze opposte, poteva conservare la direzione naturale: rotto l'equilibrio, nè il fiume essendo incassato in una gola, ma vagando per una pianura in formazione larga parecchi chilometri, il Velino poco alla volta dovè essere spinto a destra, finchè coi suoi confluenti Salto e Turano si volse definitivamente verso la valle di Rieti, e divenne tributario della Nera.

Sistemato così il sistema idrografico per interrimento delle due conche, cominciò la oscillazione ascendente, per la quale i fiumi, allontanando dal mare le foci, necessariamente dovevano riscavare le vallate. In questo lavoro i fiumi dapprima scavarono l'alveo nel sedimento pliocenico per profondità considerevole: quando incontrarono sotto le ossature del sistema montuoso, lo scavo era a tal punto che simile intoppo non poteva più deviare il corso delle acque. Così il Velino incominciò ad aprirsi lo sbocco sulle origini di una sinclinale conica, dove un suo antico tributario aveva le sorgenti.

Dai monti del Corno scende un torrente di lungo corso e considerevole portata: il Rio Fuscella. La via naturale di quel torrente per confluire nel Velino era di passare sopra ai poggi di Piediluco.

Appena i fiumi escivano dal sistema reatino, naturalmente dovevano piegare a sinistra invitati dalla pendenza della valle ternana. La Nera, la quale nel periodo miocenico s'era scavato il canale sulla metà della sella tra il monte delle Marmore ed i monti di Battiferro, colmato quel canale col sedimento pliocenico, venne a confluire nel Velino, la cui corrosione le preparava l'alveo comune appiè del monte S. Angelo. Si può calcolare che quando i fiumi incontrarono le ossature rocciose delle montagne, avevano già scavate valli profonde 50 e più metri.

Dalla qualità delle formazioni ho dedotto, che per un certo periodo tra S. Gemini e Todi erasi formata una regione di stagni, nella quale si è veduto penetrare il mare per la gola tra il monte Arnata ed il monte Santa Croce. Contemporaneamente la Nera dirigendosi al mare per la gola di Configni, alzava la vallata da quella parte colla deltazione e colle esondazioni. Date queste circostanze, sepolta o quasi la sella di Narni sotto alle colmate delle alluvioni, si comprende come verso la fine del periodo pliocenico la Nera possa aver abbandonata la direzione di Configni, ed essersi volta direttamente al mare per l'insellatura di Narni, incominciando a stabilirvi il corso che conserva tuttora.

Avviati così i fiumi, per logica conseguenza, man mano che il terreno si elevava, lo scavo delle valli doveva essere più profondo, e non v'è difficoltà a comprendere come il rio Fuscella abbia segata la catena del monte Restano, il Velino abbia tagliata la pendice del monte S. Angelo; la Nera ed il Velino abbiano separato il monte di Valle ed il Pennarossa dal sistema adiacente con quella profonda e pittoresca spaccatura, e più avanti abbiano divisa la catena di Narni da quella di Amelia. La pendenza acquistata dalle valle reatina in seguito allo scavo delle Marmore si può valutare tra 9 e 10 metri per chilometro; ossia circa la metà della pendenza

dell'alveo della Nera, tra le Marmore e la pianura di Terni. Nell'approfondirsi della valle, incominciata la corrosione dalle roccie secondarie, i fiumi per un certo tratto solcavano un suolo cedevole, ed agli sbocchi incontravano roccie resistenti. Di più nel percorso sul suolo cedevole ricevevano grossi torrenti, molti scendenti con velocità dalle alte montagne adiacenti. Quindi e per la corrosione di quei torrenti, e per i facili franamenti delle ripe, e per le tortuosità del corso determinate dalle spinte stesse dei torrenti laterali, e per le difficoltà di deflusso attraverso le gole rocciose durante le piene, le zone di terreno cedevole dovevano riuscire scavate largamente.

Un tale periodo durò sì lungamente, che la conca di Rieti fu scavata in modo, che il piano della confluenza del Velino colla Nera giunse al disotto dell'alveo attuale di questo fiume. Altrettanto profondo dovè essere il taglio del monte Restano operato dal rio Fuscella.

A turbare questo processo regolare delle forze meccaniche sopraggiunsero avvenimenti, dovuti probabilmente alle manifestazioni esterne del vulcanismo.

Nel tempo che, sulla vallata attigua ad occidente, si spiegavano le imponenti forze sismiche colle eruzioni dei vulcani, il Velino cessava l'opera di corrosione per costrurre una barriera, la quale rialzò la conca di Rieti, e separò il corso inferiore della Nera dal corso superiore. Nel corso di geologia del ch. prof. Stoppani è notato, che sulle coste settentrionali della Giammaica, il *Roaring-fluss* o fiume muggente è estremamente ricco di bicarbonato di calce, la cui deposizione è tanto rapida, che la corrente improvvisa a se stessa scogli, argini e dighe, ed è costretta a mutare continuamente di corso, per sorpassare gl' inciampi che ella stessa si frappone per via. Che a chi giunge a Smirne s'affaccia un' immensa cateratta, alta 100 metri, larga 4 chilometri. Essa è la fronte di un enorme deposito calcareo che le acque alzano, strato sopra strato, precipitando, come fanno ancora, divise in parecchie cascate dal labbro dell'altipiano (¹).

Adunque in quel tempo i condotti sotterranei di circolazione delle acque, forse per l'azione del vulcanismo che agitava l'Italia media e meridionale, furono invasi da straordinario sviluppo di gas acido carbonico, il quale solvente permetteva alle acque di sciogliere grande copia delle roccie calcaree. Appena l'acqua si espandeva libera sul terreno, sprigionandosi il gas, e cessando nelle acque la virtù solvente, queste abbandonavano i minerali disciolti, formando masse di concrezioni, ed incrostando quanto incontravano per via. Così, al di là del Tevere, si costruirono immensi banchi di travertino nella regione vulcanica; nel territorio di Terni e Rieti furono costrutti i travertini che ho enumerati.

Le acque minerali della gola di Narni, incrostando le ripe del fiume e lo stesso materiale fluitato, crearono intoppi al suo libero deflusso.

Il Velino, alimentato specialmente dalle acque minerali di Antrodoco, di Città Ducale, e forse di altre sorgenti, oggi sepolte sotto i sedimenti quaternarî, in quei tempi dovè agire come il *Roaring-fluss*, incrostando virgulti, tronchi, ed ogni oggetto sommerso, ed improvisando a se stesso scogli, argini, dighe. Così dovè costruirsi

(¹) Vol. I, § 561-562.

quel primo travertino giallastro, i cui erratici ho notato dipoi formare nucleo ad altre incrostazioni.

Il Velino alle Marmore correva in gola angusta e profonda finchè durò il periodo corrosivo. Man mano che chiudeva a se stesso quella gola, il suo letto si ampliava, diminuiva la forza della corrente ed aumentava perciò il potere incrostante, aggiungendo ancora per facilitare l'evaporazione gli effetti delle cascate. La diga, così formata, si alzò sull'alveo di più che 160 metri, e si estese per più che 4 chilometri in lunghezza ed 1 chilometro e mezzo in larghezza.

Quella diga, che a guisa di ghiacciajo, dalla valle reatina si spingeva ad invadere la conca di Terni, doveva creare un intoppo alle acque della Nera, le quali erano perciò costrette ad allagare la valle superiore [1]. Non so quanto questo fiume possa aver concorso nella creazione delle scogliere alabastrine; è probabile però che ne abbia aumentata l'attività di produzione, favorendo cogli elementi calcarei disciolti che trasporta in sospensione, la facoltà incrostante del Velino. Le sorgenti minerali di Valnerina fanno supporre che anche la Nera dovesse aver copia di minerali in soluzione: è un fatto però che il fenomeno incomincia a svilupparsi solo dalla confluenza del Velino in giù.

La chiusa concrezionare della Valnerina, componendosi di nuclei sferoidali, conteneva dei vani, ed in questi vani ad ogni esondazione del tronco superiore erano precipitati alla rinfusa sabbie, ghiaie e ciottoli. Tanta però era la potenza incrostante del Velino, che, appena cessata l'alluvione, copriva con strato impermeabile i depositi incoerenti, e proseguiva le sue petrificazioni sopra quelli, senza dar tempo alle sue acque di cementarli. Così tuttora avviene, che non passi stilla d'acqua sotto l'alveo della Nera nel piano di Terni, benchè il suolo sia composto di detrito assolutamente disciolto [2].

Il processo contemporaneo d'incrostazione zonata mostra in piccola scala il processo antico. Le acque investono un oggetto e vi depositano uno strato calcareo. In un periodo, nel quale l'oggetto è all'asciutto, su quello strato si forma una pellicola tenace, e sopra questa vegetano muschi: succede altra crescenza, e si ripete altro strato; e via via finchè si costruisce un cilindro attorno un fusto coricato tra due scogli, od altra figura qualunque dipendente dalla posizione del corpo incrostato. Lo strato a volte è composto da una serie di pellicole, e quindi la struttura cellulare e meandriforme; le azioni chimiche durante la incrostazione o dopo, le pressioni degli strati ed altre cause possono generare la struttura fibrosa, e vitrea che fu notata negli alabastri più antichi.

Rimane il problema degli alveoli intercalati tra le zone alabastrine. Ne ho trovati anche nelle roccie dello scavo operato nella Fabbrica d'Armi, ma non ne ho

[1] Uso la similitudine per una certa somiglianza negli effetti d'invasione, non per intendere che la composizione concrezionare scivolasse da una valle all'altra.

[2] Le acque circolanti sotto al piano di Terni provengono in parte dallo scolo delle sinclinali mesozoiche, in parte dall'inzuppamento dei depositi pliocenici, in parte dalla irrigazione. Generalmente cresce il livello dei pozzi nell'estate, quando il fiume è in magra ed i terreni sono irrigati. Dopo la metà della pianura le acque scaturiscono sulla campagna, dove creano anche varî laghetti.

potuti osservare nelle composizioni recenti. Esaminando le sponde del fiume, m'è venuto qualche dubbio che quelle impronte fossero dovute a semi di pioppo, coi quali ho notata qualche somiglianza per figura e per dimensione. Ma questa osservazione non mi spiega il fatto di trovare quelle impronte così fitte e regolari, e meno l'altro di vederle adattarsi alle curve delle incrostazioni, talchè ne sono piene le zone sotto, lateralmente, sopra; insomma in tutti i sensi. Perciò mi sembra sempre più probabile attribuire quelle impronte ad origine animale; sia che quegli animali fossero secretori di calce, e colla costruzione delle celle contribuissero ad aumentare lo sviluppo dei tufi; sia che deponessero le larve sulle incrostazioni, e queste poi fossero coperte da altre materie incrostanti. Forse il colore vario delle zone dipende dalla decomposizione della materia animale di quegl' insetti; forse dalla vegetazione che investiva le zone nel periodo asciutto, forse da tutte due le cause.

A chi visita l' alveo della Nera all'asciutto, questo appare frastagliato di scogli e di cavità irregolarissime. Esaminando le cavità, vi si osserva che le ghiaie ed i ciottoli sono di preferenza appiattiti, anzichè ellissoidali. Il perchè è spiegato dall' agitarsi dell' acqua in quelle buche, e spiega come, nei depositi delle alluvioni antiche del fiume, le ghiaie ed i ciottoli assumano la figura di materiali lacustri anzichè fluviali.

Rialzato per la potenza incrostante delle acque il fondo della valle tra le Marmore e Terni, ho detto che la Nera doveva ristagnare nella contrada di Ferentillo, ed abbiamo testimonianza di tale ristagno colle marne lacustri quaternarie colà depositate. Non credo però che nelle epoche normali siasi alzato molto il livello di quel lago. L' enorme dislivello tra la sommità della chiusa e la valle di Terni, e quindi la considerevole pressione delle acque per l'altezza del battente, la irregolare costruzione della chiusa, dovevano aprire facile passaggio attraverso le cavità alle acque della Nera, e farle sgorgare nella conca ternana. Credo che a questa condizione di cose sia da attribuirsi la formazione della finissima sabbia di calcare concrezionare, che si vede tuttora distendersi fino a metà della pianura; e che le pisoliti, le quali si trovano qualche volta nei vani interposti tra i mammelloni alabastrini, siano dovute alla specie di ribollimento delle acque, che dal lago di Ferentillo, penetrando attraverso la chiusa, pullulavano nella zona inferiore. Come attualmente si vede nell' alveo della Nera le acque inabissarsi dentro sifoni, e, per la corrosione sotterranea operata dalle ghiaie e dai ciottoli, spezzarsi e precipitare sul fondo del fiume i massi delle concrezioni sporgenti sull'acqua; nella stessa maniera, in quei tempi, la Nera doveva lavorare a minare le costruzioni del Velino. Probabilmente nelle grandi alluvioni, non bastando gli orificî aperti nel corpo della chiusa, a dar passaggio alle acque del lago di Ferentillo, il suo livello si elevava sopra la chiusa, e da là le acque precipitavano con cataratta sulla conca di Terni, travolgendo enormi massi di concrezione, e depositando il sabbione grossolano, che non solamente riempie le cavità della chiusa, ma si estende sulla valle con piani diversi.

La condizione variata del tronco superiore doveva influire nell' assetto della valle, scavata dopo il periodo pliocenico. O perchè il fiume soggetto a tanti disturbi non

poteva più inalvearsi regolarmente, e portar via i materiali fluitati; o perchè le acque cadenti con gran velocità nella valle, perduta questa, non avevano forza di trasportare quei materiali; oppure anche perchè l'intoppo delle concrezioni di Recentino, nella gola di Narni, rallentava la corsa della Nera e ne diminuiva la forza, incominciò nella valle ternana un periodo d'interrimento, la cui potenza a Terni giunge a circa 20 metri.

Impedito dalle concrezioni del Velino lo sbocco libero delle acque reatine verso la Nera, queste ristagnarono nella conca di Rieti e nel bacino di Piediluco. Coll'alzamento del piano delle Marmore, le acque del Velino, nel confluire sulla Nera, spaziavano su una superficie di circa mezzo chilometro. Il fiume in media porta 60 metri cubi; quest'acqua, sparsa su considerevole superficie, doveva scolare in piccoli rigagnoli dall'altipiano.

Il suo potere incrostante, aumentato dalla grande evaporazione dovuta alla espansione, ed aumentata dalla divisione delle molecole nel cadere sull'alveo della Nera, fecero sì che, mentre dalla Nera, favorita dalle circostanze locali, era riscavata profondamente la Valnerina, per la composizione della pietra spugna e delle staslattiti, era rialzato sempre più il ciglione delle Marmore, e reso sempre più difficile lo scolo, finchè Curio Dentato vi provvide col primo emissario. Durante quel ristagno si composero le sabbie calcaree finissime delle Marmore ricche di *Bitinie*, *Limnee*, *Planorbis*, *Unio*.

Intanto che tali avvenimenti si compievano nelle conche di Rieti e di Terni, la valle tirrena era teatro di spettacolose eruzioni vulcaniche. Fino dal principio del sollevamento post-pliocenico eruzioni sottomarine distesero sul fondo del mare i tufi felspatici. Dopo quella eruzione, i sistemi vulcanici di Bolsena, del Cimino, di Bracciano vomitarono le lave felspatiche, poi le lave pirosseniche e leucitiche, poi i tufi leucitici. Colle lave, colle ceneri, coi fanghi fu costrutto attorno ai crateri il rilievo, che spartì le acque nella valle tirrena, e costrinse i fiumi, confluenti da levante e dal nord, ad inalvearsi parallelamente alla catena esterna del subapennino. Di tratto in tratto le eruzioni vulcaniche impedivano il deflusso libero delle acque, e per quegli intoppi si creavano parziali ristagni, dimostrati dalle marne d'acqua dolce di Borghetto e Civitacastellana, dalle ghiaie mescolate ad elementi vulcanici di quei luoghi, di Passo Corese ecc.

I vulcani, colle loro deiezioni, non solamente costrussero i rilievi che dominano nella valle tirrena, ma spinsero le loro ceneri nelle valli interne subapennine. I depositi di pozzolane sopra ai tufi alabastrini della Valnerina, i rottami di terraglie lavorate trovati negli scavi della Fabbrica d'Armi possono far supporre, che l'uomo abbia abitato queste contrade durante il periodo di attività dei vulcani tirreni. Inviati quei rottami al prof. Bellucci, mi scrisse: « Ho esaminate le terre cotte che mi hai mandato e le ho confrontate con altre che io posseggo, provenienti dai terreni circostanti Terni, e da taluni più a monte nella Valnerina. Quantunque non si possa esprimere un giudizio sicuro sull'epoca a cui le stoviglie frammentate inviatemi appartengano, pur tuttavia ti dirò quale impressione mi abbiano fatto e cosa io pensi

in proposito di esse. La maggior parte ha i caratteri della ceramica laziale, sia per l'impasto, sia per le forme, sia per il genere di cottura. Due frammenti se ne discostano, uno perchè anteriore, l'altro perchè avrebbe un aspetto e particolarità, che lo farebbero ritenere posteriore. Non tenendo conto di quest'ultimo, anche perchè il carattere, che lo fa allontanare dagli altri è quello dalla cottura, che potrebbe essere stata raggiunta a quel grado anche casualmente, la presenza del primo frammento si spiega colla natura del deposito, che tu mi accenni essere di trasporto alluvionale. — Per la conformità pertanto dei frammenti inviatimi colla ceramica laziale, io inclinerei a giudicarli contemporanei, ben inteso non in modo assoluto, perchè, dal semplice esame di frammenti, non si potrebbe dare un giudizio sicuro. E ritenendoli contemporanei è da rammentarsi che gli studî, fatti principalmente nella necropoli albana, hanno dimostrato, che le stoviglie rinvengonsi sotto gli strati vergini di peperino vulcanico e sono perciò anteriori ad essi. Risalgono ai primi secoli di Roma secondo taluno, sono anteriori di qualche secolo all'epoca romana secondo altri; e tenuto conto di tutto, credo che sia più presumibile quest'ultima maniera di vedere. — Comunque sia, qualche secolo più, qualche secolo meno, il loro posto nella serie cronologica è abbastanza fissato, ed io ritengo, ad eccezione di un frammento, che sicuramente è anteriore, che la generalità dei frammenti di ceramica inviatami risalga alla medesima epoca. Secondo le antiche denominazioni di età della pietra, del bronzo e del ferro, le stoviglie apparterrebbero a quest'ultima ed al secondo periodo di essa; il frammento anteriore può essere contemporaneo della così detta civiltà del bronzo ed anche di quella della pietra, ma non si può esattamente giudicare. Mi sembra però meglio ascriverlo all'epoca del bronzo di quello che all'epoca precedente. — La generalità dei frammenti inviati è formata a mano e non al tornio, da un impasto di terra non purgata, ha pareti abbastanza spesse, la cottura non è perfetta e fu fatta a fuoco libero. Taluni frammenti di stoviglie più fini sono fatti al tornio, l'impasto è migliore, la cottura è abbastanza buona. Questa mescolanza, che rivela diversità di destinazione delle stoviglie in un medesimo tempo, verificasi anche nella ceramica laziale ».

Per tutta la durata del periodo pliocenico, con un continente quasi per metà in formazione, mediante il riempimento alluvionale delle valli, con una spiaggia marina prossima, sulla quale i fiumi versavano altro detrito; quindi, con una massa di miliardi di metri cubi di terra in costruzione, non ho potuto vedere traccia dell'uomo. Eppure le condizioni dovevano essere propizie per la sua esistenza, e non potevano essere migliori per la conservazione delle di lui reliquie. Invece queste si trovano a profusione, appena si scavano le formazioni dell'epoca quaternaria.

Ho accennato che nella valle tirrena s'intersecano più linee di frattura sismica, convergendo le fratture trasversali verso la frattura longitudinale centrale: però nè le osservazioni, nè le induzioni mi danno motivo di ritenere che il Tevere, dalla confluenza del Paglia alla confluenza del Farfa, corra su una linea di rottura parallela all'Apennino.

Al nord di Orte il Tevere è incassato tuttora tra ripe plioceniche; al sud tra sedimenti quaternarî. Il fatto è spiegato dal protendimento della foce. Il prof. Ponzi

dimostra il prolungamento del delta tiberino nell'epoca storica di 12 chilometri ([1]). Quindi l'interrimento d'una lunghezza corrispondente della valle, unito al rialzamento d'alveo del Tevere fino ad Orte ([2]).

Però dicendo, che quel tronco della valle tiberina fu aperto dalla corrosione delle acque e non per frattura sismica, non intendo escludere il concorso dei fenomeni sismici nell'agevolare lo scavo. Ne abbiamo prova nei frequenti dislocamenti delle formazioni plioceniche a destra e sinistra, dovute ai movimenti delle masse secondarie sulle quali sono imbasati, ed alla azione del vulcanismo. Eguali dislocamenti si osservano nelle formazioni plioceniche che hanno riempito le sinclinali interne del subapennino, particolarmente vicino alle montagne nelle sinclinali più larghe. Ho citate di fatto le inclinazioni dei sedimenti vallivi pliocenici dei colli dell'Oro, di Cesi e di S. Gemini nella conca di Terni. Intendo solamente stabilire, che la valle del Tevere non dimostra lungo quel tratto nè una rottura sinclinale, che abbia spaccata la formazione pliocenica, ne una rottura anticlinale, per la quale quella formazione sia stata inghiottita.

Parlando del quaternario antico, resta a dire una parola sulle marne d'acqua dolce di S. Lorenzo, presso Amelia. Lo studio delle formazioni plioceniche ci mostra una laguna nel territorio d'Amelia, stagni nel territorio a levante della catena: ci mostra qualche tentativo del mare di penetrare per le gole e le selle della catena in quegli stagni. Questa condizione idrografica non poteva cessare, finchè il Tevere e la Nera avessero sufficientemente scavato l'alveo, da dare scolo alle adiacenti acque stagnanti, e perciò non mi sembra difficile comprendere, come, per un certo periodo, quei territorî siano rimasti allo stato palustre. Coll'approfondarsi della valle del Tevere, non solamente si rendevano più attivi gli scoli delle campagne vicine, e si prosciugarono le paludi esterne, ma le acque della Nera acquistavano forza per scavare le chiuse di Narni e Stifone, ed aprire definitivamente l'emissario attuale.

Pertanto i tratti caratteristici della idrografia, dal sollevamento pliocenico alla fine del periodo d'attività dei vulcani tirreni, ci mostrano la valle tirrena trasformarsi da golfo marino in terra di vulcani, e le acque, provenienti dal nord e dalle valli interne dell'Umbria, costituire un fiume tra la montagna ed i rilievi vulcanici.

Il Velino, il Salto, il Turano, abbandonata la prima direzione confluiscono nella valle di Rieti, e da questa nella Nera. La Nera, abbandonata la gola di Configni, sbocca nel Tevere attraverso ai monti di Narni. Stabilito questo assetto, coll'abbassarsi della valle del Tevere si abbassa quella della Nera, ed il fiume sega lo

([1]) *Il Tevere ed il suo delta.*

([2]) Il sollevamento dimostrato dalla zona di quaternario marino (70^{m}) tra Civitavecchia e Corneto, notata dal prof. Meli (r. Acc. Lincei 1879-80), e riscontrata da me stesso tra Corneto e Montalto, dove fossili marini mescolati a materie vulcaniche sono elevati parecchi metri sul mare, mostra che l'oscillazione ascensionale durò ancora nel periodo dei vulcani. Questo fatto però ha costretto il Tevere a scavare di più l'alveo, anzichè influire nell'interrimento del tronco superiore.

sperone del monte S. Angelo, e separa i monti di Narni da quelli di Amelia. Coll'abbassarsi della valle della Nera, il Velino corrode l'altro sperone a levante del monte S. Angelo; il Rio Fuscella per confluire nel Velino taglia i poggi di Piediluco. Approfonditi gli scavi, fin sotto al punto cui oggi vediamo tagliate quelle montagne, sia come conseguenza del vulcanismo, sia perchè la corrosione degli strati sprigionava acque circolanti nell'interno ricche di acido carbonico, incominciò il grande fenomeno delle incrostazioni. Il Velino, anzichè proseguire lo scavo della valle, colle petrificazioni chiudeva a sè lo sbocco, e tentava chiuderlo alla Nera ([1]). Per un certo tempo la potenza incrostante del Velino, superando la forza corrosiva della Nera, alzò nella Valnerina un'enorme chiusa di travertini e di tufi alabastrini; diminuita la potenza incrostante, la forza corrosiva ebbe il sopravvento ed incominciò la demolizione della chiusa, favorita dalla difettosa omogeneità della sua medesima costruzione. Questa demolizione dura tuttora, debolmente contrastata dalle petrificazioni contemporanee. Però non ancora le acque del Velino da per sè hanno forza di sbarazzare l'ultimo tronco della valle reatina, malgrado la potenza della chiamata di sbocco per una cascata di 160 metri, ed ancora dura la lotta dell'uomo per liberare dai ristagni l'altipiano di Rieti. Quel territorio si conserva sempre nella zona orientale allo stato lacustre e palustre, non ostante la copia di materie versatavi dai torrenti del Terminillo e delle montagne del Corno; è periodicamente sommerso del tutto nelle grandi escrescenze dei fiumi.

Benchè la chiusa tufacea della Valnerina sia considerevolmente abbassata, la Nera giunge alla pianura di Terni con pendenza considerevole del 18 per mille. La violenza del fiume spinge quindi al piano gran copia di materiali, che l'acqua poi non ha più forza di trascinare. I torrenti laterali, correnti sui dorsi ripidi delle montagne, e su colline composte di materiali detritici e non-rivestite da fitta vegetazione, versano nel piano altra abbondanza di grossi materiali. La gola di Narni, aperta in un periodo nel quale i terreni erano tutti coperti da foreste vergini, e perciò meno abbondante la mole del materiale detritico fluitato nelle singole piene, o più potente la spinta dell'acqua, si adatta male a smaltire le torbide attuali. Da queste condizioni nascono tortuosità nell'alveo del fiume sulla pianura di Terni, e particolarmente nel tronco inferiore. Sulla destra il fiume ha corroso il sedimento composto durante il periodo delle concrezioni: non per questo però ha potuto sistemare la valle per escavazione, perchè pel ristringimento di Narni è disadatto a smaltire nelle magre tutto il materiale, che esso ed i torrenti convogliano durante le piene. Sicchè sulla pianura di Terni, e più specialmente nell'ultimo tronco prevale tuttora l'interrimento allo scavo, e sono facili le esondazioni e le disalveazioni.

Sul principio di questa Memoria, ho detto che Strabone e Tacito parlano della navigazione della Nera, ed ho soggiunto non sembrarmi che avrebbe potuto eseguirsi la navigazione, senza adatte opere d'arte, delle quali non rimane traccia. Per ammettere la navigazione della Nera tra la confluenza nel Tevere e Narni, senza opere d'arte, bisogna supporre che in quei tempi la valle del Tevere fosse molto più elevata.

([1]) Credo che la cascata di Tivoli sia dovuta alle stesse cause di quella delle Marmore.

Da Narni alla confluenza della Nera, in linea retta, si hanno 12 chilometri, con dislivello di 42 metri circa, o sia la pendenza media di metri 3,50 per chilometro. Il limite massimo, che non si può eccedere per la navigabilità d'un fiume, è la pendenza di 2 metri per chilometro: quindi, perchè la Nera potesse essere rimontata senza opere d'arte, si deve ammettere che, da quel tempo ad oggi l'alveo del Tevere ad Orte, si sia abbassato almeno di una ventina di metri.

Nella serie delle vicende, tra l'allontanamento del mare pliocenico e la costruzione dei travertini e delle concrezioni alabastrine della Valnerina, risulta interposto un periodo di escavazione, nel quale i fiumi aprirono profonde e larghe vallate. Nel calcolarne lo scavo entrano due fattori: la potenza corrosiva delle acque, e la misura del sollevamento, la quale può anche dare un criterio del tempo impiegato nello scavo. Ristabilito l'orizzonte alluvionale, che livellava il territorio colle quote dei capi saldi, de' quali il piano stratigrafico non appare disturbato dai dislocamenti, gli scavi della Nera e del Velino sul luogo delle Marmore misurano non meno di 350 metri di profondità. Pertanto quando fu sospeso lo scavo, calcolata la profondità di questo e la pendenza chilometrica del tratto di fiume, sviluppatosi all'esterno sul fondo marino emerso, risulta che il territorio doveva essersi sollevato per più di 400 metri.

Nella conca di Terni le ceneri vulcaniche coprono alcuni colli pliocenici, ed tufi alabastrini, e mi sembra che quelle ceneri abbiano riscontro, al di là del Tevere, colle terre vulcaniche anteriori alle eruzioni leucitiche. Considerevoli masse di terre rosse mescolate a detrito scaglioso delle montagne, sono addossate ai prodotti vulcanici ed alle formazioni plioceniche. Sono scarpate di materiale di disfacimento, che scendono dai monti ad invadere la collina, non essendo sufficiente la forza delle acque correnti a trasportare al fiume quei materiali, staccati dalle roccie per effetto della corrosione meteorica.

Nei luoghi dove sono accumulati tali sfasciumi, e specialmente nella depressione in corrispondenza al torrente che divide Torre Maggiore dal monte di Appecano, i torrenti hanno l'alveo scavato in quella massa. La zona citata sarebbe importantissima, per dimostrare che vi fu un periodo, nel quale la potenza delle acque scavò una larga vallata sui depositi pliocenici, e che, cessate quelle condizioni, la corrosione meteorica ha preso il sopravvento sull'azione meccanica delle correnti. Però i dislocamenti del pliocene tra i colli dell'Oro, Cesi, Carsoli diruta e San Gemini, riferiti nella parte analitica, costringono ad andar cauti nell'azzardare simile conclusione.

Come si vede dai dati esposti, il problema se lo scavo delle vallate post-plioceniche sia dovuto a fenomeni di clima eccezionale, ovvero a lungo ma regolare processo di corrosione, è molto complesso per questo territorio. Bisogna tener conto d'un considerevole sollevamento, e quindi della durata di tempo in cui può essere avvenuto; della diversa resistenza dei terreni percorsi dai fiumi, e della influenza dei torrenti laterali che vi sboccavano, per le quali cause il fiume, costretto a frequenti cambiamenti di direzione, doveva slargare la valle; dell'influenza nello slargare la valle degli stessi torrenti, specialmente considerato l'impeto con cui precipitano da montagne di declivio ripidissimo; della influenza delle dislocazioni, avvenute

in qualche luogo nelle formazioni plioceniche delle colline: per la valle del Tevere, dell'influenza del vulcanismo, considerato anche solamente in ragione delle materie, colle quali nelle eruzioni inceppava il corso delle acque.

Su tutto il territorio non appare indizio di ghiacciai. Per quanto abbia osservati vati i valloni del Terminillo, non ho potuto scorgere nelle loro pareti segno caratteristico di quel fenomeno, tanto sviluppato nel sistema alpino.

6. Quadro riassuntivo delle trasformazioni oro-idrografiche nel territorio di Terni e di Rieti, dai mari liasici all'epoca storica.

Ad un certo punto del lias inferiore copriva tutto il territorio un mare, ed il fondo di esso si abbassava, così che i coralli estesero da per tutto gli steli, si moltiplicarono i brachiopodi: scomparve la fauna salmastra, la quale sembra avere abitato talune plaghe delle acque sottili. Cambiata direzione della oscillazione terrestre, cessarono in quel mare i coralli, ed alla fine dell'epoca liasica, nel fondo, ritornato soggetto all'azione meccanica delle onde, s'interrarono i gusci leggieri delle ammoniti.

Il periodo titonico rappresenta una nuova oscillazione discendente: lascia il territorio completamente sommerso. Sembra che il periodo cretaceo abbia trovato il fondo del mare inclinato dal mezzogiorno verso il settentrione, perchè al sud si hanno scogliere d'ippuriti, ed al nord calcari composti da infinite foraminifere minutissime. Con queste formazioni termina l'epoca mesozoica, e con essa l'uniformità degli spazî marini.

Su quegli spazî s'alza una gran volta, con rilievi variati per masse piegate e contorte in tutti i sensi. Le sinclinali, interposte tra i rilievi di quella massa, ci danno un'idea di quale poteva esserne il primo assetto idrografico. Intanto i mari dell'eocene medio bagnano il perimetro delle terre emerse, e sul loro fondo si genera la tuttora enigmatica formazione delle serpentine.

Diminuita la forza sollevante, la terra torna a discendere, ed il mare dell'eocene superiore e poi dell'oligocene penetra nelle valli dell'Apennino mesozoico, disegnandovi dei golfi e dei seni.

I depositi di questo arcipelago segnano l'ultima invasione marina nell'interno del territorio di Rieti e Terni. Segue un periodo terrestre, nel quale l'ampiezza e la profondità dello scavo delle valli indica la lunga durata di una oscillazione ascendente.

I depositi dei mari eocenico ed oligocenico hanno cambiata in parte l'orografia del primo continente, riempiendo le valli, e coprendo alcuni rilievi. Forse per inclinazione della massa sollevata risultò ancora differente l'altimetria rispettiva dei rilievi stessi. Le acque correnti, dovendo scavarsi nuovi alvei, probabilmente per la diversa inclinazione del territorio, tagliarono alcune delle anticlinali della prima ossatura mesozoica. Sembra che in questo periodo la Nera abbia scavata la sella tra

il monte di Valle e Battiferro, e sia penetrata nella conca di Terni; da dove l'ampiezza dello scavo fa presumere che si dirigesse verso Perugia. Il Velino ed i suoi confluenti contemporaneamente corrosero la catena tra Poggio Mirteto e Fara.

È probabile che la lava di Rieti appartenga ad un periodo vulcanico riferibile alle oscillazioni accennate.

Trasformato così il sistema oroidrografico, la terra torna a discendere fino al punto, che il mare pliocenico confina colla catena di Narni ed Amelia. I fiumi colmano con materie alluvionali le valli interne, e le trasformano in estese pianure. Il riempimento delle valli operato dai fiumi produce variazioni nella direzione dei loro corsi. Le conoidi alluvionali del Topino intercettano il passaggio della Nera: questa, abbandonata la direzione al nord, si volge al sud ed ha foce nel mare pliocenico per la gola di Configni. La sua antica vallata s' impaluda; e per la influenza di quella depressione, e per il seppellimento della insellatura di Narni, e per il rialzamento della foce, la Nera cambia ancora direzione e sbocca nel mare da sopra ai monti di Narni. Le conoidi alluvionali del Velino, del Salto, del Turano, tagliano la confluenza delle acque reatine: queste si volgono verso la Valnerina. La diversione delle acque della conca di Rieti squilibra le forze, che dirigevano il corso pliocenico del Velino verso Fara. Il fiume spinto dai confluenti di sinistra Salto e Turano, piega poco a poco a destra, finchè si getta nel territorio di Rieti.

Intanto la oscillazione ascendente post-terziaria allontana il mare dai monti di Narni e di Amelia, e costringe i fiumi a scavarsi nuove valli sulle antiche livellate dalle alluvioni. Avviato lo scavo su quelle alluvioni, secondo la direzione che nell' ultimo periodo avevano presa i fiumi, le acque incontrano sotto ai materiali detritici le ossature dei rilievi mesozoici, e vi moltiplicano le aperture. Il Velino taglia alle Marmore il monte S. Angelo; la Nera taglia a Ferentillo lo sperone del monte Fionchi, alla confluenza col Velino lo sperone del monte S. Angelo, alla estremità della conca di Terni divide i monti di Narni da quelli di Amelia. Il fiume di Corese scava la insellatura di Nerola, anch' essa rimasta sepolta sotto le alluvioni plioceniche.

Giunto a considerevole profondità il processo di scavo delle valli, le acque circolanti nell' interno delle formazioni scaturirono estremamente sature di bicarbonato di calce. Il Velino, alimentato quasi esclusivamente da quelle sorgenti, cessò di scavarsi l' alveo, e colle incrostazioni rialzò la valle propria e porzione di quella comune colla Nera. Quindi impaludamenti, creazioni di laghi, di cataratte. Rialzata di più che 170 metri la valle reatina, la forza incrostante del Velino principiò a decrescere, e la Nera potè con maggiore efficacia demolire quelle costruzioni. Il fiume seguita in tale lavoro, senza avere raggiunto ancora il fondo della valle precedente. Benchè diminuita la potenza petrificatrice delle acque, il Velino proseguì ad alzare la soglia di efflusso colla costruzione della pietra spugna e delle staslattiti, tanto che abbisognò l'opera dell'uomo, per moderare la tendenza del fiume a sollevarsi la soglia di sbocco, ed estendere l'impaludamento della

conca reatina, non impedito sufficientemente dalle colmate che vi versano i torrenti laterali [1].

Contemporaneamente ai fatti narrati, prima che le acque del mare plioceno incominciassero a ritirarsi dalla valle tirrena, incominciò in questa il periodo vulcanico coi tufi trachitici. Le successive eruzioni di quei crateri vi costruirono il rilievo che ne sparte le acque in due versanti. I fiumi apenninici, escendo dalle valli interne, scavarono la valle tiberina tra la montagna e quel rilievo. Il Tevere oggi, pel protendimento di foce, interrisce già quella valle generata dalla corrosione, e l'interrimento è spinto fino alla confluenza della Nera. Siccome un fiume scava la valle quando il mare si allontana in forza del sollevamento sismico, e la interrisce quando la spiaggia si allontana per la sola sedimentazione detritica, l'interrimento della valle tiberina indicherebbe cessata l' oscillazione ascensionale.

[1] Quando presentai questa Memoria alla riunione della Società geologica in Verona, per spiegare i tufi alabastrini, immaginava che le acque si fossero sollevate nella conca di Terni, dopo il periodo della sua escavazione. Perchè potesse avvenire un tale fatto, bisognava che la gola di Narni non fosse ancora aperta, e per conseguenza che le acque confluenti nella conca fossero inghiottite da caverne. L'ossatura mesozoica del sistema, la vicinanza della regione vulcanica, l'esistenza di valli di simile genesi mi confermavano in tale supposizione, contrastata però dalla mancanza di depositi lacustri quaternarî nel territorio, mancanza che aveva avuto cura di avvertire nello scritto. Gli scavi, fatti in quest'ultimo momento per la nuova turbina della fabbrica d'armi, m' hanno fatto ripetere ed estendere altre osservazioni, ed in base a queste ho sostituita l'ipotesi esposta, sembrandomi più in armonia colle premesse riferite nella parte analitica. Spero, con questa ed altre rettifiche, di aver soddisfatto il voto degli onorevoli Commissarî, ai quali colgo l'occasione di esprimere la mia viva gratitudine. Ringrazio particolarmente l'egregio prof. Taramelli, il quale coi consigli m'ha diretto nel difficile cammino di queste indagini, nonchè tutti quei Signori i quali m' hanno aiutato cogli studî parziali delle raccolte, i cui nomi sono notati nel corso dello scritto. Infine ringrazio i signori dott. Borghini, ed avv. Ettorre, i quali nel passaggio per Rieti e Leonessa mi furono larghi di cortesie.

ERRATA-CORRIGE

Nella carta geologica, sulla collina pliocenica al nord della conca di Rieti, leggasi 430 *invece di* 330.

II. *Contributo allo studio della fauna liassica dell'Apennino centrale.*

I.

Fossili dell' oolite calcare del Lias inferiore a *facies* di Gasteropodi.

Nel bacino inferiore della Nera e in quello del suo confluente Velino il Lias inferiore è rappresentato da un complesso di masse calcari con selci o senza e con brecciole. Questi depositi quantunque evidentemente ricchi di residui organici e specialmente di corallarî, nonchè di crinoidi, bivalvi e gasteropodi, pure non ne presentano di sufficientemente conservati così da poter essere in qualche modo illustrati. Solo mi parve di poter riscontrare il *Cidaris laevis* Can. e la *Chemnitizia pseudodotumida* De Stef.

Però, poco lungi da Cesi, al Lias inferiore sta connessa una formazione di oolite calcare, bianco-lattea, nella quale il capitano A. Verri scoprì una fauna, che parmi di poter giudicare come interessantissima. I campioni di roccia comunicatimi constano di una oolite poco uniforme nelle sue strutture ; ora è a grani minuti e rotondi, ora le concrezioni sono grossolane come pisoliti e irregolari di forma. Di solito il nucleo delle concrezioni non è evidente od è di natura incerta, ma in qualche caso scorgesi evidentemente che la deposizione del calcare si effettuò attorno a piccoli nicchi.

Comprese fra queste concrezioni, e specialmente più abbondanti dove le ooliti sono più grosse, riscontransi numerosissime e ben conservate conchigliuzze di gasteropodi e di bivalvi, con predominio dei primi. Sono già conosciute varie faune del Lias inferiore, nelle quali abbondano le piccole specie, e, fra esse, ricordo quella degli strati di Hierlatz e quelle del calcare delle montagne del Casale e di Bellampo presso Palermo ; ma questa, cui io accenno, presenta ancor più distinto il carattere della piccolezza. È una vera società di pigmei, in cui sono singolarmente numerosi certi cerizii elegantissimi e certe neritine, delle quali qualche esemplare ci porge ancora traccie di linee bizzarre, di macchie o di fascie colorate. Questi petrefatti però mostransi ora più ora meno mascherati da incrostazione calcare, di solito limitata

N.B. Questo studio deve essere considerato quale appendice alla Memoria geologica del capitano A. Verri sulle *Conche di Terni e di Rieti.* — Ad essa quindi rimando il lettore desideroso di maggiori ragguagli sulla stratigrafia di quella interessante regione. — I brevi cenni che premetto alle descrizioni dei fossili del Lias inferiore e medio sono gli stessi che, con poche varianti, furono già pubblicati, come nota preventiva, nei rendiconti del r. Istituto Lombardo di sc. e lett. — (C. F. Parona, *Sopra due piani fossiliferi del Lias nell' Umbria.* 1882).

quasi ad una semplice inverniciatura, ma in qualche caso così abbondante da rendere indeterminabile il fossile, che ne è ricoperto.

Singolare fatto codesto, il quale ci attesta che il fenomeno di incrostazione si compiva contemporaneamente alla vita di quei molluschi, la meschinità di sviluppo dei quali potrebbe trovare una ragione nella influenza dell'ambiente soverchiamente ricco di sali e quindi inetto al regolare sviluppo di organismi. Tale contemporaneità poi della formazione delle ooliti colla esistenza di organismi parmi abbia anche qualche valore come prova delle possibilità di una sedimentazione per via organica accompagnata da sedimentazione per via chimica, determinata dallo stato di soprasaturazione salina dell' acqua.

L'elenco dei generi e delle specie determinate e che descrivo più sotto basta per determinare all' evidenza la grande analogia, che lega questa fauna dell'Appennino centrale con quella veramente splendida della provincia di Palermo [1], descrittaci dall'illustre paleontologo siciliano, e che, per quanto mi consta, prima d' ora non aveva trovato altrove la corrispondente [2].

L'abbondanza poi dei cerizi e generi affini e specialmente delle neritine, e la mancanza di molluschi pelagici, quali le ammoniti, e di mare profondo, quali i brachiopodi, lasciano credere che la descritta oolite fossilifera siasi formata in mare poco profondo.

GASTEROPODI

Gen. **Palaeoniso**, Gemm.

Palaeoniso pupoides, Gemm.

Gemmellaro, *Sui fossili del calcare cristallino delle montagne del Casale e di Bellampo nella provincia di Palermo.* 1878, pag. 240, tav. XXII, fig. 40 e 41.

Conchiglia ovale, oblonga, pupoidea; le suture indistinte sulla parte apiciale non permettono di contare più di 7 giri di spira; l'ombelico non aperto; il margine ombelicale rotondato e circoscritto da un solco spirale. L'apice sembra leggermente piegato verso la parte della bocca, suture molto evidenti e profonde negli ultimi giri. Le strie d'accrescimento non si riscontrano nemmeno col sussidio di forte lente d' ingrandimento; però sono distinte talune strie trasversali variciformi.

Gli esemplari che ebbi in esame furono circa 20, quasi tutti con dimensioni molto vicine alle seguenti: lunghezza mm. 5, larghezza dell'ultimo giro mm. 2. 5. La piccolezza estrema degli esemplari e quella già accennata inverniciatura di sostanza calcare, che riveste la più parte dei petrefatti di questa oolite, mi impedirono

(1) G. G. Gemmellaro, *Sui fossili del calcare cristallino delle montagne del Casale di Bellampo nella provincia di Palermo* 1878.

(2) Dopo la pubblicazione della mia *nota preventiva* nei Rendic. del R. Istit. Lombardo il sig. dott. V. Simonelli ne presentava un'altra alla Soc. Tosc. di Sc. natur. sopra una fauna di Campiglia marittima corrispondente a quella di Cesi (*Fossili del Lias inferiore di Campiglia marittima.* Processi verbali. Adunanza 2 luglio, 1882).

di rilevare i caratteri suaccennati sopra tutti gli esemplari, i quali del resto mostrano una grande costanza di forma.

Palaeoniso Appenninica, Gemm.

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. cristall. delle montag. del Casale e di Bellampo nella prov. di Palermo.* 1878, pag. 241, tav. XXII, fig. 42, 43, 45, 46.

Un esemplare incompleto, costituito dai tre ultimi giri, per il che non è possibile verificare se la spira cresce sotto un angolo molto convesso. La superficie ben conservata permette di rilevarvi il carattere delle forti strie trasversali d'accrescimento ; le suture sono lineari e distinte ed accompagnate da tracce molto incerte di stretta fascia suturale. L'ultimo giro risulta un po' meno ventricoso di quanto appare nella figura della forma tipica siciliana: l'ombelico è largo ma otturato, come la bocca, da calcare. Misura nell' ultimo suo giro una lunghezza di 9 mm. ed una altezza 8 mm.

Probabilmente a questa forma devonsi ascrivere altri esemplari, la cui piccolezza estrema rende assai difficile il distinguerli da quelli spettanti alla *Pal. pupoides* Gemm.

Palaeoniso nana, Gemm.

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. cristall. delle montag. del Casale e di Bellampo nella prov. di Palermo*, pag. 242, tav. XXII, fig. 44; tav. XXV, fig. 1. 2, 1878.

Varî frammenti riferibili con dubbio a questa forma ed un esemplare molto più piccolo di quelli figurati dal Gemmellaro, ma che offre evidenti i caratteri distintivi di questa specie, quali le misure proporzionali, l'andamento conico della spira e l'ombelico larghissimo. Conservo anche un' altro individuo, il quale per le misure e per la forma dell' ombelico corrisponde esattamente a quello di maggiori dimensioni descrittoci dal Gemmellaro, ma sfortunatamente così incrostato di calcare da nascondere ogni traccia delle suture e degli altri caratteri della superficie.

Gen. **Chemnitzia**, d'Orb.

Chemnitzia (Pseudo-Melania) *Falconeri*, Gemm. (?),

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. cristall. delle montag.* ecc., pag. 364, tav. XXI, fig. 22 e 23.

Parecchi esemplari incompleti di forma pupoide, che presentano un angolo spirale alquanto maggiore di quello assegnato da Gemmellaro alla *Ch. Falconeri*. Sette giri di spira, alti, obliqui, leggermente convessi, con suture impresse. Apertura boccale guasta in tutti gli esemplari; conservato in taluni il lato columellare di forma esattamente corrispondente a quella della figura citata. L'esemplare meglio conservato e mediano per grandezza misura 14 mm. di lunghezza e 6 mm. di larghezza.

Riferisco con dubbio questa forma alla *Ch. Falconeri* Gemm., alla quale si assomiglia più che a tutte le altre affini.

Gen. **Pachystylus**, Gemm.

Pachystylus conicus, Gemm.

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. cristall. delle montag.* ecc. 1878, pag. 279, tav. XXIII, fig. 13; tav. XXV, fig. 16, 17.

Un bell'esemplare, ombelicato, conico-allungato, turricolato, della lunghezza di 27 mm., larghezza dell'ultimo giro di 5 mm., angolo spirale di 8°-5. Giri numerosi, oltre 14; non se ne può conoscere il numero esatto, perchè i primi sono, al solito, incrostati. Gli ultimi sono lisci e scavati nel mezzo, rigonfiati all'avanti ed all'indietro; suture lineari, distinte. Bocca quadrangolare, diritta, un po' più alta che larga, columella diritta, robusta, esternamente incrostata.

Oltre questo esemplare se ne rinvenne un altro più piccolo, che conta gli ultimi cinque giri.

Gen. **Cerithinella**, Gemm.

Cerithinella Stefanii, Gemm. (?).

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. cristall. delle montag.* ecc. 1878, pag. 287, tav. XXIII, fig. 38 e 39; tav. XXV, fig. 26.

Unico esemplare nascosto per un fianco dalla roccia, che ricopre anche la bocca; riesce quindi impossibile la determinazione sicura anche generica. Ha la lunghezza di 14 mm., larghezza dell' ultimo giro 4 mm. (?), angolo spirale alquanto minore dei 7°- assegnati a questa specie dal Gemmellaro, giri numerosi, bassi e fortemente scavati nella parte mediana. Le nodosità sono distinte sulla parte anteriore, indistinte o quasi sulla inferiore, precisamente come nelle figure citate. Le strie longitudinali e le pieghe trasversali invisibili, causa la struttura spatica del fossile e la vernice calcare. Le suture sono distinte in qualche tratto.

Cerithinella turritelloides, Gemm.

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. cristall. delle montag.* ecc. 1878, pag. 288, tav. XXIII, fig. 16 e 17.

Un esemplare incompleto, composto degli ultimi cinque giri, di dimensioni uguali a quelle dell'esemplare descritto e figurato dal Gemmellaro. La sottile incrostazione calcare della superficie non permette di rilevare rigorosamente i caratteri di ornamentazione, che del resto si intravedono; però la fisionomia distintissima della specie, la forma ed andamento delle suture non lasciano dubbio sulla esattezza del riferimento.

Gen. **Cerithium**, Brug.

Cerithium nerineaeforme, n. sp.

Tav. III, fig. 1.

Conchiglia alquanto pupoide, la spira consta di giri mediocremente alti, in numero di 12, i quali nella parte mediana portano una serie di nodi rotondeggianti, non attigui, ed all'avanti appena sotto la sutura un'altra serie di noduletti evidenti sui giri più piccoli e che svaniscono sugli ultimi. Le suture sono rilevate. La bocca

è quadrangolare, bassa, leggermente obliqua, terminata con un poco evidente canale debolmente curvato all' indietro; columella bassa, robusta, incrostata.

Ne esaminai dodici esemplari: quello più grande misura 14 mm. di lunghezza ed ha una spira di andamento pupoide marcatissimo (fig. 1); l' esemplare che porta meglio conservati gli ornamenti ha un angolo spirale di circa 9°, misura 9 mm. di lunghezza, il suo ultimo giro è largo mm. 3. 5, alto mm. 2. Questa forma ha qualche affinità col *Cerith. Frauenfelderi* Gemm. ed è molto vicino al *Cerith. heterocosmum* Gemm.; differisce però da quest' ultimo per l' andamento pupoide della spira, per la forma dei nodi e per la presenza dei noduletti nella parte anteriore degli anfratti, lungo la sutura.

Cerithium Gemmellaroi, n. sp.

Tav. III, fig. 2.

Conchiglia angolosa, lunga, con spira regolarmente crescente o alquanto pupoide, formata da 8 a 9 giri, ornati da 5 a 7 pieghe trasversali robuste e da 3 cingoletti longitudinali, i quali nei punti d' intersezione colle pieghe formano dei nodi rotondeggianti, appena distinto il mediano, saglienti gli altri due. Le pieghe trasversali di un giro non sono mai regolarmente allineate con quelle dei giri attigui, ma invece sono disposte per modo che le varie serie che ne risultano assumono un andamento obliquo all'asse della conchiglia; oppure le pieghe sono così spostate da disporsi alternativamente quelle di un giro con quelle degli attigui. La sutura è incavata. La porzione posteriore boccale dell' ultimo giro porta un solco marginale, accompagnato internamente da una sorta di cercine. Bocca leggermente obliqua, arrotondata; labbro esterno intaccato; columella incrostata, robusta.

Ne studiai oltre 20 esemplari: uno dei più grandi e il più completo, troncato di poco all'apice, ha una lunghezza di mm. 11. 5, l' ultimo giro misura mm. 2. 5 di altezza e mm. 3. 5 di larghezza l'angolo spirale di 10°.

Gli esemplari che presentano l'ornamentazione più regolarmente disposta e che offrono sezioni eptagonali, esagonali o pentagonali, a seconda del numero delle serie di pieghe, ricordano il *Cerith. pentagonum* D'Arch. dell' oolite, assai più del *Cer. pentaplocum* Gemm. Le misure proporzionali poi e la disposizione degli ornamenti li tengono distinti dal *Cer. Strueveri* Gemm.

Cerithium umbrum, n. sp.

Tav. III, fig. 3.

Conchiglia piuttosto breve, conica varicosa; spira di 7 a 8 giri, larghi, ornati di 9 pieghe trasversali, grossolane, disposte in serie poco regolari, a seconda dell'asse della conchiglia, intersecate da tre cingoli quasi indistinti, che producono al punto di incontro colle pieghe dei rigonfiamenti, dei quali l' inferiore è più sagliente. La parte posteriore dell' ultimo giro è ornato da costelle longitudinali; le suture sono profonde; la bocca grande, subquadrangolare, alquanto obliqua; columella tenue.

Questa forma, affine a parecchie specie varicose liassiche e giuresi, è rappresentata da una dozzina di esemplari: il più grande, che è anche uno dei meno

incrostati, ha una lunghezza di 9 mm., l'ultimo suo giro misura 3 mm. di altezza e mm. 4. 5 di larghezza. Angolo spirale 30°.

Cerithium Di-Stefanoi, n. sp.

Tav. III, fig. 4.

Conchiglia breve, costata, esagonale, spira rapidamente crescente di 6 a 7 giri, ornata di sei pieghe trasversali per giro, alte, disposte in serie alquanto oblique rispetto all'asse della conchiglia, intersecate da parecchi cingoletti longitudinali, esilissimi, dei quali però due più saglienti, si rilevano a nodo nell' incontro colle pieghe, suture incavate. Bocca ovale, con un piccolo canale all' indietro; columella tenue o incrostata.

Il migliore esemplare ha una lunghezza di 7 mm., l'ultimo suo giro misura mm. 3. 4 di larghezza; angolo spirale 26°.

Distinsi una trentina di esemplari di questo cerizio, il quale per la sua forma sta intermedio tra il *Cerith. pentaplocum* Gemm. ed il *C. Strueveri* Gemm.

Cerithium pleurotomaeforme, n. sp.

Tav. III, fig. 5.

Conchiglia conica, turrita, spira regolare di 6 a 7 giri, bassi, ornati longitudinalmente da un cercine regolare e robusto, incavati all'avanti ed all'indietro; suture distinte, rilevate. Bocca obliqua, subquadrangolare; columella tenue.

Sei esemplari, dei quali i più grandi molto incrostati di calcare; i due più piccoli sono i meglio conservati. Uno di grandezza media offre le seguenti misure: lunghezza della conchiglia mm. 7.; larghezza dell'ultimo giro mm. 3; angolo spirale 12°.

Gen. **Alaria**, Morris et Lycet.

Alaria Guiscardii, Gemm.

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. cristall. delle montag.* ecc. 1878, pag. 310, tav. XXV, fig. 50.

Lo stato incompleto dei 3 esemplari e la loro piccolezza non permettono di trarne una descrizione completa, tuttavia e per la forma della conchiglia e per la presenza dei cingoletti longitudinali parmi di poter escludere il dubbio ch'essi debbansi riferire a specie diversa. Osservo però che sull'ultimo giro dell' esemplare che porta anche quasi tutta la columella conto 5 non 6 cingoletti.

Gen. **Tylostoma**, Sharpe

Tylostoma Sellae, Gemm. (?)

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. cristall. delle montag.* ecc. 1878, pag. 313, tav. XXII, fig. 28, 29, 53 e 54.

Due esemplari che riferisco con dubbio a questa specie così comune nel giacimento siciliano; uno è piccolissimo e però poco si presta ad un esame per confronto, l'altro è di dimensioni mediocri, prossime a quelle delle fig. 28 e 29 succitate, ma siffattamente incrostato da non permettere una determinazione coscienziosa.

Gen. **Neritina**, Lamk.

Neritina oceanica, Gemm.

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. cristall. delle montag.* ecc. 1878, pag. 318, tav. XXIV, fig. 50 a 52, 55 e 56.

Una ventina di esemplari, di cui il maggiore non supera in altezza gli 8 mm. ed in larghezza i mm. 7. 5. Mantengono una forma abbastanza costante e più che ad ogni altra corrispondente alla var. *brevis*, rappresentato dal Gemmellaro colla fig. 50 della tav. citata. La spira consta di 5 giri, abbastanza ben appianati all'indietro, ma in nessun caso escavati; area columellare estesa, callosa, quasi piana. Finissime le strie trasversali d'accrescimento e qualcuna più sagliente.

In qualche esemplare l'andamento delle linee d'accrescimento è segnato da lineette, ondulate e interrotte, di color sepia.

Neritina italica, n. sp.

Tav. III, fig. 6, 7, 8.

Conchiglia sottile, obliquamente ovata; appena più lunga che larga; spira poco prominente, a rapido svolgimento, formata da 4 giri regolarmente convessi, dei quali l'ultimo costruisce quasi interamente la conchiglia. Bocca semilunare, rotondata all'avanti, acuminata all'indietro; lato columellare in parte nascosto da calcare, area columellare assai estesa, con callosità larga e piuttosto sagliente. Superficie liscia con sottilissime e regolari linee di accrescimento, in qualche esemplare colorate in giallo o in bluastro. Buon numero di esemplari mostransi ornati di bizzarri segni colorati in bluastro e in qualche caso in giallognolo; sono in generale macchie irregolarmente triangolari, formate da tante lineette attigue e parallele, racchiudenti degli spazi vuoti e confluenti le une colle altre (fig. 6). Un esemplare poi presenta larga fascia colorata in bluastro, svolgentesi lungo la sutura nella parte posteriore dei giri (fig. 8); un altro finalmente porta tre fascie svolgentisi longitudinalmente una lungo la sutura e le altre due sulla parte mediana ed anteriore (fig. 7).

Questa specie è rappresentata da una ventina di esemplari, il più grande dei quali presenta la lunghezza di mm. 7. 5 e la larghezza di mm. 6. 5.

Per la sua fisionomia è prossima alla *Neritina Beroe* Gemm.; ne differisce per il più rapido svolgimento della spira, per maggior sviluppo della callosità columellare, oltrechè per la presenza dei segni suddescritti. Quegli esemplari poi, che sono ornati da fascie colorate, ricordano anche la *Neritina liasina* Dkr. [1], differendone però per il diverso svolgimento della spira, per la forma non rotonda della bocca e per la presenza della distinta callosità.

[1] Dunker W., *Ueber die in dem Lias bei Halberstadt vorkommenden Versteinerungen.* 1846-47. Palaeontographica, pag. 110, tav. XIII, fig. 13 e 14 (non 15 e 16).

Gen. **Neritopsis**, Sow.

Neritopsis Sophrosine, Gemm.

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. crist. delle montag.* ecc., pag. 329, tav. XXVI, fig. 7, 8. 1878.

I rappresentanti di questa specie nel calcare oolitico della Penna di S. Andrea presentano perfetta somiglianza colla forma tipica siciliana per quanto riguarda la fisionomia generale, se ne allontanano però alquanto relativamente ai particolari della ornamentazione. Infatti sono ornati da 10 a 11 pieghe trasversali larghe, basse, rotondate, che si sfumano nella parte anteriore dei giri; il numero dei cingoletti longitudinali che le intersecano è soltanto di 7 od 8 e non più; ben distinti in un esemplare, mentre in un altro non si scorgono che delle rughe poco manifeste. Osservo però che i tre esemplari ch' io tengo in esame sono più piccoli di quelli illustrati dal Gemmellaro e che per di più portano anch' essi, come tutti gli altri nicchi di questo deposito, la lamentata verniciatura calcare, la quale potrebbe benissimo essere abbondante così da ricoprire e nascondere, se con tutti, almeno i più sottili fra i cingoli. L' individuo provvisto degli otto cingoletti, facendo astrazione della probabile ma non certa copertura di altri più piccoli, potrebbe essere considerato quale una forma intermedia tra la *Neritopsis Sophrosine* e le *Ner. Taramellii* Gemm., dalla quale tuttavia si distingue pel maggior numero delle pieghe trasversali, che per di più sono anche più basse e più larghe; carattere questo che la tiene distinta altresì dalla *Nerit. elegantissima* Hör. del Lias inferiore di Hierlatz.

L' esemplare più grande misura 7 mm. di lungh. ed 8 mm. di largh.

Neritopsis sp. ind.

Tav. III, fig. 9.

Conchiglia piccolissima, trasversalmente ovale, alquanto più lunga che larga, non ombelicata; spira poco prominente, formata di tre giri, di cui l' ultimo rigonfio assai. Bocca subrotonda, grande, labbro guasto, lato columellare con un leggero solco. I giri portano all' indietro lungo la sutura un solco piuttosto largo, svolgentesi longitudinalmente; nel resto i giri sembrano lisci visti ad occhio nudo, guardati però attentamente con lente a forte ingrandimento si scorgono traccie di cingoletti longitudinali, ed un esemplare presenta presso la bocca come l' inizio di pieghe trasversali.

Due esemplari; uno è lungo mm. 3. 5 e largo mm. 3, l' altro di dimensioni pressochè uguali.

Non conosco specie alla quale possa riferirsi questa bella forma, la quale ha qualche somiglianza colla *Nerit. Philea* D'Orb. del Lias superiore della Côte D'Orb. Non è però del tutto improbabile ch' essa rappresenti la forma giovanile della *Neritopsis Taramellii* Gemm., nella quale appunto l' ultimo giro è leggermente depresso ed escavato presso la sutura.

Gen. **Amberleya**, Morris et Lycett.

Amberleya Deslongchampsi, Gemm.

Gemmellaro, *Sui foss del calc. cristall. delle montag.* ecc., 1878, pag. 335, tav. XXVI, fig. 27 a 29.

Insieme ad un piccolissimo esemplare che potrebbe anche non appartenere alla *Amberleya Deslongchampsi*, ebbi in esame un bell'individuo indubbiamente spettante a questa specie (ved. fig. 29 succ.). Esso presenta le seguenti misure: lungh. 22 mm. (?), largh. 15 mm., angolo spirale 54°. È spuntato di tutto il primo giro; i quattro più mediani sono convessi e presentano degli ingrossamenti poco rilevati invece delle serie di tubercoli, i quali si fanno distinti, in numero di 11, soltanto sull'ultimo giro, che corrisponde in tutto alla descrizione del Gemmellaro. La bocca è tenuta nascosta da un pezzo di calcare.

Gen. **Turbo**, Linn.

Turbo Palmierii, Gemm.

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. cristall. delle montag.* ecc. 1878, pag. 348, tav. XXVII, fig. 10 e 11.

Unico e piccolissimo esemplare della lunghezza di mm. 3 e della larghezza di mm. 3. 5; i suoi ornamenti sono alquanto mascherati da incrostazioni calcare, ma tuttavia sufficientemente manifesti per non lasciare dubbio sulla esattezza del riferimento alla distintissima specie del Gemmellaro.

Turbo sp. ind.

Tav. III, fig. 10.

Conchiglia breve, alquanto più larga che lunga, largamente ombelicata, formata di giri (4) divisi da suture evidenti ma non profonde. I due ultimi sono ornati nella loro parte anteriore di larghe pieghe trasversali in numero maggiore di 10, l'ultimo giro porta nella sua regione di mezzo tre carene o cingoli longitudinali, intersecati da prolungamenti delle pieghe trasversali, le quali nei punti di unione colle dette carene formano dei grossi tubercoli. La base o parte anteriore dell'ultimo giro è liscia, vi si rimarcono soltanto dei dubbî inizî di pieghe al contorno ombelicale. La bocca è guasta e incrostata.

L'unico esemplare è piccolissimo, misurando mm. 3. 5 di lungh. e 4 mm. in largh. Ha qualche affinità col *Turbo Palmierii* Gemm.

Gen. **Emarginula**, Lamk.

Emarginula Meneghiniana, Can.

M. Canavari, *Sui fossili del Lias inferiore nell'Appennino centrale.* 1879. Atti Soc. Tosc. di sc. naturali, pag. 11, tav. XI, fig. 4 *a. c.*

Un solo esemplare piccolissimo (lungh. 4 mm.) che riferisco alla specie del Canavari anzichè alla *Emarg. Lepsiusi* Gemm., perchè presenta l'apice meno ricurvo e perchè è ornata di un numero maggiore di costicine longitudinali (circa 20). Credo

opportuno ricordare come il Canavari ([1]) non sarebbe lontano dal considerare la *Emarg. Lepsiusi* Gemm. quale varietà della sua *E. Meneghiniana*. La piccolezza estrema e lo stato di non perfetta conservazione del mio esemplare non mi permettono di intervenire ad esprimere un giudizio in proposito.

Emarginula sp. ind.

Tav. III, fig. 11.

Modello interno, a forma di berretto frigio, con base ad elissi, di cui il diametro maggiore (mm. 6. 5) supera l'altezza della conchiglia (mm. 3. 5). Il suo apice è curvato all'indietro; il lato posteriore è più ottuso dell'anteriore, di mezzo al margine del quale termina una carena ottusa ma abbastanza sagliente, che si diparte dall'apice e corre frammezzo a due solchi, i quali pure pongono capo allo stesso margine. Il resto della superficie appare perfettamente liscio.

ACEFALI

Gen. **Avicula**, Klein.

Avicula Janus, Mgh.

M. Canavari, *Sui foss. del Lias infer. nell'Appenn. centr.* 1879, pag. 14, tav. XI, fig. 5, 8.

Un esemplare solo e malconcio; tuttavia sufficientemente caratterizzato.

Gen. **Pecten**, O. F. Müller.

Pecten sp.

Tav. III, fig. 14.

Una sola valva più lunga (14 mm.) che larga (13), appiattita, ornata da circa 15 coste larghe, non toccanti l'apice, liscie, le quali verso la metà della lunghezza della conchiglia si biforcano e i solchi che separano le nuove costicine derivate sono meno larghi da quelli che dividono le vere coste. Mancano le orecchiette; è sconosciuta la superficie interna.

Questa *Pecten* per la sua forma allungata si avvicina a talune forme del *Pecten textorius* Schl. ([2]); se ne differenzia però perchè non presenta squamme, nè costelle trasversali.

Gen. **Macrodon**, Lycett.

Macrodon ? Pasinii, Gemm.

Tav. III, fig. 12.

Gemmellaro, *Sui foss. del calc. cristall. delle montag.* ecc. 1878-82, pag. 385, tav. XXIX, fig. 9 e 10.

Modello interno di valva, ad apertura subquadrangolare, rigonfia, troncata alla parte anteriore, più acuta alla parte opposta; la superficie porta due pieghe trasversali, grossolane, irregolari e qualche accenno a pieghe minori verso l'apice. Una distinta carena, che si stende dall'apice al margine anteriore, delimita un'ampia

([1]) M. Canavari, *La montagna del Suavicino.* 1880. Boll. Comit. geol., pag. 10.
([2]) Dumortier, *Ét. paléont. sur les dép. jurass. du Bass. d. Rhône.* Lias infér., tav. XIII.

area triangolare tra la parte convessa della valva e l'area legamentare, larga e appiattita. Il margine cardinale, diritto, non si potè isolare dalla roccia, quindi l'ignoranza del numero, disposizione e forma dei denti non permette di assegnare con sicurezza a questa forma il genere cui spetta. La superficie interna è sconosciuta. La larghezza è di 15 mm., la lunghezza è di 6 mm.

Gen. **Astarte**, Sow.

Astarte psilonoti, Quenst.

Tav. III, fig. 13.

Quenstedt, *Der Jura.* 1858. Lias α., pag. 45, tav. III, fig. 14. — Neumayr, *Zur Kenntniss der Fauna des untersten Lias in den Nordalpen.* Wien. 1879. Abhandl. d. K. K. geolog. Reichs., pag. 16.

Conchiglia piccola subquadrangolare, compressa ornata da numerosi solchi concentrici, con lunula abbastanza profonda; sconosciuta la parte interna.

Tengo in esame due esemplari di valva sinistra; la più grande è di dimensioni (lungh. 12 mm.; largh. 13 mm.) minori da quella figurata da Quenstedt, ma vi corrisponde perfettamente per la forma generale ed anche, per quanto lascia giudicare la parte conservata, per l'andamento e numero dei solchi. L'altra è molto più piccola (lungh. mm. 8. 5, largh. mm. 8. 5), e se ne allontana alquanto per la forma meno compressa e pel numero minore dei solchi, che risultano anche più larghi.

Gen. **Cardinia**, Agass.

Cardinia sp.

Tav. III, fig. 15.

Una sola valva destra, piccola, obliquamente subquadrangolare, piuttosto acuta posteriormente, alquanto rigonfia, appena più lunga (mm. 10. 5) che larga (10 mm.), segnata da due profondi solchi trasversali sulla metà anteriore. Sconosciuta la superficie interna.

II.

Lias medio.

È ricco di fossili determinabili, specialmente di brachiopodi e di cefalopodi. Dalle ricerche del signor Verri risulta che gli strati a *facies* di brachiopodi (a *Terebratula Aspasia* Mgh.) si stendono inferiormente a quelli a *facies* di cefalopodi (*Atractites orthoceropsis* Mgh.) fossilizzati in limonite, i quali alla loro volta sopportano degli schisti bigi e rossi, dei calcari marnosi con fucoidi e delle pseudo brecciole, che mi presentarono soltanto una rinconella indeterminabile e un turbo, che non potei riferire a specie nota. Superiormente si stende il Lias superiore a calcare rosso e a schisti verdicci con abbondanti ammoniti ed aptici.

Il risultato dello studio dei petrefatti del Lias medio concorda pienamente colle conclusioni, cui venne il dott. Canavari nella sua pregevolissima Memoria sui bra-

chiopodi degli strati a *Ter. Aspasia* nell' Appennino centrale [1]; ebbi però modo di osservare talune forme, che sembranmi degne di speciale rimarco. Così riconobbi la *Terebr. Taramellii* Gemm. ed il *Pecten Stoliczkai* Gemm. del Lias medio di Sicilia, fino ad ora non rinvenute nell'Italia centrale; riscontrai una spiriferina vicinissima alla *Spiriferina gryphoidea* Uhlig del Lias medio di Sospirolo nelle Alpi bellunesi, una terebratula, che richiama la *Terebr. aurita* Stopp. del Lias superiore di Lombardia e parecchie varietà di forme già descritte dal Canavari, fra le quali specialmente interessanti quelle riferibili alla *Ter. Cornicolana* Can. Mi si presentarono anche forme che dovetti tener distinte come nuove, quali la *Rhynchonella Verrii*, la *Rhynch. Capellinii* e la *Terebr. Canavarii*. Fra queste l' ultima offre un interesse affatto eccezionale, sia come forma affine alla *Terebr. Aspasia*, sia perchè presenta dei caratteri speciali, quali sono il solco nell' apice della grande valva ed il piccolo lobo nel seno della valva brachiale, pei quali si raggruppa con specie di piani molto più recenti, voglio dire colla *Ter. diphyoides* D'Orb., *Ter. sima* Zeusch.

Parmi anche degno di nota l'aver potuto stabilire la presenza del genere Leptaena negli strati a *Ter. Aspasia*. Sgraziatamente sono rappresentati soltanto da poche valve isolate, insufficienti per una determinazione specifica sicura: vi ha una forma che corrisponde abbastanza bene alla *Leptaena Davidsoni* Desl., un' altra, che presenta qualche carattere di affinità colla *Lept. liasiana* Bouch. e colla *Lept. gibbulosa* Gemm., tuttavia non tali da permetterne la identificazione.

Il rinvenimento di queste Leptaene mi aveva dapprima destato il sospetto che si potesse per esse stabilire qualche raffronto tra gli strati a *Ter. Aspasia* dell'Appennino e quelli a *Leptaena* del Portogallo [2]; i quali pure contengono ammoniti piritose. Ma fecemi tosto abbandonare questa idea la diversità delle due faune e specialmente l' assenza nei nostri strati delle specie caratteristiche per quelli portoghesi (*Koninkella liasina, Rhynchonella pigmea* e *Kingena Deslongcampsi*), come potei persuadermi col confronto di campioni, che devo alla gentile comunicazione del dott. Paolo Choffat, il chiaro geologo dell'Ufficio geologico del Portogallo. Siamo quindi sempre al disotto del Toarciano ed in maggiori rapporti colla fauna a brachiopodi del Lias medio di Sicilia e di Gozzano [3] (Prealpi Piemontesi), che il Canavari giustamente ritiene però alquanto più antica di questa dell' Appennino centrale.

I fossili del Lias medio di cui passo subito a far parola provengono da tre diverse località; da Papigno presso Terni, dalla Val Mandorla e dalla Grotta del Miele presso Cesi.

[1] Roma. Atti r. Accademia dei Lincei. Memorie della Classe di scienze fisiche ecc. Serie 3ª, vol. VIII.

[2] P. Choffat, *Étud. stratigr. et paléont. des terr. jurassiq. du Portugal.* Lisbonne 1882, pag. 20.

[3] C. F. Parona, *Il calcare di Gozzano e i suoi fossili.* Atti r. Acc. dei Lincei. Memorie della Classe di scienze fisiche ecc. Serie 3ª, vol. VIII. — Recenti rinvenimenti di fossili nel calcare di Gozzano mi fornirono altre specie, dapprima non rinvenutevi, quali la *Terebr. Aspasia* Mgh. e la *Spiriferina sicula* Gemm., opportune a raffermare la stretta affinità tra la fauna siciliana e la piemontese il *Pecten Rollei* Stolicz.

Fossili degli strati del Lias medio a *facies* di Brachiopodi.

BRACHIOPODI

Gen. **Leptaena**, Dalman.

Leptaena sp.

Tav. III, fig. 16.

Conchiglia involuta, arrotondata alla fronte, troncata posteriormente, più larga che lunga; valva ventrale regolarmente ed uniformemente convessa, con espansioni auricolari laterali, acute e ripiegate all'indietro verso la loro estremità. Apice quasi marginale, con forame rotondo, piccolissimo ma ben distinto. Superficie liscia. Linea cardinale, area e deltidio indistinti. Valva dorsale sconosciuta.

Ho in esame due valve ventrali; l'una libera nella sua superficie esterna, l'altra nella interna. La prima misura 15 mm. di larghezza, 9 mm. di lunghezza e circa 4 mm. di spessore: la seconda presenta dimensioni appena maggiori e le orecchiette, laterali alla regione cardinale, alquanto più ottuse.

Questa Leptaena, distinta per le sue grandi dimensioni, è vicinissima alla *Leptaena Davidsoni* E. Desl. (¹); dalla quale tuttavia differisce, perchè presenta la fronte più larga e meno curva e perchè le due linee che limitano le alette non sono oblique ai due lati dell'apice; l'area non ben conservata sembra un poco più bassa di quella della *L. Davidsoni*. Anche il dott. Canavari, cui comunicai per esame il fossile, è dubbioso se convenga ritenere questa forma come nuova o come spettante alla specie citata: egli mi fa osservare inoltre che, se si considera ch'essa fu raccolta nel Lias medio in un posto che appartiene alla provincia mediterranea, si potrebbe forse ritenere, se non come specie nuova, almeno come nuova forma, che precedette quella dell'Europa centrale o extralpina, cui deve rapportarsi la *Leptaena Davidsoni*, comparsa già nel Lias medio e sviluppatasi nel Lias superiore.

Proviene da Papigno.

Leptaena sp.

Tav. IV, fig. 16.

Valva ventrale a superficie leggermente zigrinata, più lunga (8 mm.) che larga (6 mm.), molto convessa, compressa ai fianchi; apice largo, basso, molto incurvato; linea cardinale breve, forma ai fianchi due espansioni auricolari piccole; area e deltidio indistinti; superficie interna sconosciuta.

Manca la valva dorsale.

Questa forma ricorda la *Leptaena gibbulosa* Gemm. del Lias medio di Sicilia, dalla quale si distingue specialmente per la mancanza del solco longitudinale: ha pure notevolissime somiglianze colla *Leptaena liasiana* Bouch. (²).

(¹) T. Davidson, *Supplement to the jurassic and triassic fossil Brachiopoda*. 1876. Palaeontograph. Society, pag. 91, tav. X, fig. 27-29. (*Upper Lias*). E. E. Deslongchamps, *Mém. sur les genres Leptaena et Thecidea des terrains jurass. du Calvados*. Caen 1853, pag. 9, tav. XI, f. 1, 2.

(²) E. Deslongchamps. Mem. cit. pag. 11, tav. XI, fig. 3, 4.

Leptaena (?) sp.
Tav. III, fig. 17, 18.

Valva piccola o dorsale, larga 11 mm., lunga 9 mm., distintamente convessa, a superficie minutamente fibrosa, così da assumere una apparenza vellutata; subquadrangolare, troncata nella parte posteriore, più larga e leggermente arrotondata alla fronte; le due porzioni laterali della regione cardinale si dispongono ad orecchietta; apice basso e non sorpassante la linea cardinale. Talune linee di accrescimento più saglienti ne dividono la superficie in zone concentriche. Nessuna traccia dell'area cardinale e della valva ventrale (fig. 17).

Altra valva dorsale (fig. 18) di dimensioni più piccole della precedente (lungh. 8 mm., largh. mm. 9. 5), convessa, a struttura fibrosa, subquadrangolare, troncata posteriormente, arrotondata alla fronte, regolarmente arrotondata ai lati, apice basso, sorpassante la linea cardinale. Le piccole porzioni di superficie esterna portano robuste e saglienti linee di accrescimento. Nessuna traccia dell'area cardinale, nè della superficie interna.

Provengono dai dintorni di Cesi; la prima da Val Mandorla, la seconda da Papigno.

Lo stato così incompleto degli esemplari, che si presentano infissi sulla roccia, non permette alcun riferimento sicuro, neanche generico. Però non parmi del tutto improbabile, come ritiene anche il collega Canavari, che le valve descritte possano spettare a questo genere.

Leptaena sp.
Tav. III, fig. 19.

Valva dorsale larga 12 mm., lunga mm. 9. 5, convessa, a superficie liscia, regolarmente arrotondata all'avanti e sui fianchi, troncata posteriormente, apice basso e non sorpassante la linea cardinale, scarse linee di accrescimento distinte. Nessuna traccia dell'area cardinale e della valva ventrale.

Fu raccolta alla Grotta del Miele presso Cesi.

Gen. **Spiriferina**, D'Orb.

Spiriferina rostrata, Schl. sp.

M. Canavari, *I Brachiopodi degli strati a Terebrat. Aspasia Mgh. nell'Appennino centrale.* 1880, p. 8, tav. III, fig. 10.

Un' unica valva incompleta, proveniente da Papigno, della larghezza di 35 mm., che riferisco alla forma già descritta dal Canavari, alla quale corrisponde pei caratteri della superficie e pel seno appena accennato: però la lunghezza è presumibilmente un po' maggiore.

Spiriferina sp. (cfr. *Spir. gryphoidea*, Uhlig.).
Tav. III, fig. 20 (*a. b. c. d. e. f.*).

Conchiglia grande, a contorni rotondeggianti, più lunga che larga, inequivalve. Valva perforata più rigonfia della brachiale, pianeggiante nella sua parte di mezzo, specialmente verso la fronte; apice alto e adunco all' estremità, area larga un po' meno

della metà larghezza della conchiglia, deltidio alto, stretto, alla base misura meno di $^1/_8$ della larghezza della conchiglia stessa. Valva brachiale convessa specialmente lungo la linea mediana, in corrispondenza dell'appiattimento della valva opposta, quasi accennando ad un seno e ad un rialzo. La commessura delle valve si inflette dolcemente verso la valva perforata, tranne nella parte di mezzo della fronte dove piega lievemente verso la brachiale. Ornata da sottilissime strie irradianti dall'apice; punteggiatura poco spessa, visibile senza il soccorso della lente, regolarmente disposta; sulle parti erose alla punteggiatura si sostituiscono segni a curve concentriche (anelli di silicizzazione). Linee di accrescimento numerose e salienti; lungo la parte mediana della valva perforata si incurvano fortemente verso la fronte.

I tre setti sono distinguibili in parte sulla regione apiciale della valva perforata.

Questa forma, che non si discosta moltissimo da talune varietà della *Spiriferina rostrata*, ha però le maggiori affinità colla *Spirif. gryphoidea* Uhlig. [1]. Anzi la riferirei a questa specie ove non presentasse l'apice assai meno adunco, l'area più demarcata e la fronte alquanto più espansa. Finora della *Spiriferina gryphoidea* non si è rinvenuta la valva brachiale, la quale, secondo il signor Uhlig, dovrebbe presentare una forma analoga a quella della valva brachiale della *Spirif. brevirostris* Opp.: ciò per verità non si riscontra nella forma da me descritta e quindi anche da questa parte si avrebbe un altro carattere differenziale.

Oltre l'esemplare descritto e figurato e una valva perforata più piccola provenienti da Papigno, ebbi in esame una valva perforata, rinvenuta alla Grotta del Miele, molto più piccola (lungh. mm. 23, largh. mm. 19), a superficie mal conservata e di forma in tutto simile alla descritta.

L'esemplare figurato presenta le seguenti dimensioni: larghezza 34 mm., lunghezza 40 mm., spessore 25 mm.

Gen. **Terebratula**, (Llhwyd) David.

Terebratula (*Pygope*) *Aspasia*, Mgh.

Canavari, *I Brachiopodi degli strati a Terebr. Aspasia Mgh. nell'Appennino centrale.* 1880, pag. 10, tav. I.

Due esemplari provenienti dalla Grotta del Miele, sufficientemente riconoscibili sebbene malconci; la loro forma trova un buon riscontro nella figura 2 della tavola citata (varietà *major* Zitt.).

Terebratula (*Pygope*) *Canavarii*, n. f.

Tav. IV, fig. 2 (*a. b. c. d.*).

Conchiglia molto inequivalve, più larga che lunga; valva perforata molto convessa nella parte mediana e, a cominciare dalla base dell'apice, rilevata in lobo, che va allargandosi verso la fronte, separato dalle due parti laterali, sensibilmente convesse, mercè due solchi ben distinti; tale lobo, convesso verso il margine frontale

[1] Uhlig V., *Ueber die liasische Brachiopodenfauna von Sospirolo bei Belluno*, pag. 15, tav. I, fig. 1, 2, 3. 1879, LXXX Band. Sitzb. der K. K. Akad. der Wiss., Wien.

è appiattito nel resto ed è provisto di un solco abbastanza profondo, che dipartendosi dalla estremità dell'apice si mantiene distinto per oltre la metà della lunghezza della conchiglia. Apice robusto, incurvato, margini affatto rotondati, falsa area strettissima e non ben delimitata, deltidio indistinto, forame rotondo, mediocre. Valva brachiale lateralmente pianeggiante con ampio seno longitudinale, che comincia a poca distanza dall' umbone, si allarga alla fronte ad occupare più di un terzo ed anche la metà della larghezza della conchiglia e ripiegando all' indietro abbraccia la fronte della valva perforata. Nella parte mediana di questo seno, dalla sua origine sino a quasi la metà della sua lunghezza, si riscontra, come corrispondente al solco del rialzo della valva perforata, un lobo rotondeggiante, più o meno largo e più o meno distinto, demarcato da due solchi laterali. Commessura palleale più o meno rotondata, sui lati leggermente inflessa verso la valva perforata, sulla fronte fortemente ripiegata ad arco o ad angolo. Linee di accrescimento regolari e parallele al margine palleale; punteggiatura della superficie finissima e uniformemente distribuita.

Le dimensioni dell'esemplare più grande e che presento figurato sono le seguenti: larghezza 27 mm., lunghezza 16 mm., spessore 12 mm.

Gli individui esaminati sono soltanto dieci; ne osservai però altri offrenti gli stessi caratteri, che mi si ruppero sotto i tentativi fatti per estrarli dai frammenti della roccia calcare bianca, durissima che li comprendeva.

La stretta parentela della forma descritta colla *Terebr. Aspasia* Mgh. risulta evidentemente dalla descrizione suesposta e stesa colla scorta di quella data dal Canavari per la stessa *T. Aspasia*: d'altra parte però non può sfuggire l'importanza dei caratteri differenziali, che mi hanno indotto a considerarla come forma affatto distinta e dei quali i più spiccati sono al certo il solco mediano nel rialzo ed il lobo mediano nel seno; caratteri giammai riscontrati nè sulla forma tipica, nè sulle varietà della *T. Aspasia*, nè sulle forme affini a questa ([1]). A proposito del solco nel rialzo, mi pare opportuno ricordare come io abbia già rimarcato un fatto simile sopra una forma del gruppo delle *nucleate*, rinvenuta a Camporovere negli strati a *Posidonomya alpina* e che, probabilmente a torto, descrissi come varietà della *Terebr. curviconcha*, che le è compagna ([2]). Altre differenze meno importanti tra la *Ter. Canavarii* e la *Ter. Aspasia* consistono nella comparsa, sulla prima di esse, del rialzo in maggiore prossimità dell' apice, nell' essere la linea commessurale laterale più inflessa verso la valva perforata e nella punteggiatura che presentasi ancora più fine, come ho potuto verificare col confronto di esemplari della *T. Aspasia* della Grotta del Miele, nonchè della Bicicola e di Arzo in Lombardia.

Il rinvenimento di questa nuova forma parmi di qualche importanza in relazione alle interessanti questioni sullo sviluppo e sulla successione dei brachiopodi. Già il Canavari nei suoi studî sui brachiopodi liassici dell'Appennino centrale e su altri

([1]) Credo conveniente avvertire il lettore che le considerazioni che seguono stavano già scritte nella presente Memoria, allorchè fu presentata alla R. Accademia prima che venisse pubblicato l'interessante studio del dott. M. Canavari sulla *serie della T. Aspasia (Beiträge zur Fauna des unteren Lias von Spezia*. Palaeontographica, Cassel, XXIX B. pag. 5. 1882).

([2]) C. F. Parona, *I fossili degli strati a Possidon. alpina di Camporovere* — (Atti Soc. ital. di sc. natur. vol. XXIII, 1880) pag. 26, tav. 5, fig. 16.

dell'oolite delle Alpi Venete, accennò alla importanza che potrebbero avere certe forme derivate (dalla *T. Aspasia* e da altri brachiopodi) nei tentativi che sarebbero a farsi per una classificazione zoo-cronologica in rapporto ai brachiopodi stessi. Ora a queste si dovrà aggiungere anche la sopradescritta specie: essa è strettamente collegata colla *T. Aspasia*, sì da farla ritenere o una sua forma derivata o, e forse meglio, con essa derivata da un medesimo tipo. Se si bada specialmente alla costanza degli importanti caratteri relativi alla conformazione della regione apiciale, si può credere che la *T. Aspasia* stia a capo di quella bella serie di specie, nucleate che ebbe rappresentanti in varî piani del Lias, nel Giura superiore, nella Creta e che è tuttora rappresentata nei mari attuali dalla *T. Wyvillei* Dav. Analogamente se consideriamo le modificazioni descritte nei caratteri dell'apice, le quali nel Lias ci si presentano per la prima volta in questa *Ter. Canavarii*, si vede ch'esse non sono transitorie ma bensì persistenti tanto da conservarsi sino nel Giura più recente e nella Creta, dove simile conformazione dell'apice la si trova riprodotta e nella *T. sima* Zeusch. nella *Terebr. diphyoides* D'Orb. Il dott. Canavari, cui comunicai uno schizzo del brachiopodo in discorso, mi scrive per modo da confermarmi nelle idee suesposte. Egli si esprime come segue: « essa è certamente una forma nuova della *T. Aspasia*, forse la prima diramazione del sottogruppo della *T. diphyodes* e della *T. sima*, al quale appartiene anche la *Ter. subcanalis* Suess. (non Münster) ».

Questa forma finora venne riscontrata solamente a Papigno.

Terebratula (*Pygope*) *Cornicolana*, Canav.

Tav. III, fig. 21 (*a. b. c.*), 22 (*a. b. c. d.*); tav. IV, fig. 1 (*a. b. c. d.*).

Canavari, *Alcuni nuovi Brachiopodi degli strati a Terebr. Aspasia Mgh. nell'Appennino centrale.* (Atti soc. tosc. sc. nat.). 1881, pag. 6, tav. IX, fig. 6, 8.

Un esemplare proveniente da Papigno corrisponde abbastanza bene nella generalità dei caratteri alla forma descritta dal Canavari, tranne che nella forma dell'apice, che presentasi più alto e più robusto, e nell'andamento della commessura laterale delle valve che si inflette maggiormente verso la valva perforata.

Offre le dimensioni seguenti: lungh. mm. 16. 5, largh. mm. 19. spess. mm. 13. (fig. 1, tav. IV).

Invece due altri esemplari raccolti alla Grotta del Miele, mentre presentano molto meglio corrispondente alla descrizione la forma dell'apice e l'andamento della linea commessurale, offrono il lobo della valva perforata meno largo ma più distinto dalle parti laterali per mezzo di due solchi.

L'esemplare figurato presenta la lunghezza di 18 mm., la largh. di 21 mm. e lo spess. di 15 mm. (fig. 21, tav. III).

Nell'esemplare di Papigno ed in uno dei due della Grotta del Miele ho potuto distinguere, mercè il distacco di un frammento della valva brachiale, parte dell'apparato apofisario o brachiale e precisamente la sola porzione discendente delle due lamelle: esse distano fra loro inferiormente di 2 mm. e il punto ove esse si ripiegano verso la valva perforata dista dal punto di attacco di circa 4 mm. Neanche in questi

tre individui si potè riscontrare la forma del deltidio, che il Canavari lamenta non conservata negli esemplari da lui studiati.

Un altra forma rinvenuta a Papigno (fig. 22, tav. III), rappresentata da due esemplari, si allontana ancor più che le precedenti dalla descrizione del Canavari. Essa è più lunga che larga; la valva perforata molto convessa, colla parte mediana, a cominciare poco prima della metà della lunghezza, rilevata in lobo, che si allarga regolarmente verso il margine frontale, distinta sulle parti laterali per due solchi non molto profondi; apice assai alto e robusto, mancante della sua estremità (e quindi privo dei caratteri della forma del forame e del deltidio), a quanto sembra poco incurvato. Valva brachiale convessa sui lati ma più ancora nella regione apiciale, in seguito alla quale si inizia tosto un seno che va allargandosi ed approfondendosi verso la fronte, dove si ripiega assai fortemente per raggiungere il margine della valva perforata. Commessura delle valve rotondeggiante sui lati e pressochè ad angolo retto alla fronte; linea commessurale leggermente flessuosa ai lati, fortemente ricurvata alla fronte verso la valva perforata. Linee di accrescimento più distinte verso i margini e disposte così da assecondare in modo regolare l'andamento della commessura. La superficie delle valve guardata colla lente appare ornata da sottilissime e numerose costicine irradianti dagli apici. Punteggiatura minutissima e regolare.

I due esemplari presentano sulla valva perforata, l'uno perchè in parte decorticato, l'altro per trasparenza, quattro setti distintissimi, due per ogni lato del lobo: di essi i due più interni sono più lunghi degli esterni, percorrendo per quasi due terzi la lunghezza della valva.

L'esemplare figurato misura in larghezza 19 mm., in lunghezza 21 mm. (?) e in spessore 15 mm.

Questa forma che per la espansione della fronte si accosta alquanto alla *Terebr. linguata* Bkh. [1], dalla quale del resto si distingue specialmente per la diversissima forma dell'apice, va pure ascritta alla *T. Cornicolana*, anche per consenso del dott. Canavari. L'egregio mio amico mi scrive in proposito: « la commessura laterale delle valve, l'intero *habitus* mi ricorda alcuni esemplari di Monticelli, che io non figurai e nei quali si osserva un graduale sviluppo dell'apice sino a questa forma di Papigno ».

Terebratula (*Pygope*) *Erbaensis*, Suess.

Tav. III, fig. 24 (*a. b*).

Zittel, *Geolog. Beobacht. aus den Central. Apen.* 1869, pag. 47, tav. XV, fig. 5-10. — Meneghini, *Les foss. du calcaire rouge ammonitique*, pag. 165, pl. XXIX, fig. 6-8. 1867-81.

Ho in esame due esemplari di valva perforata d'aspetto rotondeggiante, che affettano una forma alquanto diversa da quelle, pur numerose, finora presentate, descritte e figurate dagli autori. Le variazioni consistono nell'essere più convessi e nell'avere l'apice più largo e più diritto e assai stretta la porzione del margine

[1] Böckh J. *Die Geologischen verhältnisse des südlichen Theiles des Bakony*, II Th. 1874, pag. 151, tav. I, fig. 15 e 17.

palleale laterale, che col margine della valva opposta doveva formare la depressione lungo la commessura.

Le due valve provengono dalla Grotta del Miele: quella che ho figurato ha una lunghezza di 33 mm. e una larghezza di 34; l'altra, appena più piccola, e in parte decorticata e sulla superficie del modello interno offre traccie dell'impressione dei vasi, analoghe a quelle rappresentate dallo Zittel nella figura 10 (op. e tav. cit.).

Il signor Verri rinvenne poi in una località del torrente Penna due grossi campioni incompleti di questa stessa specie; il meglio conservato, sgraziatamente mancante dell'apice, corrisponde assai per la forma e per le dimensioni alla figura 8 dello Zittel (op. e tav. cit.).

Terebratula (*Pygope*) sp. (cfr. *aurita*, Stopp.)

Tav. I, fig. 23 (*a. b*).

Meneghini, *Les fossiles du calcaire rouge ammonitique*. 1867-81, pag. 167, tav. XXIX, fig. 9, 10, 11, (*Terebr. aurita*).

Unica valva brachiale che, come la specie dello Stoppani, presenta il margine cardinale formato da due linee dirette che si congiungono al disotto del piccolo apice, formando un angolo assai aperto (145°): lo stato poco conservato dei fianchi non permette di asserire che il margine cardinale si unisce ad *angolo vivo* con quelli laterali, il che tuttavia risulta quasi certo se si considerano le direzioni dei margini cardinale e laterali e le porzioni sufficientemente conservate delle due espansioni laterali ad orecchietta, a quanto pare però meno estese di quelle della *T. aurita*. Anche la fronte troncata è un carattere che avvicina le due forme, ma in quella che descrivo ve ne sono però altri che stabiliscono un distacco marcato e sono la maggiore convessità nella regione apiciale che non nella palleale, la mancanza della leggera depressione verso il margine frontale che si rimarca nella parte mediana degli esemplari della *T. aurita* figurati dal prof. Meneghini, e nella forma dei fianchi che non sono concavi ma diritti come succede in talune forme della *T. Erbaensis*. Da questa però si distingue, oltrecchè per altri caratteri, specialmente per la forma della fronte. La maggiore convessità nella regione apiciale aumenterebbe le somiglianze già riscontrate tra le *T. aurita* e la *T. Euganensis*: stanno tuttavia sempre anche per l'esemplare di Papigno i caratteri differenziali della disposizione del margine cardinale già indicati dal prof. Meneghini.

La valva descritta ha la lunghezza di 38 mm. e la larghezza di 37 mm.

Terebratula Taramellii, Gemm.

Tav. IV, fig. 4.

Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con Terebratula Aspasia Mgh. della provincia di Palermo e Trapani*. 1874, pag. 61, tav. XI, fig. 5 e 6. — Parona C. F., *Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili*. 1880, pag. 9, tav. I, fig. 3.

Forma che corrisponde assai alla descrizione ad alla figura che dà il Gemmellaro: vi si rimarca soltanto la lunghezza appena maggiore della larghezza e una convessità alquanto più rilevante nella regione apiciale della valva perforata. Questa ha l'apice piccolo e fortemente curvato da non lasciare spazio per il deltidio; un forame di media grandezza e rotondo. La valva brachiale un poco rigonfia nella sua

parte posteriore e pianeggiante verso i margini: l'incontro delle due valve si fa ad angolo acutissimo, tagliente. Linee di accrescimento tenuissime e regolarî. Sulla valva brachiale per trasparenza si scorgono traccie di due setti sino ad un terzo dalla estremità dell'apice ed indizî di impressioni di vasi assai larghi.

L'individuo figurato ha la lunghezza di mm. 11.5, la larghezza di mm. 11 e lo spessore di mm. 6. 5. Con altri tre esemplari, di dimensioni pressochè eguali, tutti provenienti da Papigno, costituisce la prima rappresentanza di questa specie per l'Appennino centrale. Questa fòrma corrisponde a quella tipica di Sicilia assai più che non a quella di Gozzano, che descrissi altrove (l. c.), la quale se ne allontana alquanto per la configurazione dell'apice meno incurvato.

Terebratula cerasulum, Zitt.

Tav. IV, fig. 3.

Zittel, *Geol. Beob. aus dem Central-Apennin.* 1869, pag. 37, tav. XIV, fig. 5, 6. — Canavari, *I Brachiopodi degli strati a* T e r. A s p a s i a *Mgh. nell'Appennino centrale*, pag. 18. 1880.

Tre soli dei sette esemplari che ho sott'occhio sono sufficientemente conservati per poterne stabilire un confronto colla forma figurata dallo Zittel. Vi corrispondono bene per la globosità caratteristica e per l'apice assai basso e incurvato; uno però ne differisce alquanto nella confermazione della fronte, in causa di una maggiore espansione della fronte nella valva perforata e dell'essere uno dei fianchi alquanto dissimetrico nella sua porzione anteriore, di guisa che la linea commesurale frontale è costretta ad inflettersi e a descrivere una curva irregolare a convessità verso la valva brachiale, più risentita di quella che si rimarca sulla figura dello Zittel (il che viene ad aumentare la rassomiglianza di contorni, già intraveduta dallo stesso autore (l. c.), colla *Hynniphoria globularis* Sss.): quivi poi l'incontro delle due valve si effettua ad angolo acuto. Manca l'estremità dell'apice, il quale è rotondeggiante ai lati; la superficie della conchiglia è riccamente ornata da distinte linee di accrescimento; la punteggiatura è fine e non molto regolarmente distribuita; sulla valva perforata si vedono per trasparenza due setti, che si estendono dall'apice a metà della lunghezza della conchiglia.

Sei esemplari provengono da Papigno: le dimensioni di quello descritto e figurato sono le seguenti: lunghezza 11 mm., larghezza 10 mm., spessore mm. 8. 5.

Il settimo fu raccolto alla Grotta del Miele presso Cesi e presenta dimensioni ancora più grandi di quelle dell'esemplare figurato (lungh. 13 mm. (?), largh. 12 mm. spess. 10 mm.); sgraziatamente è monco anch'esso della parte apiciale, ma nel resto risponde in tutto ai caratteri della specie.

Terebratula sphenoidalis Mgh.

Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* T e r. A s p a s i a *Mgh. della provincia di Palermo e Trapani.* 1874, pag. 62, tav. X, fig. 16, 19. — Canavari, *Sui fossili del Lias inferiore nell'Appennino centrale.* 1879, pag. 20, (*Ter.* cfr. *sphenoidalis*). — Canavari, *I Brachiopodi degli strati a* T e r. A s p a s i a *Mgh. nell'Appennino centrale.* 1880, pag. 14, tav. II, fig. 5, 6.

Parecchi esemplari che si differenziano alquanto dalle forme siciliane, perchè presentano più larga la parte posteriore della valva brachiale e nessun accenno alle striature radiali, sebbene la superficie delle conchiglie sia ben conservata. Si

avvicinano di più alle forme tipiche appenniniche, al cui confronto non si rimarca altra variazione che una convessità un po' maggiore nella valva perforata di uno degli esemplari. L'apice intatto in un sol campione corrisponde perfettamente alla descrizione che ne dà il Canavari; commessura laterale delle valve quasi retta, frontale alquanto arcuata verso la valva perforata. Punteggiatura sottilissima e uniformemente distribuita.

Quattro esemplari provengono dalla Grotta del Miele presso Cesi, uno solo dei quali è sufficientemente conservato: esso ha la lunghezza di 20 mm. (?), la larghezza di mm. 18,5 e lo spessore di 11 mm. Tre altri esemplari incompleti si raccolsero a Papigno, un altro nel torrente Penna.

Gen. **Waldheimia**, (King.) Davids.

Waldheimia bilobata, Stopp. sp.

Zittel, *Geolog. Beobachtung. aus den Centr.-Apenn.* 1869, pag. 39, tav. XV, fig. 1, 2. — Meneghini, *Monogr. sur les fossiles du calcaire rouge ammonitique*, p. 173. 1867-81.

Un' unica valva brachiale assai malconcia; tuttavia riconoscibile specialmente per il solco mediano distintissimo. Si nota il seno meno profondo di quanto osservasi sugli esemplari figurato dallo Zittel; per la sua forma piuttosto ristretta si avvicina assai alla fig. 2 data dallo stesso autore (op. e tav. cit.).

L' esemplare proviene da Papigno.

Gen. **Rhynchonella**, Fischer

Rhynchonella retroplicata, Zitt.

Zittel, *Geol. Beob. aus den Centr.-Apenn.* 1869, pag. 40, tav. XIV, fig. 13, 14. — Canavari, *I Brachiopodi degli strati a Ter. Aspasia Mgh. nell'Appenn. centrale.* 1880, pag. 27.

Un unico e mal conservato esemplare proveniente da Val Mirandola di Cesi. Esso e per le dimensioni e per la posizione e conformazione delle pieghe corrisponde perfettamente all'esemplare rappresentato dallo Zittel. (loc. e tav. cit.) colla figura 13. Sotto la lente la sua superficie appare distintamente fibrosa, ma non si distinguono le fine linee radiali.

Rhynchonella Sordellii, Par.

Tav. IV, fig. 7 (*a. b. c. d.*).

C. F. Parona, *Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili.* 1880, pag. 23, tav. III, fig. 4. — Canavari, *I Brachiopodi degli strati a Ter. Aspasia Mgh. nell'Appennino centrale.* 1880, pag. 30, tav. IV, fig. 10, (*Rh. Sordellii* Par. var.).

Un frammento di rinconella raccolto in Val Mandorla di Cesi sembra per la configurazione dell' apice della valva perforata e pel numero e forma delle coste spettante a questa forma.

Vi riferisco poi anche parecchi frammenti ed un esemplare completo provenienti da Papigno. L' individuo completo è di piccole dimensioni (lungh. mm. 13.5, largh. 15 mm., spess. mm. 8. 5), riproduce evidentemente la fisionomia distinta di questa specie quantunque differisca alquanto dalla forma di Gozzano da me figurata (loc. e tav. cit.) come tipo. Ha uno spessore proporzionalmente minore ed è alquanto troncato alla fronte; ciò per altro si osserva anche sopra taluni esemplari dello stesso

giacimento di Gozzano. Il numero delle coste, variabile in questa specie, nell'esemplare in esame è di 23, esattamente corrispondenti per forma ed andamento. L'apice della valva perforata è più alto e lascia vedere un deltidio alto e stretto ed un forame piccolo ed oblungo. Perfetta la corrispondenza per riguardo alla forma dei fianchi e la disposizione della linea commessurale. Qualche linea di accrescimento si presenta ben distinta.

Questa forma si distingue da quella di Monticelli, descritta dal Canavari come varietà (loc. cit.), pel minor numero delle coste e perchè meno rigonfia; vi corrisponde però assai per la configurazione dell'apice, che la rende ben distinta dalla *Rh. Orsinii* Gemm.

Rhynchonella Verrii, n. f.

Tav. IV, fig. 9 (*a. b. c. d.*), 10 (*a. b. c. d.*), 11 (*a. b. c.*).

Conchiglia subequivalve, a contorno subpentagonale-arrotondato. Valva perforata convessa, con lobo più o meno marcato, ornato di 5 o 6 coste, quasi indistinte sulla regione apiciale, basse, larghe, rotondeggianti nel resto, lateralmente limitato da 2 altre coste molto più piccole. Apice basso, appena incurvato, deltidio stretto, quasi indistinto. Valva brachiale alquanto meno convessa, di forma simile, provvista di 3 a 5 coste nel seno, lateralmente limitato da 2 altre più piccole, tutte arrotondate, larghe e basse come quelle della valva opposta. In tutte e due le valve le coste sono più robuste quando sono in minor numero, e quelle che delimitano il seno e il lobo si originano dalla biforcazione della contigua più esterna o più interna; in taluni individui tutte le coste raggiungono il margine e si dispongono regolarmente per modo che la conchiglia assume un aspetto più uniforme e più rotondeggiante il suo contorno; in altri invece alcune coste si sfumano prima di raggiungere il margine frontale. Il seno ed il lobo sono più distinti in quegli esemplari che hanno minor numero di coste. Linea commessurale sui fianchi quasi retta e talora rilevata e tagliente, sui lati della fronte si inflette più o meno fortemente verso la valva perforata per risalire di nuovo verso la brachiale descrivendo lungo la fronte da 2 a 4 ondulazioni, a seconda del numero delle coste che raggiungono il margine. Struttura distintamente fibrosa; rare linee di accrescimento distinte.

Ho in esame 9 esemplari di questa rinconella molto variabile; gli esemplari figurati e che la rappresentano nei suoi varî tipi hanno le seguenti misure:

	(fig. 9)	(fig. 11)	(fig. 10)
Lunghezza	mm. 14	mm. 11	mm. 11,5
Larghezza	mm. 15	mm. 12	mm. 11
Spessore	mm. 9	mm. 8	mm. 8

Il tipo a maggior numero di coste è quello che predomina, non mancano tuttavia forme intermedie che lo collegano a quello che ne presenta in numero minore: restano del resto sempre costanti i caratteri dell' apice, della linea commessurale e della forma delle coste, i quali escludono il dubbio che gli estremi della serie possono spettare a specie differenti.

Questa rinconella si trova a Papigno; ha qualche analogia colla *Rh. retroplicata* Zitt. e non mi sembra che possa essere avvicinata a nessun' altra delle forme liassiche a me note.

Rhynchonella Capellinii, n. f.

Tav. IV, fig. 5 (*a. b. c. d.*), 6 (*a. b.*).

Conchiglia equivalve, triangolare, più larga che lunga. Valva perforata uniformemente convessa, appiattita sui fianchi, ornata da 4 a 6 coste mediane, ben rilevate ma non taglienti, separate, per un intervallo un po' maggiore di quello che corre tra l'una e l'altra di esse, da altre 2 o 3 per ciascun lato, delle quali la più esterna o le due più esterne sono rudimentali; apice molto basso, appena ricurvo, deltidio indistinto, forame piccolissimo. Valva brachiale perfettamente simmetrica, con coste mediocri in numero di 5 o 7 con altre 2 pieghe minori su ciascun lato. Non tutte le coste, sopra ambedue le valve si originano dall' apice; talune risultano dalla biforcazione di altre, che si effettua a circa un terzo dall'apice. Falsa area, lunga, larga e piana; sovr' essa si disegna la linea commissurale lievemente ondulata; margine frontale rotondeggiante e la commessura vi si dispone a spezzata regolare a seconda dell'incontro dei margini delle coste.

Gli esemplari più conservati, fra i 6 rinvenuti a Papigno, presentano le seguenti dimensioni:

Lunghezza	mm. 15	mm. 14,5	mm. 10
Larghezza	mm. 20	mm. 17	mm. 13,5
Spessore	mm. 11	mm. 12	mm. 7

La fisonomia di questa forma richiama la *Rh. retusifrons* Opp. degli strati di Hierlatz, dalla quale tuttavia si differenzia per la diversa configurazione dell'apice e dei fianchi e per avere appena accennato il seno e il lobo, e le coste distinte anche sull'apice.

Rhynchonella sp. ind.

Tav. IV, fig. 8 (*a. b. c. d. e.*).

Conchiglia di un tipo affine a quello della forma precedentemente descritta; è meno appiattita ai lati. La valva perforata ha l'apice più alto, a forame piccolissimo e deltidio indistinto; porta coste analogamente disposte, più robuste e taglienti, ma in numero minore, 4 mediane e 1 o 2 per ciascun lato molto meno sviluppate. La valva brachiale è ornata da 3 coste mediane e da 2 altre piccole per ciascun lato, in tutto simili a quelle della valva opposta. Falsa area un po' convessa; commessura come nella forma precedente, superficie fibrosa, linee di accrescimento distante sulla falsa area.

Due soli esemplari, provenienti da Papigno, che presentano le seguenti dimensioni:

Lunghezza	mm. 12,5	mm. 10
Larghezza	mm. 10,5	mm. 10
Spessore	mm. 8	mm. 6,5

I caratteri differenziali riscontrati tra questa rinconella e l'altra prima descritta non permettono di riunirle come spettanti ad una sola specie, almeno finchè non si rinvengano forme intermedie. Ove la falsa area, invece d'essere alquanto convessa, fosse concava, questa forma troverebbe un riscontro nella *Rh. Theresiae* Par. della oolite della Croce di Segan in Val Tesino [1]

Rhynchonella sp. ind.

Tav. II, fig. 12 (*a. b.*).

Conchiglia subtriangolare, acuto l'angolo posteriore, rotondeggianti gli anteriori. Valva perforata uniformemente convessa con 14 pieghe, che non si fanno distinte che ad un terzo dall'apice; tutte basse, rotondeggianti, talune dicotome; più larghe e meglio delimitate le mediane, quasi indistinte le laterali. Apice alto, incurvato, molto sporgente oltre l'umbone della valva brachiale, a carene laterali acute, confluenti tosto coi margini laterali, a forame indistinto, falsa area ristrettissima. Valva brachiale compressa, convessa nella regione apiciale molto meno della perforata, pianeggiante verso i margini palleali, ornata di 13 pieghe in tutte corrispondenti e per posizione e per forma a quelle della valva opposta. Margini dei fianchi affatto acuti e retta la linea commessurale; margine frontale acuto e lievemente ondulato come la commessura. Superficie fibrosa e distinte alcune linee di accrescimento.

Un unico esemplare rinvenuto a Papigno, della lunghezza di 10 mm., larghezza 10 mm., spessore 5 mm.

Questa forma che per i suoi lineamenti generali si raggruppa colla *Rh. flabellum* Mgh., colla *Rh. Greppini* Opp. e colla *Rh. triquetra* Gemm., se ne distingue evidentemente per la forma dell'apice e dei fianchi.

ACEFALI

Gen. **Pecten**, Klein.

Pecten Stoliczkai, Gemm.

Tav. IV, fig. 13.

Gemmellaro, *Sopra alcuni fossili della zona con* Ter. *Aspasia Mgh. della provincia di Palermo e Trapani.* 1874, pag. 86, tav. XII, fig. 1, 2.

Una sola valva incompleta che corrisponde a quella detta superiore dal Gemmellaro; porta quasi intatta l'orecchietta boccale, manca di tutta l'orecchietta anale e di quasi tutta la porzione corrispondente del margine; la sua lunghezza è di 37 mm. e quantunque manchi la possibilità di avere la misura del diametro trasversale, pure ricostruendo idealmente la valva nelle sue parti mancanti, risulta corrispondente anche per le proporzioni alla forma siciliana. Le costelle sono ben distinte dall'apice sino verso la parte mediana dove si sfumano, lasciando affatto liscio il contorno palleale; esse sembrano alquanto più grosse di quelle dell'esemplare figurato dal Gemmellaro.

[1] Parona e Canavari, *Brachiopodi oolitici dell' Italia settentrionale.* 1882 Atti soc. tosc. scienze natur.

GASTEROPODI

Gen. **Turbo**, Linn.

Turbo sp. ind.

Tav. III, fig. 25.

Conchiglia pressocchè larga quanto lunga; spira regolare, composta di giri convessi, ornati superiormente di pieghe trasversali, leggermente arcuate, quasi attigue, terminanti con un lieve ingrossamento.

Esemplare incompleto ed alquanto eroso. Per la forma, dimensioni ed ornamentazione molto affine al *Turbo Midas* D'Orb. del Lias medio; ne differisce specialmente perchè porta le pieghe assai meno spaziate.

Proveniente da Papigno.

Questo turbo venne raccolto in strati alquanto più recenti di quelli a *Ter. Aspasia;* in questi non si rinvenne altro resto di gasteropodo, che un frammento di una grande pleurotomaria.

ECHINODERMI

Gen. **Cidaris**, Klein.

Cidaris sp. ind.

Tav. IV, fig. 14.

Frammento di radiolo cilindrico della lunghezza di mm. 65 e della larghezza di mm. 21, spezzato alle due estremità, a superficie ornata da costelle sottili, rettilinee, parallele, distanti meno di un millimetro l'una dall'altra e regolarmente proviste di granuli rotondeggianti frequenti.

Il descritto pezzo, che per la ornamentazione ricorda il *Cidaris rhopalophora* Zitt. (1), è identico pei suoi caratteri al *Cidaris* del deposito a brachiopodi di Gozzano, ch'io già descrissi come sp. ind. Esso proviene da Papigno; quantunque il suo stato di conservazione sia migliore di quello dei frammenti avuti dal calcare di Gozzano (2), pure lo ritengo ancora insufficiente per una descrizione completa e per distinguerlo con nome specifico.

Gen. **Millericrinus**, D'Orb.

Millericrinus Hausmanni, Roem. sp. (?).

1879. Meneghini, *Monograph.*; *Les foss. du calc. roug. ammonit.* ecc., pag. 181, tav. XXX, fig. 14-19.

Un solo articolo isolato, a sezione perfettamente rotonda, il diametro della faccia articolare è alquanto maggiore (mm. 7.5) dell'altezza dell'articolo (5 mm.); superficie

(1) Zittel, *Geolog. Beobacht. a. d. Central-Apenninen.* 1876, pag. 130, tav. XIII, fig. 2 (in Benecke, *Geog. paläont. Beiträge*).

(2) C. F. Parona, *Il calcare di Gozzano e i suoi fossili.* Atti Acc. dei Lincei, Memorie della Classe di scienze fisiche ecc. Serie 3a, vol. VIII. tav. III, fig. 12.

esteriore liscia; una delle faccie articolari è infissa sulla roccia, l'altra è ben conservata e presenta un foro centrale ottusamente pentagonale (?), circondato da uno spazio circolare liscio, proporzionalmente più stretto di quello che si osserva nelle figure date dal prof. Meneghini; esternamente ornata da raggi in numero maggiore di 40 al loro punto di origine e che si ramificano in vario modo prima di toccare la periferia.

Craterocrinus, n. g.

Craterocrinus liasicus, n. f.

Tav. IV, fig. 15.

Questo crinoide, affatto distinto per la singolarità della sua forma, non si presta ad essere riferito a genere e specie note; esso fu giudicato interessante anche dal prof. Meneghini e dal dott. Canavari, ai quali comunicai il pezzo per esame e che, come sempre, mi furono cortesi del loro giudizio sulla sua determinazione.

È porzione di calice con il coperchio non totalmente conservato e, caso singolare, non trova alcun riscontro con le forme liassiche note, mentre ricorda invece tipi paleozoici, di guisa che potrebbe essere considerato come forma *atavica*. Secondo il prof. Meneghini tale crinoide costituirebbe un nuovo genere e potrebbe essere così definito.

Calice obconico regolare: B. 5, pentagonali; R. 5, pure pentagonali; B. cadute — Coperchio ampulliforme? (rotto), a elementi granulari — Paragonabile nell'insieme ai *Platycrinus* paleozoici, ma troppo incompleto per rilevarne le affinità.

Fu raccolto alla Grotta del Miele: la figura è di grandezza naturale.

Fossili degli strati del Lias medio a *facies* di Cefalopodi.

Atractites orthoceropsis, Mgh. (¹)

Meneghini, *Monographie*; *Les fossiles du calcaire rouge ammonitique*. 1867-81, pag. 139.

Due modelli interni di fragmoconi; l'uno del F. Calderelle di Cesi, lungo 77 mm., a sezione elittica, risultandone il diametro maggiore, dell'estremità più grossa, di circa 25 mm., il minore di 20 mm., composto di 6 concamerazioni incomplete. L'altro proveniente da Papigno, della lunghezza di 48 mm., a sezione elettica, misurando 15 mm. il diametro maggiore dell'estremità più grossa e 12 mm. il minore, conta 5 concamerazioni incomplete. Ambedue sono molto corrosi sul fianco scoperto dalla roccia, irregolarmente rotti alle due estremità; nessuna traccia di sifone, qualche brano di conoteca mal conservata, trasformata in ossido di ferro, come la più parte dei fossili di questi strati; al limite tra una concamerazione e l'altra rimarcansi traccie di quelle fascie o cercini, che scorgonsi sulla figura 5 data da Hauer (²) per l'*Orthoceras* (*Melia*) sp. ind.

In complesso lo stato di conservazione di questi due campioni non è tale da permettere di trarne il disegno o di farne una descrizione completa.

(¹) Riguardo a questa specie veda il lettore la Memoria già citata del dott. Canavari: *Beitr. zur Fauna d. unt. Lias v. Spezia*, a pag. 15.

(²) *Cephal. aus dem Lias*. 1856, pag. 73 (ex parte), tav. XXV, fig. 5.

Amatheus spinatus, Brug.

Meneghini, *Monogr.*; *Les foss. d. calc. roug. ammonitiq.* 1867-81, pag. 66, tav. XIII, fig. 4, 5, e pag. 190.

Un frammento ben caratterizzato dalla forma delle coste e dalle spine ch'esse presentano al punto di passaggio dai fianchi alla faccia ventrale. Esso ha un diametro di circa 55 mm. ed offre un spessore proporzionalmente minore di quello degli esemplari figurati dal prof. Meneghini, forse per effetto di compressione subita. Nessuna traccia di linea lobare; la chiglia ventrale è visibile per un piccolo tratto, ma crosa. È specialmente da confrontarsi colla figura 4 (op. e tav. cit.).

Non mi consta che questa specie sia stata prima d'ora riscontrata nel Lias medio dell'Appennino centrale. L'esemplare proviene da Sotto Moggio.

Lytoceras fimbriatum, Sow.

D'Orbigny, *Paléont. française*, *Terr. jurassiq.* 1842, pag. 314, tav. XCVIII.

Un esemplare incompleto, costituito da porzioni di 3 giri; il più esterno nel suo maggiore sviluppo misura una altezza di 40 mm.; lo stato di conservazione della superficie, con porzioni del guscio, e la forma compressa dei giri mi permettono di assicurare la esattezza della determinazione. Come dice D'Orbigny la superficie è « *ornée en travers de nombreuses stries irregulières ridées ou comme festonnées, les rides representant dans leurs ensemble des stries trasversales. On remarque de plus* (ogni dieci o dodici strie) *de lames saillantes* ». Osservo però che, per quanto si può giudicare da siffatti frammenti di giro, questo esemplare di Papigno sembra affettare un più rapido accrescimento della spira, sì da avvicinarsi per tale carattere alla forma di Spitzstein (Kufstein-Tirolo), che Hauer [1] riferì al *Ammonites fimbriatus* e che poi il prof. Meneghini [2] associò al *Lytoceras Cereris* Mgh.

Phylloceras sp. ind.

Un esemplare incompleto e schiacciato (circa 70 mm. di diam.), conserva buona parte del guscio, ornato da strie saglienti, capilliformi, che distano fra loro meno di un millimetro verso la parte ventrale del giro esterno; vi si osserva anche un distinto cercine che si sfuma lungo il fianco; nessuna traccia di linea lobare. Lo stato del fossile non permette una sicura determinazione; può essere confrontato col *Pyll. disputabile* Zitt. e col Phyll. *Bicicolae* Mgh.

L'esemplare proviene da Papigno.

Harpoceras Algovianum, Opp.

Meneghini, *Monogr.*; *Les foss. du calc. roug.* ecc., pag. 40 e 204, tav. X, fig. 1, 2.

Parecchi esemplari incompleti ed impronte, che per le dimensioni e pel tipo di forma corrispondono assai alle figure 1 e 2. (op. e tav. cit). Provengono da Pagigno.

[1] *Cephal. aus d. Lias* ecc. 1856, pag. 62 (ex parte), tav. XXII, fig. 1, 2.
[2] *Monograph.* cit., pag. 105, tav. XXI, fig. 2, 3.

Harpoceras serpentinum, Rein.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 13 e 198, tav. III, fig. 1.

Un esemplare abbastanza ben conservato ed un' impronta. Le dimensioni del primo sono molto probabilmente alquanto alterate dalla compressione (diametro 50 mm.; altezza del giro esterno in rapp. al diam. 0,44; larghezza dell'ombelico in rapp. al diam. 0,14). Le coste ben conservate sono circa 90 sul giro esterno. Questo esemplare proveniente da Papigno è ben distinto dal *Harpoceras radians* della stessa località.

Harpoceras radians, Rein. (?).

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 33 e 203, tav. IX, fig. 2-6.

Frammento di modello interno ed impronte raccolte a Papigno e Moggio, riferibili alle figure 4 e 6 (op. e tav. cit.).

Harpoceras boscense, Reyn.

Zittel, *Geolog. Beobachtung. aus den Central-Apenninen*, tav. XII, fig. 3, 4.

Un esemplare guasto e qualche frammento sufficientemente caratterizzati.

Harpoceras sp. ind.

Un esemplare in parte guasto e con porzioni di guscio, del diametro di circa 50 mm.; per le dimensioni dell'ombelico, per la forma del margine ombelicale e per la forma e disposizione delle coste si avvicina assai alla ammonite figurata da Hauer (1), come spettante al *H. complanatum* Brug., riferimento che, se non erro, non venne accettato dal Meneghini (2).

L'esemplare fu raccolto a Papigno; un esame accurato, per quanto lo permette il suo cattivo stato di conservazione, persuade ch'esso non può essere riferito nè al *Harp. boscense* Reyn., nè al *H. Kurrianum*. Opp.

III.

Lias superiore.

Il Lias superiore a *Harpoceras bifrons* (toarciano) nell'area, cui si riferisce il nostro studio, si mostra sotto la forma litologica di calcari e schisti rossi e bigi, con Ammoniti ed Aptici, che sopportano oppure sono surrogati da schisti selciosi rossi e verdi pure con Ammoniti, Aptici e Belemniti. Il professore Meneghini ha già fatto conoscere, nella sua splendida monografia sui fossili alpini ed appenninici di questo terreno, il ricco materiale fornitogli da molte località dell'Umbria, quali Cesi, monte Catria, Cagli, monte de' Fiori, Furlo, Val d'Urbia, Narni ecc.; epperò posso limitare il mio compito al semplice elenco delle ammoniti riscontrate nella

(1) *Cephalop. aus dem Lias d. n. Alpen.* 1856, pag. 34, tav. IX, fig. 9, 10.
(2) *Monograph.* cit., pag. 19.

località di Val Caldona presso Cesi, e a fare un piccolo cenno descrittivo di taluni esemplari di aptici, rinvenuti dal signor Verri a Catria ed a Papigno, interessanti perchè, per quanto mi consta, non furono fino ad ora accennati come esistenti nell'Appennino centrale.

Rosso ammonitico di Val Caldona presso Cesi.

Lytoceras Dorcadis, Mgh.

Meneghini, *Monographie des fossiles appart. au calcaire rouge ammonit. de Lombardie et de l'Apennin de l'Italie centr.* 1867-81, pag. 107 e 191, tav. XXI; fig. 1.

Lytoceras spirorbis, Mgh.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 111 e 192, tav. XXI, fig. 4.

Lytoceras Francisci, Opp.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 105 (sotto il nome di *L. Cereris* Mgh.) e pag. 191, tav. XXI, fig. 3.

Phylloceras Nilsoni, Héb.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 96 e 195, tav. XVIII, fig. 7, 9. — È una delle specie rappresentata da maggior numero d'esemplari.

Phylloceras Spadae, Mgh.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 93 e 195, tav. XIX, fig. 1, 4.

Phylloceras Capitanei, Mgh.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 94 e 195, tav. XVIII, fig. 4-6.

Phylloceras selinoides, Mgh.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 90 e 195, tav. XIX, fig. 5, 6.

Phylloceras Doderleinianum, Mgh.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 107 e 191, tav. XXI, fig. 1.

Coeloceras subarmatum, Y et B.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 67 e 197, tav. XIX, fig. 4-6.

Coeloceras Desplacei, D'Orb.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 75 e 209, tav. XVI, fig. 6.

Coeloceras subanguinum, Mgh. (?).

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 73 e 208, tav. XVI, fig. 9.

Harpoceras bifrons, Brug.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 8 e 198, tav. I, fig. 4. — Molti esemplari.

Harpoceras serpentinum, Rein.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 13 e 198, tav. III, fig. 1.

Harpoceras discoides, Ziet.

D'Orbigny, *Terr. jurass.* (*Paléont. franç.*) 1842, pag. 356, pl. 115. — Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 20 e 198. — Molti esemplari.

Harpoceras falcifer, Sow.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 14, e 198, tav. III, fig. 2.

Harpoceras Comense, de Buch.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 21 e 199, tav. VI, fig. 1; tav. VII, fig. 1 e 3; tav. VIII, fig. 6 e tav. XII, fig. 1. — Buon numero di esemplari.

Harpoceras Mercati, Hauer.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 32 e 203, tav. VIII.

Harpoceras Algovianum, Opp. (?).
Harpoceras radians, Rein.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 33 e 203, tav. IX; tav. XI.

Hammatoceras insigne. Schubl.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 55 e 207, tav. XII, fig. 2, 3; tav. XIII, fig. 1, 2; tav. XIV, fig. 2, 3; tav. XVI, fig. 1.

Aptychus gigantis, (Quenst.) Stopp. non Quenst.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 116 e 210, tav. XXIII, fig. 1; tav. XXIV, fig. 1.

Un esemplare alquanto eroso, infisso e in parte nascosto dalla roccia; riesce quindi impossibile rilevarne esattamente le dimensioni; tuttavia risulta ch'esse sono di poco inferiori a quelle dell'esemplare di Clivio (Mendrisio nel Canton Ticino) figurato dal prof. Meneghini. Non ebbi modo di esaminare le sezioni trasversali e verticali, però osservando la superficie con lente a forte ingrandimento rimarcai distintamente in certi punti la struttura a cellule irregolarmente esagonali, con traccie della sostanza nera interposto alle doppie pareti che le separano e di quella meno scura che le riempie, riscontrate già nell'esemplare alpino succitato. Questo interessante fossile proviene da Catria ed è infisso sopra un pezzo di roccia, tutto cosparso di piccolissimi aptici lamellosi.

Aptychus sublaevis, (D'Orb.) Stopp.

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 118 e 121, tav. XXIII, fig. 2, 3, 4; tav. XXIV, fig. 2, 6.

Un esemplare molto bello, appena più largo di quello proveniente da Erba (Lombardia) (op. cit. tav. XXIII, fig. 2), presentando alquanto più esteso il margine anteriore; infatti si ha una lunghezza (linea d'armonia) di 42 mm., il margine anteriore, identico per forma, misura 32 mm. dall'apice all'angolo, alquanto più pronunciato, del margine esterno. Questo, disposto a curva elittica, per la sua configurazione rassomiglia specialmente quello della fig. 3. (tav. XXIII), si ripiega cioè fortemente formando colla superficie esterna convessa una distinta angolosità. L'angolo posteriore misura 90°, l'apiciale 610.° Superficie di più in più convessa dall'interno all'esterno e dall'avanti all'indietro. Superficie minutamente zigrinata dove è intatta, a punteggiatura più o menò grande laddove operò l'erosione; verso l'angolosità del margine esterno, dove la superficie è ben conservata, si notano esilissime linee ondulate, che corrono parallele al margine stesso. La concavità della faccia interna, quasi tutta ricoperta da calcare, lascia vedere in parte le linee concentriche ineguali di accrescimento.

L'esemplare descritto fu raccolto a Papigno: alla stessa forma riferisco parecchi altri campioni più piccoli, di cui uno costituito dai due pezzi, ben conservati e della stessa provenienza. In uno di essi l'erosione profonda ha posto in molta evidenza la struttura largamente cellulare. I migliori esemplari si raccolsero nel calcare rosso-scuro, gli altri negli schisti verdicci.

Aptychus profundus, (Voltz.) Stopp. (ex parte).

Meneghini, *Monogr.* cit., pag. 122, tav. XXV, fig. 4, 5.

Molti esemplari, provenienti da Papigno e dai monti di Narni, fra i quali cinque presentano i due pezzi vicini, non però contigui. Come già disse il prof. Meneghini per quelli da lui studiati, ogni esemplare presenta qualche differenza che si può credere individuale. Generalmente hanno mal conservato il margine esterno; tuttavia in taluni lo è sufficientemente per stabilire la presenza delle forme molto vicine alla triangolare e di quelle a forma trapezoidale. Angolo apiciale di 100°; margine anteriore più o meno concavo entro i limiti indicati dalle figure citate. La superficie esterna dolcemente convessa ed appena più rigonfia all'indietro che all'avanti, è ornata da molte coste distinte, in tutti gli esemplari all'infuori di uno, anche nella regione apiciale, e nel resto di forma e di disposizione corrispondente alla descrizione che ne dà il prof. Meneghini. Solo in due esemplari è visibile incompletamente la superficie concava, che non presenta nulla di particolare a rimarcarsi; i margini interni, alquanto guasti, vanno ingrossandosi dall'avanti all'indietro e presentano traccie di solcature. Sopra uno di essi si nota che nella regione apiciale porta come dei *piccoli denti a uncinetto* allineati sulla cresta.

L'esemplare più grande misura in lunghezza 42 mm. Due campioni provengono dal calcare rosso, gli altri dagli schisti verdicci.

DESCRIZIONE DELLE TAVOLE

Tavola III.

Fig. 1. *Cerithium nerineaeforme* n. sp. (due esemplari diversi).
» 2. » *Gemmellaroi* n. sp.
» 3. » *umbrum* n. sp.
» 4. » *Di Stefanoi* n. sp.
» 5. » *pleurotomaeforme* n. sp.
» 6,7,8. *Neritina italica* n. sp.
» 9. *Neritopsis* n. sp.
» 10. *Turbo* sp. ind.
» 11. *Emarginula* sp. ind.
» 12. *Macrodon? Pasinii* Gemm.
» 13. *Astarte psilonoti* Quenst.
» 14. *Pecten* sp. ind.

Fig. 15. *Cardinia* sp.
» 16. *Leptaena* sp.
» 17,18. » sp.
» 19. » sp.
» 20. (a-f) *Spiriferina* sp. (cfr. *S. griphoidea* Uhl).
» 21. (a-c) *Terebratula Cornicolana* Can.
» 22. (a-d) » » » (varietà).
» 23. (a-b) » cfr. *aurita* Stopp.
» 24. (a-b) » *Erbaensis* Suess.
» 25. *Trochus* sp.

Tavola IV.

Fig. 1. (a-d) *Terebratula Cornicolana* Can.
» 2. (a-d) » *Canavarii* n. sp.
» 3. » *cerasulum* Zitt.
» 4. » *Taramellii* Gemm.
» 5,6. *Rhynchonella Capellinii* n. sp.
» 7. » *Sordellii* Par.
» 8. » n. sp.

Fig. 9,10,11. *Rhynchonella Verrii* n. sp.
» 12. » sp.
» 13. *Pecten Stoliczkai* Gemm.
» 14. *Cidaris* n. sp.
» 15. *Craterocrinus liasicus* n. f.
» 16. *Leptaena* sp.

LE CONCHE DI TERNI E RIETI

Carta Geologica

Scala di 1/250000

Amelia · S. Gemini · T. Maggiore · Cesi · Orte · Montoro · Narni · P. Appecano · M. Somma · M. Fionchi · Balliferro · S. Vito · F. Nera · TERNI · T. Serra · T. Tescino · Collescipoli · F. Tevere · Laja di Finocchieto · Arrone · Magliano · Aguzzo · Stroncone · M. S. Pancrazio · Piediluco · Configni · M. Cascia · V. Pelosa · Rio Fuscella · Laja di Vacone · Rivodutri · Greccia · Stimigliano · M. Porco Morto · R. S. Susanna · M. Corno · Aspra · Contigliano · Ponzano · V. Gelata · Cantalice · M. Leprino · T. Canera · M. Acuto · RIETI · Poggio Mirteto · Terminillo · Coppaeli · S. G. Reatino · F. Farfa · T. Lariana · F. Velino · Città Ducale · Fara · Antrodoco · Eo. · F. Turano · Poggio S. Lorenzo · F. di Correse · M. Narrone · M. Calvo · Nerola · F. Salto · Monti del Cicolano · Ol.

Lias inferiore.
Lias medio.
Lias superiore.
Titonico.
Creta.
Eocene sup.
Oligocene.
Pliocene.
Travertini e tufi calcarei.
Tufi e ceneri vulcaniche.
Alluvioni contemporanee.
Lava di Rieti.
Sorgenti minerali
Lignite
X°
Valle del Tevere
Monti di Amelia
Colline di S. Gemini
Penna di S. Andrea
Torre Maggiore
Pennecchia
VII°
Capuccini di Porteria
T. dell'Eremita
Cresta del Chicchirichi
VIII°
Valle Mandorla
Caldarelle
Penna di S. Andrea
T. del Sasso grosso
Penna di S. Erasmo
Cesi
IX°
Cesi
Penna di S. Erasmo
Colle Zannuto
Penna di Grotta del Miele
Penna di S. Gio. Piedimonte
Pizzo di Appecano
Valle del Serra a Rocca S. Zenone
Rupi di Battiferro
V°
Valle del Tescino
M. di Belvedere
M. Fianchi
VI°
Pizzo d'Appecano
Valle del Serra
Santi di Battiferro
Valle del Tescino
Valle della Nera
III°
Via degli Sbirri
M. della Cicuta
Vetta della Pelosa
Rio Fascella
Cima d'Arme
Colle Vaja
Valle gelata
IV°
M. di Belvedere
M. Fianchi
M. Sollene
Valle della Nera a Ferentillo
Sella di Colle Oliva
II°
Conca di Terni
M. S. Angelo
Le Marmore
Vetta della Pelosa
I°
Valle del Tevere
M. S. Benedetto
M. Cascia
Valle di Configni
Prati di Cottanello
M. di Greccia
Altipiano di Rieti

C.F. Parona dis. G. G.

C. F. Parona dis.

INDICE DEL VOLUME XV.° SERIE 3.ª

Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

ERRATA-CORRIGE

A pag. 387	lin. 7	in luogo di:	*Sachs Vorlesung* ecc.	leggasi: Sachs, *Vorlesungen über Pflanzenphysiologie*
» 392	» ult.			» *The development of the* ecc.
» 394	» 4	»	Strof	» Straff.
» 395	» 18	»	Antibus	» Antibes
» 401	» 25	»	Guel.	» Gml.
» 404	» 13	»	Stroffarello	» Strafforello
» 405	» 9	»	meristoma	» meristema
» 407	» 19 a f.	»	ramo tende ad appiattirsi	» ramo che tende ad appiattirsi;
» 409	» 4 a f.	dopo	« parassita »	aggiungasi (3/1)